

ANNO ACCADEMICO 2014–15
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
QUINTO SCRITTO

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

12 febbraio 2016

Nome e cognome _____

Matricola _____

Corso di laurea _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola la derivata della funzione

$$f(t) = \arctan \sqrt{\frac{1}{1+t}}.$$

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin(x^2 + \pi) dx.$$

Esercizio 3. Esiste un $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema

$$\begin{cases} x + 4y = -2, \\ 2x + ky = -4, \end{cases}$$

ammette soluzione? Se pensi che la risposta sia affermativa, indica tutti i valori di k per cui il sistema ha soluzione, e descrivi le soluzioni; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio

- (i) di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente, con $f(0) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$;
- (ii) di una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pari, continua e derivabile su tutto \mathbb{R} , tale che la retta tangente al suo grafico in $x_0 = 1$ abbia equazione $y = 2x - 1$;
- (iii) di una funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su tutto \mathbb{R} , periodica di periodo π , e che abbia come insieme immagine l'intervallo $[-2\pi, 0]$.

Esercizio 5. Uno studio tossicologico suggerisce che la quantità Q di antidoto necessaria per contrastare l'effetto nocivo di una quantità t di tossina possa essere determinata dall'espressione

$$Q(t) = \log \left(\frac{2 + t^2}{t - 2} \right) .$$

- (i) Studia la funzione Q , anche per valori di t negativi.
- (ii) Per quali valori della quantità t di tossina ritieni che tale funzione possa realisticamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?
- (iii) Calcola

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Q(t)}{\log t} .$$

Esercizio 6. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ studia (cioè determina per quali valori del parametro il sistema ammette soluzione, e in tal caso trova le soluzioni) il sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + w = 2, \\ 3x + ay + 2z = 0, \\ 3x + y + 2z + (a - 1)w = 1. \end{cases}$$