8

Equazioni differenziali

8.1 Introduzione

In molti casi c'è una stretta relazione fra una quantità e il modo in cui varia; la variazione (la derivata) dipende dalla quantità (la funzione).

Esempio 8.1 Considera una colonia di cellule che si riproducono per scissione. A ogni riproduzione, l'aumento del numero di cellule (il numero di cellule nuove) è uguale al numero di cellule vecchie; maggiore è il numero di cellule presenti nella colonia, maggiore è l'aumento (almeno finché non intervengono fattori che limitano questo aumento; ne riparliamo dopo).

Esempio 8.2 In un materiale radioattivo, il numero di atomi che decadono è proporzionale al numero di atomi radioattivi presenti; quindi la variazione del numero di atomi radioattivi (data dal numero di atomi che decadono) è proporzionale al numero totale di atomi radioattivi.

Quello che succede di solito è che la teoria biologica (o chimica, fisica, eccetera) suggerisce quale relazione deve sussistere fra la quantità studiata e la sua variazione; e quindi si pone il problema di *trovare* l'espressione di questa quantità conoscendo soltanto la relazione e i dati iniziali. Dobbiamo quindi risolvere un'equazione in cui *l'incognita non è un numero, ma una funzione.* Le equazioni con incognita una funzione si chiamano *equazioni funzionali;* se nell'equazione compaiono oltre alla funzione anche delle sue derivate (le variazioni della funzione) allora si parla di *equazione differenziale.*

Vediamo alcuni esempi di equazioni differenziali prima di introdurre un po' di terminologia generale.

Osservazione 8.1 Quando si studiano le equazioni differenziali spesso si indica con y la funzione incognita, e con t o x la variabile da cui dipende la funzione y.

Esempio 8.3 L'equazione differenziale più semplice in assoluto è l'equazione $y'(t) = f(t)$ o, come scriveremo spesso,

$$y' = f \ , \tag{8.1}$$

dove f è una funzione nota. Il significato di (8.1) è che stiamo cercando una funzione y la cui derivata sia la funzione nota f; e nel Capitolo 6 abbiamo visto che tutte le soluzioni sono della forma

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx + C \ ,$$

dove t_0 è un qualsiasi punto del dominio di f, e $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Osservazione 8.2 Questo esempio già rivela tre caratteristiche generali delle equazioni differenziali. La prima è che, in generale, *un'equazione differenziale può ammettere infinite soluzioni;* per determinare univocamente una soluzione, *bisogna imporre condizioni ulteriori.* L'equazione differenziale (8.1) ammette infinite soluzioni, una per ogni valore della costante arbitraria C. Ma se noi fissiamo una condizione ulteriore, per esempio quanto deve valere la soluzione che nel punto t_0, allora troviamo un'unica soluzione che soddisfa questa condizione aggiuntiva. Infatti, l'unica soluzione che nel punto t_0 vale y_0 è

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx + y_0 \ .$$

La seconda caratteristica è che il dominio di definizione della soluzione $y(t)$ può essere diverso dal dominio di definizione di tutti i termini presenti nell'equazione. A seconda dei casi, può essere più grande, più piccolo o uguale. La Curiosità 8.1 mostrerà un esempio in cui il dominio delle soluzioni sarà più grande del dominio dell'equazione; l'Esempio 8.4 un caso in cui il dominio sarà uguale; e l'Osservazione 8.13 un caso in cui il dominio sarà strettamente più piccolo. Il punto è che trovare il dominio delle soluzioni di un'equazione differenziale fa parte del lavoro che dobbiamo fare per risolvere l'equazione.

La terza caratteristica è che, come per gli integrali, *la maggior parte delle equazioni differenziali non hanno soluzioni esprimibili tramite funzioni elementari;* in altre parole, la maggior parte delle equazioni differenziali non si risolvono esplicitamente. Per questo motivo sono state sviluppate molte tecniche per effettuare uno studio qualitativo delle soluzioni di equazioni differenziali; ma sono tecniche ben al di là di quanto possiamo trattare qui. In questo capitolo ci limiteremo a studiare alcuni esempi di equazioni differenziali risolvibili esplicitamente.

Curiosità 8.1 Prendiamo l'equazione (8.1) con $f(t) = |t|^{-1/2}$. La funzione f è definita su $\mathbb{R}^*$ (non è definita nell'origine), per cui l'equazione è definita solo fuori dall'origine. Scegliendo $t_0 > 0$ troviamo che le soluzioni per $t > 0$ sono date da

$$\forall t > 0 \qquad y(t) = \int_{t_0}^{t} x^{-1/2}\,dx + C = 2\sqrt{t} + C \ .$$

Analogamente, scegliendo $t_0 < 0$ troviamo che le soluzioni per $t < 0$ sono date da

$$\forall t < 0 \qquad\qquad y(t) = \int_{t_0}^{t} (-x)^{-1/2}\, dx + C = -2\sqrt{-t} + C\ .$$

Ma quindi le funzioni $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma

$$y(t) = \begin{cases} 2\sqrt{t} + C & \text{se } t \geq 0\ , \\ -2\sqrt{-t} + C & \text{se } t \leq 0\ , \end{cases}$$

sono soluzioni di (8.1) definite su *tutto* l'asse reale, cioé su un dominio più grande del dominio dell'equazione. Va però detto che quando ciò accade siamo sì contenti, ma di solito non è molto importante, in quanto di solito siamo interessati solo a ciò che accade nel dominio dell'equazione, e ai problemi che si possono verificare se il dominio della soluzione è più piccolo del dominio dell'equazione.

