ANNO ACCADEMICO 2017–18

SCIENZE GEOLOGICHE E *SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI*

MATEMATICA

TERZO COMPITINO — TESTO B

PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

28 Maggio 2018

Nome e cognome____

Matricola____

Corso di laurea____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo "0.5" o "No" non saranno valutate anche se giuste.

Il compitino consiste di due parti. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). Una volta superata la prima parte, perché il compitino sia sufficiente occorre che ne sia stato risolto correttamente almeno metà, comprendendo sia la prima sia la seconda parte.

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Trova due numeri reali a e b tali che la funzione $h(x) = \sin(a \cdot x + b)$ abbia un punto di minimo per $x = 0$ ed un punto di massimo per $x = 1$.

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_1^e x \, \ln(x) \, dx.$$

Esercizio 3. Trova il valore della costante $k > 0$ tale che la funzione e^{kt^2} soddisfi l'equazione differenziale:

$$y'' = 4y(1 + 4t^2).$$

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Una popolazione di batteri si evolve secondo la legge

$$B(t) = \frac{50\, e^{t+2}}{t^2 + 4t + 3},$$

dove $B(t)$ è il numero di batteri presenti al tempo t (misurato in giorni).

a) Studia la funzione B arrivando a disegnarne un grafico approssimato considerando anche valori di $t < 0$.

b) In quale istante $t^* > 0$ la popolazione raggiunge il numero minimo di individui?

Esercizio 5. Due serbatoi identici, s_1 ed s_2, inizialmente vuoti (tempo $t = 0$) vengono riempiti da due rubinetti diversi con portata variabile nel tempo. Al tempo $t \in [0, 10]$, dal rubinetto del serbatoio s_1 escono $p_1(t) = 10\,t - t^2$ metri cubi di acqua al minuto, mentre dal rubinetto del serbatoio s_2 escono $p_2(t) = 10\,t^2 - t^3$ metri cubi di acqua al minuto. Dopo 10 minuti, i rubinetti vengono chiusi, cioè $p_1(10) = p_2(10) = 0$. Determina:

a) quanti litri di acqua sono presenti nei due serbatoi alla chiusura dei rubinetti;

b) dopo quanti minuti il livello dell'acqua nel serbatoio s_2 supera il livello dell'acqua nel serbatoio s_1. [*Suggerimento:* considera che l'equazione $3x^2 - 44x + 60 = 0$ ha due soluzioni reali $x_1 \approx 1.5$ e $x_2 \approx 13.1$].

Esercizio 6. Una popolazione di conigli consiste di 1000 individui al tempo $t = 0$. A causa di un' epidemia, la popolazione decresce secondo l'equazione

$$N' = -3t^2 \cdot N,$$

dove $N(t)$ indica il numero di individui presenti al tempo t (misurato in anni); in particolare, $N(0) = 1000$.

a) Risolvi l'equazione differenziale data trovando una espressione esplicita per $N(t)$.
b) Trova l'istante t^* in cui la popolazione si è dimezzata.