Geometria e Topologia Differenziale

Terzo scritto — 15 settembre 2005

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Dimostra che non esistono curve biregolari in $\mathbb{R}^3$ le cui rette binormali passino tutte per uno stesso punto.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $y^3 = x + y^2 z$.

(i) Dimostra che $K \leq 0$ sempre, e che $K = 0$ soltanto per i punti di S con $y = 0$.
(ii) Dimostra che $(0, 0, 0)$ è un punto planare di S.
(iii) Determina le direzioni principali nei punti di S con curvatura Gaussiana nulla.
(iv) Dimostra che le curve

$$\gamma_1(t) = (x_0 - y_0^2 t, y_0, z_0 + t) \qquad \text{e} \qquad \gamma_2(t) = (e^{3t} x_0, e^{2t} y_0, e^{2t} y_0 + (z_0 - y_0) e^{-t})$$

sono curve asintotiche passanti per $(x_0, y_0, z_0) \in S$ quali che siano x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$.

3) Sia S una superficie compatta orientabile con curvatura Gaussiana strettamente positiva, e supponiamo che la mappa di Gauss $N \colon S \to S^2$ sia un diffeomorfismo (*Nota:* se $K > 0$ si può dimostrare che la mappa di Gauss è sempre un diffeomorfismo con la sfera, ma non è questo il punto dell'esercizio). Dimostra che se σ è una geodetica semplice chiusa in S allora $N \circ \sigma$ divide S^2 in due parti di ugual area. (*Suggerimento:* la formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli dice che, sotto queste ipotesi, per ogni regione regolare $R \subseteq S$ si ha $\int_R K \, d\nu = \text{Area}\big(N(R)\big)$.)