ANNO ACCADEMICO 2014–15

SCIENZE GEOLOGICHE E *SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI*

MATEMATICA

SECONDO COMPITINO — TESTO B

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

17 aprile 2015

Nome e cognome____

Matricola____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo "0.5" o "No" non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola la derivata della funzione $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(y) = \log\left(\frac{3y^2 - 2y + 1}{6y^2 + 2}\right) .$$

Esercizio 2. Calcola il valore del seguente integrale definito:

$$\int_{-2}^{1} 3t^2 + 2e^t - 4t \, dt .$$

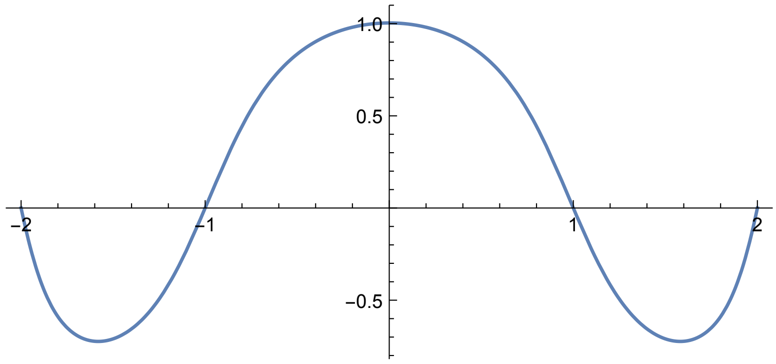
Esercizio 3. Stabilisci (giustificando la risposta) quale delle funzioni seguenti può avere un grafico come quello in figura:

(a) $\frac{1}{4}(-x^5 + x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4)$;

(b) $\log\left(\frac{1}{4}(x^4 - 5x^2 + 4)\right)$;

(c) $\frac{1}{16}(x^4 - 5x^2 + 4)^2$;

(d) $\arctan\left(\frac{\pi}{8}(x^4 - 5x^2 + 4)\right)$.



SECONDA PARTE

Esercizio 4. Il metodo di datazione al carbonio presuppone che, in prima approssimazione, la relazione fra l'età t in anni di un oggetto di origine organica e il rapporto R fra il numero di isotopi di carbonio 14 e il numero di isotopi di carbonio 12 attualmente presenti nell'oggetto sia della forma

$$R = R_0 10^{-at} , \tag{1}$$

dove R_0 indica il rapporto fra il numero di isotopi di carbonio 14 e il numero di isotopi di carbonio 12 presenti nell'atmosfera e $a > 0$ è un'opportuna costante legata alla emivita del carbonio 14. [In realtà questa relazione si basa sull'ipotesi troppo semplicistica che il rapporto R_0 sia costante nel tempo. I metodi contemporanei di datazione al carbonio tengono invece conto della variabilità nel tempo di R_0, con tecniche non rilevanti per questo esercizio.]

(i) Applicando il logaritmo in base 10 a entrambi i membri di (1) si ottiene una relazione fra t e $\log_{10} R$ della forma

$$t = q + m \log_{10} R , \tag{2}$$

dove $\log_{10}$ indica il logaritmo in base 10. Trova l'espressione di q e m in termini di a e $\log_{10} R_0$.

(ii) Nella tabella sottostante troverai i valori dell'età t e di $\log_{10} R$ misurati per alcuni oggetti. Usando il metodo dei minimi quadrati, determina i valori di q e m per cui la relazione (2) meglio interpola i dati.

(iii) L'approssimazione data dalla retta (2) così calcolata è buona?

(iv) Usando i valori che hai trovato, calcola l'età presunta di un oggetto con $R = 10^{-2}$.

(v) Tenendo presente che il valore di R può essere determinato con una precisione di al massimo tre cifre decimali, qual è l'età massima che può essere stimata con questo metodo?

