# Geometria e Topologia Differenziale

Primo compitino A.A. 2004/05 — 18 marzo 2005

Nome e Cognome:

---

**1)** Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e $\mathbf{t}\colon I \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la curva dei vettori tangenti. Scelto $s_0 \in I$, sia $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ l'angolo di rotazione di $\sigma$ (cioè il sollevamento di $\mathbf{t}$) tale che $\theta(s_0) \in (-\pi, \pi]$. Dimostra che:

(i) la curvatura orientata $\tilde{\kappa}$ di $\sigma$ è data da $d\theta/ds$;
(ii) se $\tilde{k}$ è sempre positiva allora $\theta$ è, a meno di traslazioni, la lunghezza d'arco della curva $\mathbf{t}$;
(iii) il versore tangente alla curva $\mathbf{t}$ è il versore normale $\mathbf{n}$ alla curva $\sigma$;
(iv) la curvatura orientata della curva $\mathbf{t}$ è identicamente $+1$.

**2)** Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0, \\ (0, 0, 0) & \text{se } t = 0, \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dimostra che

(i) $\sigma$ è una curva regolare di classe $C^\infty$;
(ii) la curvatura $\kappa(t)$ di $\sigma$ è diversa da zero se $t \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$, mentre $\kappa(0) = 0$;
(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathbf{n}(t) \neq \lim\limits_{t\to 0^-} \mathbf{n}(t)$, cioè il versore normale $\mathbf{n}$ è discontinuo in 0.

**3)** Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura $\kappa$ e torsione $\tau$ mai nulle. Per ogni $a \in C^\infty(I)$ sia $\sigma_a = \sigma + a\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n}$ è il versore normale a $\sigma$.

(i) Dimostra che $\sigma_a$ è sempre una curva regolare.
(ii) Supponendo $a$ costante, trova condizioni su $\kappa$ e $\tau$ che assicurino che $\sigma_a$ è biregolare, e verifica che sono soddisfatte per $a \leq 0$.

Supponiamo d'ora in poi che $\sigma_a$ sia biregolare.

(iii) Indichiamo con $\mathbf{n}_a$ il versore normale a $\sigma_a$. Dimostra che se si ha $\mathbf{n}_a(s) = \pm\mathbf{n}(s)$ per ogni $s \in I$ allora la funzione $a$ è costante.
(iv) Supponiamo che si abbia $\mathbf{n}_a(s) = \pm\mathbf{n}(s)$ per ogni $s \in I$. Dimostra che l'angolo $\theta$ fra $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}_a$ è costante, dove $\mathbf{t}_a$ è il versore tangente a $\sigma_a$.
(v) Dimostra che esiste una costante $a \neq 0$ tale si abbia $\mathbf{n}_a(s) = \pm\mathbf{n}(s)$ per ogni $s \in I$ se e solo se $a\kappa + a(\cot\theta)\tau \equiv 1$, per opportuni $a \in \mathbb{R}^*$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

**4)** Dimostra che l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^3 = 1\}$ è una superficie, e trovane un atlante.