

ANNO ACCADEMICO 2018–19

SCIENZE GEOLOGICHE

MATEMATICA

QUARTO SCRITTO — TESTO A

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

17 gennaio 2020

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola il dominio e la derivata delle funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 1}{4 - x^2}\right)$$

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin(x^2 - \pi) dx.$$

Esercizio 3. Trova un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ di lunghezza $\sqrt{2}$ ortogonale al vettore

$$v = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Quanti vettori w soddisfacenti queste condizioni esistono?

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio di:

- 1) una funzione f_1 continua e decrescente su tutto \mathbb{R} , per cui sia anche vero che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 2$;
- 2) una funzione quadratica f_2 il cui grafico sia tangente alla retta $y = -2x$ nel punto $(1, -2)$;
- 3) una funzione f_3 polinomiale di grado 3 con un punto di massimo in $x = 0$ e un punto di minimo in $x = 1$.

Esercizio 5. Sia data la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 4t, \\ y = -1 - 6t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

- 1) Il punto $A = (0, -1, 0)$ appartiene alla retta? Motiva la risposta.
- 2) Scrivi un'equazione cartesiana del piano α passante per il punto $B = (1, -2, 1)$ e perpendicolare alla retta r .
- 3) Trova le coordinate del punto P intersezione del piano α con la retta r .

Esercizio 6. Una pentola di acqua viene mantenuta alla temperatura costante di $80\text{ }^\circ\text{C}$ sopra a un fornello. Un tortellino preso dal frigo, inizialmente alla temperatura di $5\text{ }^\circ\text{C}$, viene immerso nella pentola all'istante $t = 0$. Da quel momento, la temperatura $T(t)$ del tortellino al tempo t cresce nel tempo secondo la legge

$$T' = \frac{t}{2}(80 - T) .$$

- 1) Trova esplicitamente la funzione che descrive la temperatura $T(t)$ del tortellino al tempo $t \geq 0$ e tracciane il grafico.
- 2) Per t vicino a 0 , la funzione $T(t)$ ha una crescita quadratica. Usando lo sviluppo di Taylor, trova la funzione quadratica che meglio approssima la funzione T per $t \approx 0$.