Geometria e Topologia Differenziale

Quinto scritto — 10 settembre 2009

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la curva

$$\sigma(t) = (2\sqrt{2}t - \sin t, 2\sqrt{2}\sin t + t, 3\cos t)\ .$$

(i) Calcola curvatura e torsione di σ.

(ii) Trova, se esistono, una matrice ortogonale $A \in O(3)$ e un'elica $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ della forma

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

tali che $A\sigma(t) = \gamma(t)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$.

2) Siano S, $T\subset\mathbb{R}^3$ le superfici date da

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; |z| < \pi/2,\ (x^2+y^2)\cos(z) = 1\right\}\ ,$$
$$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2-z = 4\right\}\ ,$$

e poniamo $C = S\cap T$.

(i) Dimostra che S e' regolare.

(ii) Dimostra che C è il supporto di due curve regolari parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco: σ_1 con supporto contenuto nel nel semispazio $z>0$, e σ_2 con supporto contenuto nel semispazio $z<0$.

(iii) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione delimitata da σ_1 e σ_2.

3) Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ data nell'esercizio precedente, e sia $V\subset\mathbb{R}^3$ la superficie data da

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}\ .$$

(i) Dimostra che S è diffeomorfa a V, costruendo un diffeomorfismo esplicito.

(ii) Dimostra che il diffeomorfismo costruito non è una isometria.

(iii) Dimostra che non esistono isometrie fra S e V.