Geometria e Topologia Differenziale

Secondo scritto — 20 febbraio 2007

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ mai nulla e riferimento di Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, e siano v_0, $p_0 \in \mathbb{R}^3$ fissati con $\|v_0\| = 1$. Definiamo $\sigma_0\colon I \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\sigma_0(s) = \sigma(s) - p_0 - \big\langle \sigma(s) - p_0, v_0 \big\rangle v_0 .$$

(i) Trova un piano che contiene σ_0.
(ii) Dimostra che $\sigma_0'(s) = O$ sse $v_0 = \pm \mathbf{t}(s)$.
(iii) Supponendo che σ_0 sia una curva regolare, calcolane la curvatura.
(*Suggerimento:* scrivi $v_0 = \langle \mathbf{t}, v_0 \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}, v_0 \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{b}, v_0 \rangle \mathbf{b}$.)
(iv) Supponendo che σ_0 sia una curva regolare con curvatura mai nulla, e indicando con ℓ la retta passante per p_0 parallela a v_0, dimostra che il sostegno di σ è contenuto nel cilindro circolare retto di asse ℓ e raggio $r > 0$ se e solo se

$$\kappa \, \frac{|\langle \mathbf{b}, v_0 \rangle|}{\big(1 - \langle \mathbf{t}, v_0 \rangle^2\big)^{3/2}} \equiv \frac{1}{r} .$$

2) Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \cosh z)^2 + y^2 = \cosh^2 z\} ,$$

e sia $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione così definita:

$$\varphi(u, v) = \big((1 + \cos v) \cosh u, \sin v \cosh u, u\big).$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, siano infine $\gamma_a, \sigma_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ le curve definite da $\gamma_a(t) = \varphi(a, t)$ e $\sigma_a(t) = \varphi(t, a)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, e che opportune restrizioni di φ forniscono un atlante per S.
(ii) Calcola i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto a φ.
(iii) Calcola la curvatura di Gauss di S, dimostra che essa è ovunque non positiva, e determina il luogo dei punti ove essa si annulla.
(iv) Determina i valori reali di a per cui γ_a sia una geodetica (nota che γ_a è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco).
(v) Determina i valori reali di a per cui la riparametrizzazione di σ_a rispetto alla lunghezza d'arco sia una geodetica.

3) Sia S una superficie compatta orientabile con curvatura Gaussiana strettamente positiva, e supponiamo che la mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$ sia un diffeomorfismo (*Nota:* se $K > 0$ si può dimostrare che la mappa di Gauss è sempre un diffeomorfismo con la sfera, ma non è questo il punto dell'esercizio). Dimostra che se σ è una geodetica semplice chiusa in S allora $N \circ \sigma$ divide S^2 in due parti di ugual area. (*Suggerimento:* la formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli dice che, sotto queste ipotesi, per ogni regione regolare $R \subseteq S$ si ha $\int_R K \, d\nu = \mathrm{Area}\big(N(R)\big)$.)