Dati	$\log_{10} R$	t	$(\log_{10} R)^2$	$t \log_{10} R$	t^2
	-2.225	11700	4.950625	-26032.5	136890000
	-1.913	5900	3.659569	-11286.7	34810000
	-1.716	2000	2.944656	-3432	4000000
	-2.034	8300	4.137156	-16882.2	68890000
	-2.421	15200	5.861241	-36799.2	231040000
Medie	*-2.0618*	*8620*	*4.310*	*-18886.52*	*95126000*

[*Suggerimento:* potrebbe servirti qualcuno dei seguenti conti: $2.0618 \cdot 8620 \simeq 17772.72$; $8620^2 = 74304400$; $18678.5 \cdot 2.0618 \simeq 38511.4$; $1113.8/0.059 \simeq 18678.5$; $2.0618^2 \simeq 4.251$; $\sqrt{20821600} \simeq 4563.07$; $\sqrt{0.059} \simeq 0.244$; $\sqrt{18886.52} \simeq 137.428$; $18678.5 \cdot 8620 \simeq 161008967$; $\sqrt{95126000} \simeq 9753.256$; $1113.8/1114.27 \simeq 0.9996$; $\sqrt{2.0618} \simeq 1.4359$; $8620 \cdot 4.310 \simeq 1999.7$; $3 \cdot 18678.5 \simeq 56035.5$; $0.244 \cdot 4563.07 \simeq 1114.27$; $2.0618/8620 \simeq 0.0002$; $\sqrt{4.310} \simeq 2.076$; $8620/2.0618 \simeq 4180.81$; $1113.8/4563.07 \simeq 0.244$; $2 \cdot 18678.5 \simeq 37357$.]

Esercizio 5. Una ditta dolciaria vuole produrre una confezione per gelato formata da un cono circolare retto di altezza e raggio di base entrambi uguali a r su cui si appoggia un cilindro di altezza h e raggio di base r, chiuso in alto da un disco piatto di raggio r. Questa confezione deve contenere un volume V_0 fissato. Mentre la produzione del coperchio e della superficie laterale del cilindro è standard, la produzione del cono richiede tecniche più sofisticate per garantirne la corretta curvatura. In particolare, mentre produrre il coperchio o la superficie laterale del cilindro ha un costo per decimetro quadro pari a c_0 centesimi di euro, produrre la superficie del cono ha un costo per decimetro quadro pari a kc_0 centesimi di euro, con $k > 1$.

(i) Supponendo $k = 4\sqrt{2}/3$ e $V_0 = 3$ m^3, trova i valori di altezza h e raggio r che permettono di realizzare la confezione al costo minimo.

(ii) Trova qual è il più grande valore di r per cui è possibile costruire una confezione di questa forma di volume $V_0 = 3$ m^3.

(iii) Rispondi alla domanda (i) per $k > 1$ e $V_0 > 0$ qualsiasi.

(iv) Rispondi alla domanda (ii) per $V_0 > 0$ qualsiasi.

[*Suggerimento:* un cono circolare retto di altezza e raggio di base pari a r ha volume $\frac{1}{3}\pi r^3$ e superficie laterale $\sqrt{2}\pi r^2$. Un cilindro di altezza h e raggio di base r ha volume $\pi r^2 h$ e superficie laterale $2\pi rh$.]

Esercizio 6. Uno studio approfondito su rocce ferromagnetiche estratte da un cratere meteoritico della Siberia Orientale ha mostrato che la relazione fra il potenziale elettrico x misurato in chiloVolt applicato a un esemplare di roccia e la temperatura $T(x)$ in gradi centigradi dell'esemplare è data dalla formula

$$T(x) = 20 + \log \frac{1+x^2}{1-x} \ ,$$

dove 20 rappresenta la temperatura ambiente.

(i) Studia questa funzione, anche per $x < 0$. [*Suggerimento:* il polinomio $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ ha una sola radice $x_0 \simeq -1.29676$ nella semiretta $(-\infty, 1)$.]

(ii) Sapendo che la temperatura di fusione di questa roccia è

$$T_0 = 20 + \log(\sqrt{233} - 2) \ ,$$

determina che potenziale elettrico devi applicare per fonderla.