Geometria e Topologia Differenziale

Primo compitino A.A. 2006/07

Da consegnare il 6 novembre 2006

Nome e Cognome:

---

1) Considera la curva $\sigma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = t \cdot \big(\sqrt{3}\cos(\log t) - 1, \cos(\log t) + \sqrt{3}, 2\sin(\log t)\big).$$

(i) Dimostra che σ è una curva biregolare parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, e determina il riferimento di Frenet.
(ii) Calcola curvatura e torsione di σ, e osserva che $\kappa(t) = -\sqrt{2}\tau(t)$ per ogni $t \in (0,\infty)$.
(iii) Determina un vettore non nullo v tale che $\langle v, \mathbf{t}(t)\rangle$ sia costante.

2) Sia $\sigma\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ la curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma(0) = 0$, $\mathbf{t}(0) = (1/\sqrt{2}, 0, 1\sqrt{2})$, $\mathbf{n}(0) = (0,1,0)$, e $\kappa(s) = -\tau(s) = (2-2s^2)^{-1/2}$ per ogni $s \in (-1,1)$.
(i) Determina un vettore non nullo v tale che $\langle v, \mathbf{t}(s)\rangle$ sia costante.
(ii) Determina σ.

3) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\sigma_\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma_\varepsilon(s) = \sigma(s) + \varepsilon\mathbf{t}(s)$, dove $\mathbf{t}$ è il versore tangente di σ.
(i) Dimostra che σ_ε è una curva regolare.
(ii) Supponi che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostra che σ_ε è biregolare, e calcolane la curvatura in funzione della curvatura κ e torsione τ di σ.
(iii) Supponi che esista una costante $0 < c < 1/\varepsilon$ tale che

$$\kappa(s) = c(e^{2s/\varepsilon} - c^2\varepsilon^2)^{-1/2}.$$

Dimostra che il versore normale di σ_ε in $\sigma_\varepsilon(s)$ è ortogonale al versore normale di σ in $\sigma(s)$ per ogni $s \in I$.

4) Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe C^1 a tratti con sostegno contenuto in una circonferenza di centro $p = (x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$. Dimostra che

$$\int_a^b (\sigma_1 - x_1^o)\sigma_2'\,dt = -\int_a^b (\sigma_2 - x_2^o)\sigma_1'\,dt = \pi r^2 \iota_{p_0}(\gamma).$$