Geometria e Topologia Differenziale

Primo compitino (*da svolgere a casa*) — 22 marzo 2004

Nome e Cognome:

A) Sia $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che $\kappa(s) > 0$ per ogni s appartenente all'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Scelto $s_0 \in I$, definiamo $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ ponendo $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(t)\,dt$. Dati a, $b \in \mathbb{R}$, sia infine $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\sigma(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos\theta(t)\,dt + a, \int_{s_0}^s \sin\theta(t)\,dt + b \right).$$

Dimostra che σ è una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ e tale che $\sigma(s_0) = (a, b)$.

B) Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma(t) = (t, e^t, t).$$

(i) Verifica che σ è una curva biregolare piana.

(ii) Dimostra che le rette tangenti a due punti distinti del sostegno di σ non sono mai parallele.

(iii) Dato $h \in \mathbb{R}$, sia $\tau_h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\tau_h(t) = \left(\frac{t - \sqrt{3}e^t}{2}, \frac{\sqrt{3}t + he^t}{2}, t \right).$$

Determina per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ le curve σ e τ_h hanno la stessa torsione (nel senso che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la torsione di σ in t è uguale alla torsione di τ_h in t).

(iv) Decidi, senza calcolare esplicitamente la curvatura, se esistono dei valori di h per cui σ e τ_h hanno la stessa curvatura.

(v) Determina (calcolando la curvatura se necessario) tutti i valori di h per cui σ e τ_h hanno la stessa curvatura.

C) (i) Trova la curva piana regolare $\sigma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma(\sqrt{2}) = (1, 0)$, $\mathbf{t}(\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e con curvatura $\kappa(s) = 1/s$.

(ii) Trova la curva $\sigma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma(2) = (1, 0, \sqrt{2})$, $\mathbf{t}(2) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, e con curvatura $\kappa(s) = 1/(2s)$ e torsione $\tau(s) = 1/(2s)$.

D) Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare piana parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura orientata $\tilde{\kappa}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e versore tangente $\mathbf{t}\colon \mathbb{R} \to S^1$. Sia $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una determinazione dell'angolo fra $\mathbf{t}$ e l'asse x, cioè un sollevamento di $\mathbf{t}$.

(i) Dimostra che $\theta(s) = \theta(0) + \int_0^s \tilde{\kappa}(t)\,dt$.

(ii) Sia $s_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{\kappa}(s_0) > 0$. Dimostra che esiste $\varepsilon > 0$ tale che il sostegno di $\sigma|_{(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)}$ sia contenuto in uno solo dei due semipiani determinati dalla retta tangente a σ in $\sigma(s_0)$.

Supponiamo d'ora in poi che $\tilde{\kappa}(s) > 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, che σ sia semplice, e che

$$\lim_{s \to \pm\infty} \|\sigma(s)\| = +\infty,$$

cioè che la curva si estenda all'infinito in entrambe le direzioni. Voglio farti dimostrare che la *curvatura totale*

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\kappa}(s)\,ds$$

di σ è minore o uguale a π. Procedi per assurdo, supponendo $K > \pi$ e dimostrando le seguenti cose:

(iii) Posto $p = \sigma(0)$, dimostra che esiste un punto $q = \sigma(s_0)$, con $s_0 > 0$, tale che le rette tangenti T_p a σ in p e T_q a σ in q siano parallele, mentre nessuna retta tangente a σ in $\sigma(s)$ è parallela a T_p per $s \in (0, s_0)$.

(iv) Dimostra che esiste $s_1 > s_0$ tale che σ interseca T_p in $r_1 = \sigma(s_1)$.

(v) Dimostra che esiste un $s_2 < 0$ tale che σ interseca T_p in un punto $r_2 = \sigma(s_2)$ posto fra p ed r_1.

(vi) Sia τ una curva chiusa regolare semplice con curvatura orientata sempre positiva ottenuta completando l'arco $\sigma|_{[s_2, s_1]}$ con una curva congiungente r_1 ed r_2 il cui sostegno sia esterno alla striscia delimitata da T_p e T_q. Dimostra che l'indice di rotazione di τ dev'essere almeno 2, e questo contraddice il teorema delle tangenti di Hopf.