

ANNO ACCADEMICO 2017–18
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA
SECONDO SCRITTO — TESTO A
PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

9 luglio 2018

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Determina il dominio e calcola la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_0^8 \left(1 + \frac{x}{8}\right)^7 dx.$$

Esercizio 3. Il *Partito analitico (PA)* si è presentato alle elezioni comunali del 2013 e del 2018 di Casanova del Morbasco, paese che conta ben 200 abitanti. Può succedere che il PA abbia preso nel 2018 più voti rispetto al 2013, e contemporaneamente la percentuale di voti che ha ricevuto (rispetto al totale dei votanti) sia più bassa nel 2018 rispetto alla percentuale del 2013? Se pensi che sia possibile fai un esempio di distribuzione di voti che realizzi questa situazione; se pensi che non sia possibile spiega perché.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio di:

- (i) una funzione f_1 definita e continua su tutto \mathbb{R} avente esattamente due punti di massimo.
- (ii) una funzione f_2 definita su tutto \mathbb{R} tale che la sua immagine sia l'intervallo $(0, 1]$.
- (iii) una funzione $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che l'equazione $[f_3(x)]^2 = 1$ sia soddisfatta se e soltanto se x è un numero intero pari.

Esercizio 5. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e per quei valori trova le soluzioni) il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + (k - 1)y + z = 1 , \\ (2k - 3)x + y + (k - 1)z = 3 - k , \\ 2x + ky + kz = k , \\ kx + 2y + (2k - 2)z = 4 - k . \end{cases}$$

[*Suggerimento:* quando trovi un polinomio di secondo grado decomponilo nel prodotto di due polinomi di primo grado.]

Esercizio 6. Risultati di epidemiologia ti indicano che popolazioni di stafilococchi si sviluppano in genere secondo il modello

$$S(t) = e^{at^2+bt+c},$$

dove a, b, c sono parametri del modello e $S(t)$ denota il numero di batteri stafilococchi presenti al tempo t . In un esperimento, la tua colonia di stafilococchi conta al tempo $t = 0$ un numero $S(0)$ di individui approssimabile con $\ln(S(0)) \approx 5$. Inoltre, nello stesso esperimento verifichi che per la tua colonia la funzione $S(t)$ soddisfa anche l'equazione differenziale

$$S'(t) = (2 - 2t)S(t).$$

- (1) Trova per quali valori di a, b, c il modello generale descrive lo sviluppo della popolazione di stafilococchi osservata durante il tuo esperimento.
- (2) Per tali valori di a, b e c studia la funzione S nella semiretta $[0, +\infty)$.
- (3) Trova in quale istante t_{\max} il tuo gruppo di stafilococchi conta il massimo numero di individui.