Esempio 8.4 Negli Esempi 8.1 e 8.2 abbiamo considerato casi in cui la variazione y' della quantità y è proporzionale alla quantità stessa. L'equazione differenziale che esprime questa relazione è

$$y' = ky\ , \tag{8.2}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è una costante di proporzionalità. Abbiamo già incontrato il caso particolare $k = 1$ di questa equazione nell'Osservazione 5.18. Applicando le tecniche viste lì non è difficile verificare che le soluzioni di (8.2) sono tutte e sole le funzioni della forma

$$y(t) = ce^{kt}\ ,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Infatti, se $y(t) = ce^{kt}$ si verifica subito che $y'(t) = kce^{kt} = ky(t)$, come voluto. Viceversa, supponiamo che y sia una soluzione di (8.2). Allora la regola di Leibniz ci dice che

$$\frac{d}{dt}\bigl(e^{-kt}y(t)\bigr) = -ke^{-kt}y(t) + e^{-kt}y'(t) = -ke^{-kt}y(t) + e^{-kt}ky(t) \equiv 0\ ,$$

per cui $e^{-kt}y(t) \equiv c$ e $y(t) = ce^{kt}$, come voluto.

In particolare, (8.2) ha infinite soluzioni, una per ogni valore della costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$. Se però richiediamo che la soluzione debba avere un valore specificato a priori in un punto allora possiamo determinare una soluzione unica. Per esempio, vogliamo trovare quali soluzioni valgono π in $t = 0$. Si deve avere

$$\pi = y(0) = ce^{k0} = c\ ;$$

quindi l'unica soluzione che in 0 vale π è $y(t) = \pi e^{kt}$. Infine, tutte le soluzioni di (8.2) sono definite su tutto l'asse reale, che è il dominio dell'equazione.

Esempio 8.5 Altri esempi di equazioni differenziali sono:

(i) $y' = ax + b$, con a, $b \in \mathbb{R}$;

(ii) $y' = ay^2 + by + c$, con a, b, $c \in \mathbb{R}$;
(iii) $y'' = -ky$, con $k \in \mathbb{R}$;
(iv) $y' = y^2 + \log t$, definita solo per $t > 0$;
(v) $\sin(y'') + ay^2 = e^y - \tan y$;
(vi) $y'' = 2ty$;

e non è difficile immaginarne infinite altre.

Vediamo di fissare un po' di terminologia. Un'*equazione differenziale ordinaria* è un'equazione differenziale della forma

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y, t) = 0 \ , \tag{8.3}$$

dove F è una funzione a valori reali dipendente da $n+2$ variabili reali, e l'incognita y è una funzione reale dipendente dalla variabile reale t. Il numero n è detto *ordine* dell'equazione; è il massimo ordine di derivata di y che compare nell'equazione. Per esempio, le equazioni (8.1), (8.2), e quelle dell'Esempio 8.5.(i), (ii) e (iv) sono del primo ordine, mentre le equazioni dell'Esempio 8.5.(iii), (v) e (vi) sono del secondo ordine.

Osservazione 8.3 Come si possono considerare sistemi di equazioni algebriche con più di una incognita, si possono anche considerare *sistemi di equazioni differenziali ordinarie,* composti da tante equazioni differenziali che legano fra loro le derivate di numerose funzioni incognite; vedremo un esempio nella Sezione 8.4. La teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie non è molto diversa dalla teoria di singole equazioni differenziali ordinarie; è però cruciale che tutte le funzioni incognite dipendano da una sola variabile, la stessa per tutte. Se invece le funzioni incognite dipendono da più di una variabile, entriamo nel regno delle *equazioni differenziali alle derivate parziali,* che hanno caratteristiche completamente diverse (e di cui non parleremo).

Se nell'equazione (8.3) la variabile indipendente t non compare esplicitamente, diremo che l'equazione è *autonoma;* altrimenti diremo che non è autonoma. Per esempio, le equazioni (8.2) e quelle dell'Esempio 8.5.(i), (ii), (iii) e (v) sono autonome; invece le equazioni (8.1) con f non costante e quelle dell'Esempio 8.5.(iv) e (vi) sono non autonome.

Equazioni differenziali della forma

$$y^{(n)} - G(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, t) = 0$$

sono dette *esplicite;* le altre sono dette *implicite.* Per esempio, le equazioni (8.1), (8.2), e quelle dell'Esempio 8.5.(i), (ii), (iii), (iv), e (vi) sono esplicite; quella dell'Esempio 8.5.(v) è implicita.

Osservazione 8.4 In generale, le soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie esplicite si comportano un po' meglio delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie implicite.

