Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Sesto scritto A.A. 2015/16 — 17 febbraio 2017

Nome e Cognome:

---

1) Considera l'insieme

$$M = \bigl\{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\} \bigm| x^1x^2 + x^3x^4 - (x^5)^2 = 0\bigr\} .$$

(i) Dimostra che M è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^5$.
(ii) Dimostra che M è un cono, nel senso che $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^*$ implica $tx \in M$. Usando questo fatto mostra che M ammette come retratto di deformazione liscio una varietà differenziabile compatta N di dimensione 3. [*Suggerimento:* diagonalizza la forma quadratica.]
(iii) Calcola i gruppi di coomologia di de Rham di M. (*Suggerimento:* puoi dare per noto il teorema di Künneth.)

2) Un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$ di rango r su una varietà M è detto *orientabile* se per ogni atlante di M che banalizza E è possibile scegliere le banalizzazioni in modo che le funzioni di transizione abbiano tutte determinante positivo. Dimostra che lo spazio totale di un fibrato orientabile su una varietà orientabile è orientabile come varietà.

3) Posto $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, indichiamo con g_0 la restrizione a M della metrica Euclidea di $\mathbb{R}^2$. Dato $\nu \in \mathbb{R}^*$, poniamo $f_\nu(t) = t^\nu$, e sia g_ν la metrica Riemanniana su M data da $g_\nu = f_\nu(r^2)g_0$, dove $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ e (x^1, x^2) sono le coordinate naturali di M.

(i) Calcola i simboli di Christoffel di g_ν.
(ii) Dato $v \in M$, trova una funzione $h_\nu: I_\nu \to \mathbb{R}^+$, dove I_ν è un opportuno intorno di 0, tale che $\sigma(t) = h_\nu(t)v$ sia una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco per g_ν con $\sigma(0) = v$. [*Suggerimento:* distingui i casi $\nu = -1$ e $\nu \neq -1$.]