Geometria e Topologia Differenziale

Primo scritto A.A. 05/06 (Quinto scritto A.A. 04/05) — 17 gennaio 2006

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e supponiamo esista un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ equidistante da tutte le rette tangenti al sostegno di σ. Dimostra che σ è un segmento o un arco di circonferenza.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y > 0,\ z = \log\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\}.$$

(i) Dimostra che S è una superficie regolare.

(ii) Sia $p = (1, 1, 0) \in S$. Scrivi l'equazione di T_pS come sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e calcola la curvatura gaussiana e la curvatura media di S in p.

(iii) Sia $\sigma\colon (0, +\infty) \to S$ data da $\sigma(t) = (t, t, \log t)$. Dimostra che σ è una linea di curvatura per S.

3) Sia T il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza C di equazione $(x-3)^2 + z^2 = 1$ contenuta nel piano $y = 0$. Sia $\theta \in (0, \pi)$ e consideriamo il semipiano

$$H_\theta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \sin\theta = y \cos\theta, y > 0\}.$$

Poniamo $C_\theta = T \cap H_\theta$. Le due curve C e C_θ dividono il toro in due regioni regolari R_1 e R_2. Calcola l'integrale della curvatura gaussiana di T su R_1 e su R_2.