Equazioni differenziali della forma

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y + b(t) ,$$

con $a_{n-1}, \ldots, a_0$, b funzioni date, sono dette *lineari;* tutte le altre sono dette *non lineari.* Per esempio, le equazioni (8.1), (8.2), e quelle dell'Esempio 8.5.(i), (iii) e (vi) sono lineari; le altre sono non lineari. Equazioni lineari in cui $b \equiv 0$ sono dette *omogenee;* per esempio, le equazioni (8.2), e quelle dell'Esempio 8.5.(iii) e (vi) sono omogenee, mentre le equazioni (8.1) e quella dell'Esempio 8.5.(i) non lo sono. Equazioni lineari autonome (cioè in cui $a_{n-1}, \ldots, a_0$, b sono costanti) sono anche chiamate equazioni differenziali ordinarie lineari *a coefficienti costanti.* Per esempio, (8.2) e le equazioni dell'Esempio 8.5.(i) e (iii) sono lineari a coefficienti costanti.

Quando si affronta lo studio di un'equazione differenziale, i problemi da risolvere sono tipicamente tre. Prima di tutto, *esistono soluzioni?* Di solito sì, anche se spesso non esprimibili tramite funzioni elementari. Esistono risultati generali (ne vedremo uno fra poco) che assicurano l'esistenza di soluzioni per vaste classi di equazioni differenziali ordinarie; ma esistono anche esempi di equazioni differenziali che non ammettono soluzioni.

Il secondo problema è *quali condizioni aggiuntive dobbiamo imporre per assicurarci l'unicità della soluzione?* Se l'equazione differenziale nasce come modello di una situazione reale, ci aspettiamo che fissate le condizioni iniziali del modello la soluzione sia unica, in quanto la realtà, una volta fissato il punto di partenza, si sviluppa in modo unico[1]. Questo suggerisce di imporre come condizione aggiuntiva il valore di y in un punto t_0 iniziale fissato. In effetti, come vedremo fra poco, questo è sufficiente ad assicurare l'unicità della soluzione per le equazioni differenziali ordinarie esplicite del primo ordine; non basta per quelle del second'ordine.

Se ci pensi un attimo, questo non è sorprendente. Supponi di voler risolvere un'equazione del tipo $y'' = f$. Una prima integrazione ti permette di trovare y' come integrale di f — e quindi dipende da una costante arbitraria. Per trovare y, però, devi effettuare una *seconda* integrazione, e quindi compare una *seconda* costante arbitraria; dunque per determinare un'unica soluzione abbiamo bisogno di condizioni che fissino il valore di *due* costanti arbitrarie. La prima costante arbitraria deriva dall'integrazione che ci permette di ricavare y', e quindi può essere fissata imponendo il valore iniziale di y'. Ciò fatto, la seconda costante arbitraria deriva dall'integrazione che ci fornisce y, e quindi può essere fissata imponendo il valore iniziale di y.

Questo esempio suggerisce che per assicurarci l'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n dobbiamo fissare il valore iniziale della funzione e delle prime $n-1$ derivate, per un totale di n condizioni. Che questo funzioni ci è assicurato dal *Teorema di Cauchy-Kowaleski: dati $t_0 \in \mathbb{R}$ e n numeri*

---

[1] O almeno così ci aspettiamo, forse ingenuamente, che faccia; dietro questa affermazioni ci sono problematiche scientifiche e filosofiche tutt'altro che banali.

reali y_0, $y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che il problema*

$$\begin{cases} y^{(n)} = G\big(y^{(n-1)}, \dots, y', y, t\big) \;, \\ y(t_0) = y_0 \;,\; y'(t_0) = y_0' \;, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \;, \end{cases} \tag{8.4}$$

ammette un'unica soluzione y *definita in un intervallo* $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Un problema della forma (8.4), cioè equazione differenziale esplicita con condizioni iniziali, è detto *problema di Cauchy.* Quindi il teorema di Cauchy-Kowaleski ci assicura che ogni problema di Cauchy ha una e una sola soluzione definita vicino al punto iniziale t_0.

Osservazione 8.5 A priori (e vedremo un esempio nell'Osservazione 8.13) la soluzione del problema di Cauchy potrebbe non essere definita su tutto il dominio dell'equazione. Una classe di equazioni per cui questo non può accadere è quello delle equazioni differenziali lineari: infatti si può dimostrare che i problemi di Cauchy per equazioni differenziali lineari ammettono sempre un'unica soluzione definita su tutto il dominio dell'equazione.

Il terzo problema è *come si comporta, almeno qualitativamente, una soluzione di una data equazione differenziale?* In altre parole, sapendo solo che $y(t)$ risolve una data equazione differenziale, e magari conoscendo delle condizioni iniziali, siamo in grado di farne uno studio qualitativo e tracciarne un grafico approsssimato? Per rispondere a questa domanda (fondamentale, visto che buona parte delle equazioni differenziali non hanno soluzioni esprimibili tramite funzioni elementari) sono state sviluppate montagne di tecniche, sia analitiche sia di calcolo numerico per risolvere le equazioni differenziali al calcolatore.

Osservazione 8.6 Vale la pena di citare esplicitamente una delle poche classi di equazioni differenziali che si possono risolvere usando solo funzioni elementari: le equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. Vedremo qualche esempio nelle prossime sezioni.

