

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

TERZO SCRITTO

7 luglio 2009

Nome e cognome

Matricola

ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.

ISTRUZIONI: Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5 o “No non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non vi ène corretta).

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *In quanti modi diversi puoi scegliere, in un esperimento, 5 cavie da una colonia di 15?*

Esercizio 1.2. *Posto*

$$f(x) = \frac{\log_2(2x^2) - 1}{\log_2 x - 1},$$

determina il dominio di f e risolvi la disequazione $f(x) \geq 0$.

Esercizio 1.3. *Calcola l'integrale sull'intervallo $[0, 1]$ della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(\pi 2^x) - \sin(\pi x)}{2 + \cos(\pi \log_2(1 + x^2))} \right).$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. *Un test diagnostico per una certa malattia fornisce un risultato positivo nel 90% dei casi in cui la malattia è effettivamente presente, e nel 5% dei casi in cui la malattia non è presente. Inoltre, la probabilità che un individuo preso a caso nella popolazione sia malato è $1/200$.*

- (i) *Calcola la probabilità che il test risulti positivo su un individuo preso a caso nella popolazione.*
- (ii) *Calcola la probabilità che un individuo preso a caso nella popolazione sia effettivamente malato sapendo che il test ha dato un risultato positivo.*

Esercizio 2.2. *Dopo aver tolto dal forno un arrosto di vitello, ne misuri la temperatura ottenendo le seguenti coppie di dati: $(10, 180)$, $(12, 158.4)$ e $(15, 112.5)$, dove la coppia (t, T) indica che dopo t minuti l'arrosto ha una temperatura di T gradi centigradi. Le tue conoscenze di fisica (e di cucina) ti portano a supporre che la funzione che lega le due quantità sia quadratica.*

- (i) *Trova l'espressione esplicita della funzione quadratica il cui grafico passa per i dati.*
- (ii) *Per quale intervallo di tempi tale funzione può effettivamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?*

Esercizio 2.3. *Una popolazione di 200 organismi unicellulari è stata esposta a una terribile infezione, che provoca la morte dopo 10 minuti dal contagio. Uno studio epidemiologico ti dice che, supponendo che al tempo $t = 0$ solo un organismo sia infettato, il numero $N(t)$ di organismi infettati dipende dal tempo t (espresso in minuti) secondo la funzione*

$$N(t) = \frac{201}{1 + 200 \cdot 10^{-0.1t}}.$$

- (i) *Studia la funzione N (anche per tempi negativi).*
- (ii) *Quanto tempo impiega la popolazione a estinguersi completamente? [Suggerimento: ti può essere utile sapere che $\text{Log } 4 \simeq 0.6$.]*