Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Secondo scritto A.A. 2013/14 — 18 luglio 2014

Nome e Cognome:

---

1) Considera l'insieme

$$S = \{(x^1, \ldots, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid (\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - 2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\} ,$$

e sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione definita da

$$f(y^1, y^2, y^3, y^4) = ((y^1 + 2)\cos y^4, (y^1 + 2)\sin y^4, y^2, y^3) .$$

(i) Dimostra che S è una sottovarietà liscia compatta e 3-dimensionale di $\mathbb{R}^4$.
(ii) Dimostra che la restrizione di f a $\{(y^1, \ldots, y^4) \in \mathbb{R}^4 \mid y^1 \neq -2\}$ è un'immersione.
(iii) Dimostra che, se $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ è l'usuale sfera unitaria, allora $f(S^2 \times \mathbb{R}) = S$, e $f|_{S^2\times\mathbb{R}}\colon S^2 \times \mathbb{R} \to S$ è un'immersione.
(iv) Calcola i gruppi di coomologia di De Rham di S. [*Suggerimento:* puoi usare il teorema di Künneth.]

2) Una *distribuzione k-dimensionale* su una varietà M è un sottoinsieme $\mathcal{D} \subset TM$ del fibrato tangente tale che $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_pM$ sia un sottospazio k-dimensionale di T_pM per ogni $p \in M$. Diremo che una distribuzione k-dimensionale $\mathcal{D}$ è *liscia* se per ogni $p \in M$ esistono un intorno U di p e k campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(U)$ tali che $\mathcal{D}_q = \mathrm{Span}\big(X_1(q), \ldots, X_k(q)\big)$ per ogni $q \in U$.

Sia $\mathcal{D} \subset TM$ una distribuzione k-dimensionale su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{D}$ è liscia se e solo se per ogni $p \in M$ esistono un intorno U di p e $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(U)$ tali che

$$\forall q \in U \qquad \mathcal{D}_q = \mathrm{Ker}\,\omega^1_q \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\,\omega^{n-k}_q .$$

3) Dati una varietà Riemanniana (M, g), con connessione di Levi-Civita ∇, e un campo vettoriale $V \in \mathcal{T}(M)$, sia $\widetilde{\nabla}^V\colon \mathcal{T}(\Omega) \times \mathcal{T}(\Omega) \to \mathcal{T}(\Omega)$ l'applicazione così definita:

$$\widetilde{\nabla}^V_X Y = \nabla_X Y + g(X, Y)V .$$

(i) Dimostra che $\widetilde{\nabla}^V$ è una connessione con torsione nulla.
(ii) Esprimi i simboli di Christoffel di $\widetilde{\nabla}^V$ in termini dei simboli di Christoffel di ∇ e delle coordinate locali del campo V.

Supponiamo ora che $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \subset \mathbb{R}^2$ con la metrica Euclidea standard. Nel seguito di questo esercizio identificheremo sistematicamente TM con $M \times \mathbb{R}^2$, e quindi $\mathcal{T}(M)$ con $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$.

(iii) Determina un campo $V \in \mathcal{T}(M)$ tale che tutte le curve $\sigma\colon \mathbb{R} \to M$ della forma

$$\sigma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

siano geodetiche per $\widetilde{\nabla}^V$.
(iv) Sia $V \in \mathcal{T}(M)$ il campo trovato nel punto precedente, e $p \in M$ con $\|p\| = 1$. Determina, se esiste, una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo contenente 0, tale che la curva $\gamma\colon I \to M$ data da $\gamma(t) = f(t)p$ sia una geodetica massimale per $\widetilde{\nabla}^V$ con $\gamma(0) = \gamma'(0) = p$. [*Suggerimento:* ricorda che $(\log f')' = f''/f'$.]