Una panoramica anche solo un minimo approfondita della teoria delle equazioni differenziali, per quanto interessante e importante per qualsiasi scienzato, va al di là di quanto possiamo fare in queste dispense. Nelle prossime sezioni ci concentremo soprattutto su alcuni esempi di equazioni differenziali (importanti in diversi contesti biologici) che potremo risolvere a mano; ma voglio concludere questa sezione con un'interpretazione geometrica delle equazioni differenziali ordinarie esplicite del primo ordine che a volte può essere utile per suggerire il comportamento qualitativo delle soluzioni.

Consideriamo una equazione differenziale della forma

$$y' = F(y, t) \;.$$

Una funzione y è soluzione di questa equazione se e solo se in ogni punto $\big(t, y(t)\big)$ del grafico la sua retta tangente ha coefficiente angolare $y'(t)$ dato da $F(y, t)$. Se interpretiamo t come ascissa e y come ordinata di un piano cartesiano, possiamo associare a ogni punto del (dominio di F in questo) piano la retta passante per quel punto con coefficiente angolare $F(y,t)$. Questo campo di rette indica la direzione che deve seguire il grafico di una soluzione; il grafico di una soluzione dev'essere in ogni suo punto tangente alla retta passante per quel punto. La distribuzione delle rette allora spesso può suggerirci l'andamento qualitativo dei grafici delle soluzioni; vedi la Fig. 8.1.

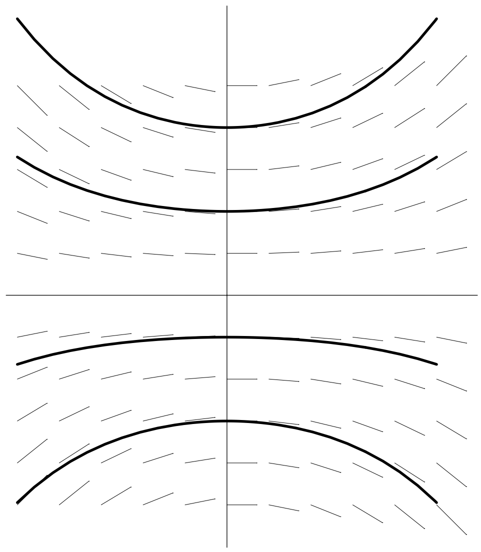

Figura 8.1 Rappresentazione grafica dell'equazione differenziale $y' = ty$.

Osservazione 8.7 Questa interpretazione in un certo senso spiega anche perché fissare la condizione iniziale ci determina un'unica soluzione. Fissare la condizione iniziale significa scegliere un punto di partenza (t_0, y_0). Partendo da lì, dobbiamo muoverci nella direzione indicata da $F(y_0, t_0)$; una volta partiti, non abbiamo più scelte, e dobbiamo continuare a muoverci seguendo le direzioni indicate dalla funzione F. Quindi è ragionevole pensare che una volta scelto il punto di partenza il cammino successivo (la *traiettoria*) sia univocamente fissato; e, viceversa, che possiamo scegliere il punto di partenza in modo arbitrario nel dominio di F. In particolare, per ogni punto del dominio di F passa il grafico di una e una sola soluzione. Se ci pensi un attimo, questo è esattamente il contenuto del Teorema di Cauchy-Kowaleski.

8.2 L'equazione $y' = \lambda y + \nu$.

Invece di affrontare in astratto vari esempi di equazioni differenziali, vogliamo provare a usare le equazioni differenziali per modellare matematicamente un problema concreto; in particolare vedremo come la scelta di ipotesi biologiche diverse porta a equazioni differenziali diverse.

Il problema concreto che seguiremo (uno fra le migliaia possibili) è quello della crescita di una popolazione. Indichiamo con $N(t)$ il numero di individui presenti in una data popolazione al tempo t, e con N_0 il numero di individui presenti all'istante $t = 0$ in cui abbiamo iniziato le nostre osservazioni; vogliamo vedere come evolve $N(t)$ a seconda delle ipotesi che facciamo sulla popolazione.

Osservazione 8.8 Strettamente parlando, il numero di individui in una popolazione è un numero intero, e la popolazione aumenta o diminuisce in intervalli discreti di tempo. Ma per popolazioni composte da un numero molto grande di individui (quali, per esempio, le colture di cellule) semplifica molto lo studio *approssimare* il numero di individui con una funzione N a valori *reali* e dipendente in modo *continuo e derivabile* dal tempo. Un altro approccio possibile è prendere come N la funzione che dà la percentuale di popolazione presente al tempo t, calcolata rispetto alla popolazione iniziale; in questo caso $N_0 = 100\%$, e diventa naturale pensare $N(t)$ come numero reale, e non soltanto intero.

Osservazione 8.9 Quanto diremo si applica anche ad altre situazioni, non solo alla crescita di una popolazione. Per esempio, molto del materiale di questa sezione si può adattare allo studio del decadimento radioattivo di un materiale.

Vediamo ora di esplicitare le ipotesi che faremo sulla nostra popolazione. Trattandosi di uno studio esemplificativo, cominciamo con ipotesi che semplifichino il più possibile la situazione. Supporremo che:

(a) la proporzione di individui fertili nella popolazione sia costante nel tempo;
(b) la fertilità degli individui fertili sia costante nel tempo e indipendente dall'individuo;
(c) non ci siano morti;
(d) non ci siano fenomeni di immigrazione o emigrazione;
(e) non ci siano fattori esterni che limitino (o stimolino) la crescita.

