

ANNO ACCADEMICO 2013–14
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
PRIMO SCRITTO — TESTO A
PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

18 giugno 2014

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Determina, motivando la risposta, se la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{(\log(1+x))^2}{x} & \text{per } x > 0, \\ 0 & \text{per } x = 0, \\ 1 - x^3 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = 0$.

Esercizio 2. Scrivi un'equazione del piano $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ ortogonale all'asse x e passante per il punto $A(2, 1, 3)$.

Esercizio 3. Calcola la derivata della seguente funzione:

$$f(t) = \frac{\tan(1+t^2)}{1-t^2}.$$

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio

- (i) di una funzione definita su tutto \mathbb{R} , periodica di periodo 3, e avente come insieme immagine l'intervallo $[-2, 1]$;
- (ii) di una funzione definita su tutto \mathbb{R} e discontinua in $x_0 = 2\pi$;
- (iii) di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, decrescente, con $f(0) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Esercizio 5. Effettuando uno studio idrogeologico sulle falde acquifere nella contea di Los Angeles, hai trovato che in assenza di interventi umani la quantità totale d'acqua Q contenuta nella falda di Santa Catilina, espressa in milioni di metri cubi, dipende dal tempo t , espresso in anni, secondo la seguente funzione:

$$Q(t) = e^{\frac{1-t}{t^2}}.$$

- (i) Studia la funzione Q , anche per tempi negativi, tralasciando lo studio del segno della derivata seconda.
- (ii) In assenza di interventi umani, la falda di Santa Catilina rischia di esaurirsi, cioè di rimanere senza acqua? (Motiva la risposta).
- (iii) Le necessità d'acqua della contea di Los Angeles portano a estrarre acqua dalla falda di Santa Catilina; l'intervento umano si somma ai fenomeni naturali che determinano la quantità d'acqua presente nella falda. Supponiamo che l'estrazione d'acqua dalla falda inizi al tempo 0. Se la quantità totale di acqua estratta dal tempo 0 al tempo t è data da $E(t) = t^2$, può succedere che la falda di Santa Catilina venga svuotata? Se sì, dopo quanto tempo?
- (iv) Supponendo invece che la portata (la variazione istantanea) dell'acqua estratta al tempo t sia data da $P(t) = 3t^2$, e che l'estrazione dell'acqua inizi al tempo 0, può succedere che la falda di Santa Catilina venga svuotata? Se sì, dopo quanto tempo? [*Attenzione:* questa domanda è diversa dalla domanda precedente.]

Esercizio 6. Una casa di moda produce tre versioni diverse di un modello di vestito: economico, prêt-à-porter, e d'alta moda. Ogni vestito per essere preparato richiede l'intervento dei reparti A , B e C . La versione economica richiede 5 ore di lavoro del reparto A , 2 ore del reparto B e 3 ore del reparto C . La versione prêt-à-porter richiede 7 ore di lavoro del reparto A , 4 ore del reparto B e 5 ore del reparto C . La versione d'alta moda richiede 7 ore di lavoro del reparto A , 3 ore del reparto B e 6 ore nel reparto C . La casa di moda riceve un ordine imprevisto che deve soddisfare attingendo al monte-ore straordinarie. Se i reparti A , B e C hanno un monte-ore straordinarie pari a 96, 45, e 67 ore rispettivamente, la casa di moda quanti capi di ciascuna versione può preparare sfruttando tutte le possibili ore straordinarie?