

ANNO ACCADEMICO 2018–19
SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
TERZO SCRITTO

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

9 settembre 2019

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

2 Nome e cognome _____ Matricola _____

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola il dominio e la derivata della funzione $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$.

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1} dx .$$

Esercizio 3. Esiste una matrice 3×4 che abbia rango 4? Se ritieni che esista, scrivine una; se invece pensi che non esista, spiega perché.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio di:

- 1) una funzione f_1 continua e crescente su tutto \mathbb{R} , per cui sia anche vero che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -10$;
- 2) una parabola f_2 tangente alla retta $y = -2x$ nel punto $(2, -4)$;
- 3) una funzione f_3 continua su tutto \mathbb{R} con un punto di minimo in $x = 0$ e un punto di massimo in $x = 1$.

Esercizio 5. Una barra di bronzo è riscaldata mantenendo un estremo Q_0 alla temperatura ambiente di $T_0 = 20^\circ\text{C}$ e ponendo l'altro estremo Q_4 in un forno a una temperatura di $T_4 = 400^\circ\text{C}$.

Sulla barra sono segnati tre punti speciali, Q_1 , Q_2 e Q_3 ; indichiamo con T_1 (rispettivamente, T_2 e T_3) la temperatura della barra nel punto Q_1 (rispettivamente, Q_2 e Q_3).

Calcola le temperature T_1 , T_2 e T_3 sapendo che per j che varia da 1 a 3 la temperatura T_j è pari alla metà della differenza fra T_{j+1} e T_{j-1} (per esempio, $T_1 = \frac{1}{2}(T_2 - T_0)$ e così via).

Esercizio 6. Una colonia di k pinguini arriva su una nuova isola al tempo $t = 0$. Misurando il tempo t in anni, il numero $p_k(t)$ di pinguini presenti all'istante t segue l'equazione $p'_k = (100 - 2p_k)t$.

- 1) Per quali valori di k la popolazione subisce una decrescita?
- 2) Per $k = 200$, trova esplicitamente la funzione che descrive il numero $p_k(t)$ di pinguini presenti al tempo $t \geq 0$ e tracciane il grafico.
- 3) Se ogni pinguino mangia 2 pesci al giorno, calcola approssimativamente il numero di pesci mangiati in 5 anni nel caso $k = 200$. [*Suggerimento:* considera che $\int_0^5 e^{-t^2} dt \approx 0.9$.]