L'ipotesi (a) ci dice che la percentuale di individui della popolazione che possono procreare è costante nel tempo. Nel caso di popolazione sessuata, stiamo supponendo che la percentuale di femmini fertili sia costante nel tempo, che è un'ipotesi ragionevole su grosse popolazioni in situazioni di stabilità. L'ipotesi (a) è a maggior ragione verificata in popolazioni di organismi unicellulari in cui tutti gli individui sono fertili (cioè si possono riprodurre).

L'ipotesi (b) dice che la probabilità che un individuo fertile procrei è la stessa per tutto il periodo in cui rimane fertile, e non varia da individuo a individuo. Questa è chiaramente una notevole semplificazione per popolazioni sessuate, ma è essenzialmente verificata da popolazioni di organismi unicellulari.

L'ipotesi (c) è nel lungo periodo chiaramente irrealistica; ma nel breve periodo in situazioni stabili può essere verificata (e vedremo poi come rimuoverla).

L'ipotesi (d) può essere verificata o meno a seconda delle situazioni; per colonie di organismi unicellulari è molto ragionevole.

L'ipotesi (e) dice che la crescita dipende solo dalle dinamiche interne alla popolazione, e non dall'ambiente esterno. In particolare, stiamo supponendo che ci sia luce, cibo, acqua e spazio sufficiente per un qualsiasi numero di individui. Questa è un'ipotesi molto forte, che però è verificata spesso in situazioni sperimentali, o per certi intervalli del numero di individui della popolazione. Per il momento la assumiamo, riservandoci più avanti di vedere cosa succede se la rimuoviamo.

Il succo di queste ipotesi è che il numero delle nascite (cioè la variazione N' del numero di individui) è, per l'ipotesi (b), proporzionale al numero di individui fertili presenti in quel momento, che è a sua volta, per l'ipotesi (a), proporzionale al numero N di individui nella popolazione totale; inoltre, grazie alle ipotesi (c), (d) ed (e), non ci sono altri meccanismi che causano variazioni nel numero di individui. Quindi possiamo rappresentare il nostro modello con il problema di Cauchy

$$\begin{cases} N'(t) = \lambda N(t) \,, \\ N(0) = N_0 \,, \end{cases} \tag{8.5}$$

dove $\lambda > 0$ è una costante positiva che rappresenta la fertilità della popolazione.

Nell'Esempio 8.4 abbiamo visto che la soluzione di questo problema è

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} \;; \tag{8.6}$$

sotto queste ipotesi, *la popolazione cresce in maniera esponenziale.* La Fig. 8.2 mostra il grafico della soluzione per alcuni valori di N_0, assieme alla rappresentazione grafica dell'equazione discussa al termine della sezione precedente.

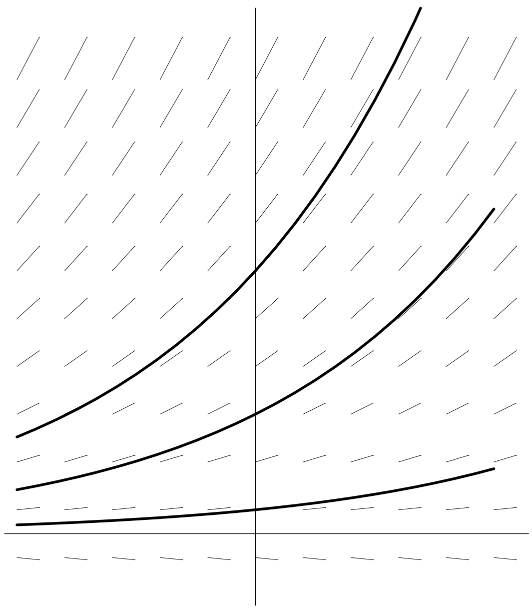

Figura 8.2 Crescita esponenziale.

Osservazione 8.10 Anche se da un punto di vista biologico in questo caso hanno senso solo condizioni iniziali N_0 positive, da un punto di vista matematico (e in altre situazioni biologiche) possono aver senso anche condizioni iniziali N_0 negative o nulle. Se $N_0 = 0$, l'unica soluzione del problema di Cauchy (8.5) è chiaramente $N(t) \equiv 0$ (perché?). Stiamo dicendo che se la popolazione non ha individui all'inizio, continuerà a non avere individui per sempre; la generazione spontanea in questo modello non è ammessa. Se invece $N_0 < 0$ (8.6) ci dice che $N(t)$ decresce esponenzialmente verso $-\infty$. Se interpretiamo una popolazione negativa come composta di zombie, allora in questo modello anche la popolazione di zombie esplode in maniera esponenziale. In particolare, una popolazione di zombie non può mai diventare composta da individui normali (positivi), e una popolazione normale non può mai diventare composta da zombie. Pensiero confortante. Tra parentesi, questo modello si adatta molto bene ai dati sperimentali sulla coltura di cellule in ambienti con ampia disponibilità di cibo e spazio.

