Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Primo scritto A.A. 2010/11 — 9 gennaio 2012

Nome e Cognome:

---

1) Sia M una varietà, $\varepsilon\colon M\to\mathbb{R}^+$ una funzione continua sempre positiva, e $f\colon M\to\mathbb{R}^k$ un'applicazione continua. Dimostra che esiste un'applicazione differenziabile $F\colon M\to\mathbb{R}^k$ tale che $\|F(q)-f(q)\|<\varepsilon(q)$ per ogni $q\in M$. [*Suggerimento:* comincia col dimostrare che ogni $p\in M$ ha un intorno $U_p\subseteq M$ tale che $\|f(q)-f(p)\|<\varepsilon(q)$ per ogni $q\in U_p$.]

2) Indicata con $S\subset\mathbb{R}^3$ la circonferenza unitaria nel piano $\{z=0\}$, cioè

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=1, z=0\}\,,$$

calcola la coomologia di de Rham di $\mathbb{R}^3\setminus S$. [*Suggerimento:* non è un prodotto, ma...]

3) Sia (M,g) una varietà Riemanniana orientabile, con forma di volume Riemanniano ν_g, e sia $S\subset M$ una ipersuperficie. Un *campo di versori normali lungo* S è un'applicazione differenziabile $N\colon S\to TM$ tale che $N(p)$ è, per ogni $p\in S$, un versore in T_pM ortogonale a T_pS.

(i) Dimostra che se esiste un campo di versori normali N lungo S allora S è orientabile, e scrivi la forma di volume Riemanniano di S (rispetto alla metrica indotta) usando ν_g ed N.

(ii) Dimostra che se S è orientabile allora esiste un campo di versori normali lungo S.

[*Suggerimento:* se N è un campo di vettori lungo S e ν è una n-forma su M, allora $N\lrcorner\,\nu=\nu|_S(N,\cdot)$ è una $(n-1)$-forma su S.]