Osservazione 8.11 Vale la pena di osservare esplicitamente che benché in questo contesto siamo interessati solo a cosa succede per $t \geq 0$, cioè al futuro delle nostre popolazioni, la soluzione che abbiamo ottenuto ha senso anche per $t < 0$; in alcuni casi questo permette di estrapolare il passato della popolazione — almeno finché le ipotesi che abbiamo fatto per il modello rimangono valide.

Rimuoviamo ora l'ipotesi (c), e ammettiamo la possibilità di morti. Di nuovo, vogliamo un modello semplice; supponiamo allora che

(c') la mortalità sia costante nel tempo e mediamente indipendente dal singolo individuo.

In altre parole, stiamo supponendo che le morti in ciascun istante siano una percentuale costante del numero di individui presenti nella popolazione in quell'istante. Di nuovo, questa è un'ipotesi ragionevole per colonie di organismi unicellulari.

Dunque abbiamo solo due fenomeni che possono modificare il numero di individui: le nascite (che aumentano il numero) e le morti (che diminuiscono il numero). Entrambi i fenomeni sono proporzionali al numero totale di individui, e agiscono indipendentemente l'uno dall'altro, sommando i propri effetti. Quindi possiamo rappresentare questo modello col seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} N' = \lambda N - \mu N \, , \\ N(0) = N_0 \, , \end{cases} \tag{8.7}$$

dove $\mu > 0$ è una costante positiva che rappresenta la mortalità della popolazione (e $\lambda > 0$ continua a rappresentare la fertilità della popolazione).

Siccome $\lambda N - \mu N = (\lambda - \mu)N$, la soluzione di questo problema è

$$N(t) = N_0 e^{(\lambda-\mu)t} \, . \tag{8.8}$$

Ci sono quindi tre evoluzioni possibili:

– se $\lambda > \mu$, cioè se la fertilità è maggiore della mortalità (e diremo che siamo in condizioni di *crescita demografica*), la popolazione cresce ancora in modo esponenziale, anche se più lentamente rispetto a prima;
– se $\lambda < \mu$, cioè se la fertilità è minore della mortalità (e diremo che siamo in condizioni di *decrescita demografica*), la popolazione decresce a zero seguendo

un esponenziale con esponente negativo; in altre parole, la popolazione tende a estinguersi;
– se $\lambda = \mu$ la popolazione rimane costante, le morti equivalgono esattamente alle nascite.

La Fig. 8.3 rappresenta le tre possibilità.

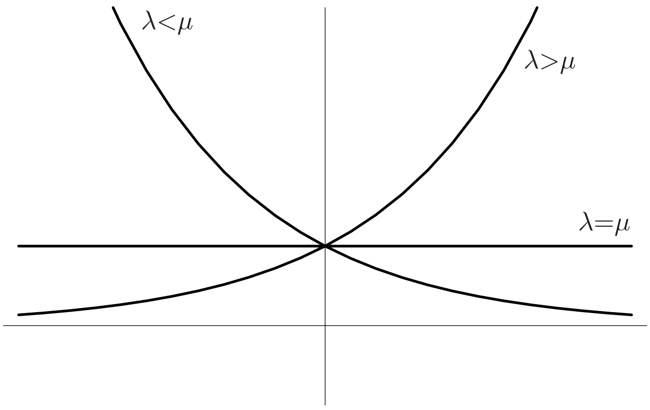

Figura 8.3 Evoluzione con natalità e mortalità.

Eliminiamo ora anche l'ipotesi (d), ammettendo fenomeni di immigrazione o emigrazione. Anche stavolta consideriamo un caso molto semplice, in cui l'immigrazione o l'emigrazione è costante nel tempo ed è indipendente dal numero di individui presenti nella popolazione. Quindi è un terzo meccanismo di modifica del numero di individui, indipendente dagli altri e il cui effetto si somma agli altri. Possiamo dunque rappresentare il modello con il problema di Cauchy

$$\begin{cases} N' = (\lambda - \mu)N + \nu \ , \\ N(0) = N_0 \ , \end{cases} \tag{8.9}$$

dove $\nu \in \mathbb{R}$ rappresenta il tasso di immigrazione (se $\nu > 0$) o emigrazione (se $\nu < 0$).

Questo problema non è della forma studiata nell'Esempio 8.4, ma non è difficile ricondurcelo, con un procedimento detto *di sostituzione*.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = ay + b \tag{8.10}$$

con $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Siccome a non è nullo, possiamo raccogliere a e scrivere $ay+b = a(y+b/a)$. Questo suggerisce di introdurre la nuova funzione incognita

$$z(t) = y(t) + \frac{b}{a} \ ;$$

siccome $z' = y'$, la funzione z soddisfa l'equazione differenziale

$$z' = az \ ,$$

che è della forma studiata nell'Esempio 8.4. Quindi $z(t) = ce^{at}$, per cui le soluzioni di (8.10) sono le funzioni

$$y(t) = z(t) - \frac{b}{a} = ce^{at} - \frac{b}{a}$$

al variare della costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$. Nota che

$$y(0) = c - \frac{b}{a} .$$

Torniamo al problema (8.9). Il ragionamento appena fatto ci dice che (se $\lambda \neq \mu$) la soluzione è

$$N(t) = ce^{(\lambda-\mu)t} - \frac{\nu}{\lambda - \mu} ,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è tale che

$$N_0 = N(0) = c - \frac{\nu}{\lambda - \mu} .$$

Quindi

$$c = N_0 + \frac{\nu}{\lambda - \mu} ,$$

e possiamo scrivere la soluzione nella forma

$$N(t) = N_0 e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{\nu}{\lambda - \mu}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1) . \tag{8.11}$$

Vediamo di interpretare il risultato che abbiamo ottenuto[2]. La prima osservazione è che la presenza di immigrazione/emigrazione ha aggiunto un addendo alla soluzione precedente, per cui l'andamento della popolazione dipenderà dal bilanciamento di questi due addendi. Per la precisione:

– se $\lambda > \mu$ e $\nu > 0$ (cioè crescita demografica e immigrazione) entrambi gli addendi sono positivi e determinano una crescita esponenziale. In particolare, per t abbastanza grande $e^{(\lambda-\mu)t}$ è molto maggiore di 1, per cui possiamo trascurare il -1 in (8.11) ottenendo

$$N(t) \approx \left(N_0 + \frac{\nu}{\lambda - \mu} \right) e^{(\lambda-\mu)t} ,$$

e l'effetto dell'immigrazione è essenzialmente equivalente a un aumento della popolazione iniziale.

– se $\lambda < \mu$ e $\nu > 0$ (cioè decrescita demografica e immigrazione) entrambi gli addendi sono ancora positivi (perché $\lambda - \mu < 0$ e $e^{(\lambda-\mu)t} - 1 < 0$ per $t > 0$),

[2] Come forse ormai avrai capito, la fase di interpretazione del risultato matematico è uno dei passaggi cruciali dell'uso di qualsiasi modello matematico di un fenomeno scientifico.

ma gli esponenziali decrescono molto velocemente verso zero. In particolare, abbiamo
$$N(t) = \frac{\nu}{\mu - \lambda} + \left(N_0 - \frac{\nu}{\mu-\lambda}\right) e^{-(\mu-\lambda)t} \simeq \frac{\nu}{\mu-\lambda}\;,$$
per cui l'effetto dell'immigrazione è far tendere la popolazione velocemente verso il valore limite $\nu/(\mu-\lambda) > 0$.

– se $\lambda > \mu$ e $\nu < 0$ (cioè crescita demografica ed emigrazione) il primo addendo è positivo ma il secondo negativo; cosa succede dipende dal confronto fra N_0 e $|\nu|/(\lambda-\mu)$. Infatti, possiamo scrivere
$$N(t) = \left(N_0 - \frac{|\nu|}{\lambda-\mu}\right) e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{|\nu|}{\lambda-\mu}\;.$$
quindi
- se $N_0 > |\nu|/(\lambda-\mu)$ la popolazione cresce esponenzialmente;
- se $N_0 = |\nu|/(\lambda-\mu)$ la popolazione rimane stabile sul valore iniziale N_0; ma
- se $N_0 < |\nu|/(\lambda-\mu)$ il primo addendo è negativo, e provoca una diminuzione esponenziale della popolazione. In particolare, la popolazione si estingue, cioè $N(t_0) = 0$, per
$$t_0 = \frac{1}{\lambda-\mu} \log\left(\frac{|\nu|}{|\nu| - (\lambda-\mu)N_0}\right)\;,$$
e diventa negativa per $t > t_0$. Quindi elevata emigrazione trasforma la popolazione in zombie in un tempo finito anche in presenza di crescita demografica; che ci sia una morale da qualche parte?

– se $\lambda < \mu$ e $\nu < 0$ (cioè decrescita demografica ed emigrazione) il primo addendo è positivo e il secondo negativo; inoltre, gli esponenziali hanno esponente negativo. Quindi
$$N(t) = -\frac{|\nu|}{\mu-\lambda} + \left(N_0 + \frac{|\nu|}{\mu-\lambda}\right) e^{-(\mu-\lambda)t} \simeq -\frac{|\nu|}{\mu-\lambda}\;,$$
per cui l'effetto dell'emigrazione è far tendere la popolazione velocemente verso il valore limite[3] $-|\nu|/(\mu-\lambda) < 0$.

La Fig. 8.4 mostra il grafico dei vari casi possibili. Lascio a te la discussione di cosa accade quando $N_0 \le 0$, e dell'equazione differenziale che si ottiene se $\lambda = \mu$.

[3] In realtà, la conclusione da trarre è che il nostro modello in presenza di emigrazione non può essere valido per tutti i tempi. In effetti, se ci pensi un attimo, il tasso di emigrazione dev'essere sempre maggiore della popolazione presente; quindi se la popolazione scende al di sotto del tasso di emigrazione, il modello non può più essere valido.

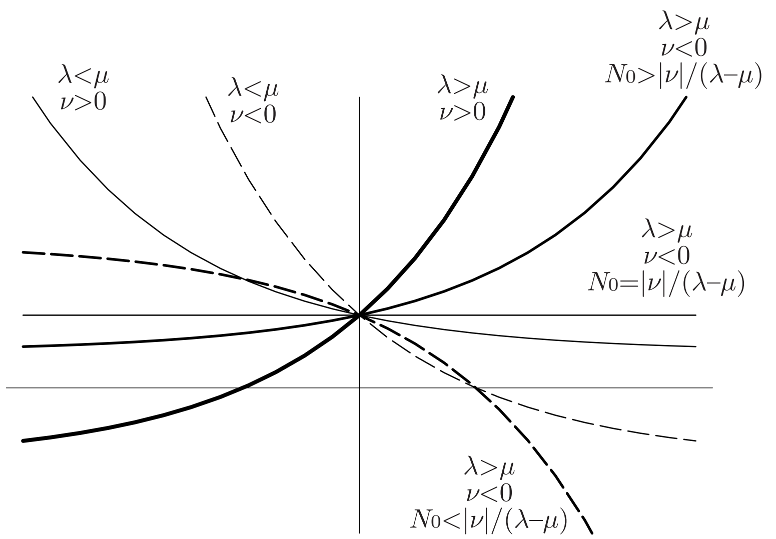

Figura 8.4 Emigrazione e immigrazione.

8.3 Separazione delle variabili

Vediamo ora come possiamo modificare l'ipotesi (e), permettendo che l'ambiente esterno influisca sulla natalità. Per l'esattezza, supporremo che l'ambiente possa sostenere agevolmente solo popolazioni di dimensione al di sotto di una certa soglia $\beta > 0$; popolazioni più grandi subiranno una decrescita demografica, a causa (per esempio) di mancanza di cibo, o di sovraffollamento, mentre popolazioni più piccole potranno ancora crescere. Infine, popolazioni molto piccole non sentono particolarmente la presenza della soglia, per cui crescono approssimativamente come se la soglia non ci fosse.

Possiamo riassumere queste richieste dicendo che nel nostro modello:

- se $N(t) > \beta$ allora $N'(t) < 0$;
- se $0 < N(t) < \beta$ allora $N'(t) > 0$;
- se $0 < N(t)$ è molto piccolo rispetto a β allora $N'(t)$ è approssimativamente proporzionale a $N(t)$.

Vogliamo costruire una equazione differenziale ordinaria più semplice possibile che riproduca questo comportamento. Prima di tutto, per renderla più semplice possibile la vogliamo esplicita e autonoma; inoltre, non c'è motivo per coinvolgere derivate di ordine superiore, per cui la cerchiamo del primo ordine. Quindi partiamo da una equazione del tipo

$$N' = F(N) \ ,$$

e dobbiamo scegliere la funzione F più semplice possibile in modo da soddisfare le nostre richieste.

Le nostre richieste si possono tradurre dicendo che $F(x)$ dev'essere negativa se $x > \beta$, positiva se $0 < x < \beta$, e $F(x)$ dev'essere approssimativamente proporzionale a x per $x > 0$ piccolo.

Siccome F cambia segno, non può essere costante. Se F fosse un polinomio di primo grado, dovendo essere negativa dopo β e positiva prima, dovrebbe (perché?) annullarsi in β e quindi essere della forma $F(x) = a(\beta - x)$ per qualche $a > 0$; ma allora per x piccolo varrebbe circa $a\beta$, e non sarebbe proporzionale a x.

Dunque F non può essere un polinomio di primo grado. Le funzioni non lineari più semplici sono quelle quadratiche; vediamo se troviamo una funzione quadratica che soddisfa le richieste. Abbiamo già notato che F deve annullarsi in β; inoltre, se per x piccolo F è approssimativamente proporzionale a x, si annullerà anche in 0. Un polinomio quadratico che si annulla in β e in 0 è necessariamente della forma $F(x) = kx(\beta - x)$, con $k \in \mathbb{R}$. Inoltre, per soddisfare le condizioni sul segno dobbiamo richiedere che $k > 0$; infine, se $x > 0$ è piccolo rispetto a β abbiamo $F(x) \approx k\beta x$, per cui anche l'ultima condizione è soddisfatta.

Riassumendo, il modello più semplice (ma sicuramente non l'unico!) di crescita di popolazione in presenza di una soglia di sostentamento è il problema di Cauchy

$$\begin{cases} N' = kN(\beta - N) , \\ N(0) = N_0 . \end{cases} \tag{8.12}$$

L'equazione differenziale che abbiamo trovato è un'equazione non lineare; in particolare, è di un tipo che non abbiamo ancora incontrato. Per risolverla dobbiamo introdurre una nuova tecnica, detta di *separazione delle variabili*.

Per capire come funziona questa tecnica, consideriamo come esempio la solita equazione

$$y' = \lambda y ;$$

vogliamo risolverla senza sapere a priori che le soluzioni sono esponenziali. Supponiamo che una soluzione y non si annulli mai (ipotesi che dovremo verificare a posteriori). Allora possiamo scrivere

$$\frac{y'}{y} = \lambda .$$

Il membro sinistro è la derivata del logaritmo di $|y|$; quindi integrando entrambi i membri otteniamo

$$\log|y| = \int \frac{y'}{y}\,dt = \int \lambda\,dt = \lambda t + C .$$

Infine prendendo l'esponenziale di entrambi i membri ricaviamo

$$|y(t)| = e^C e^{\lambda t} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = ce^{\lambda t} ,$$

dove $c = \pm e^C$ e il segno è il segno di y. Quindi, se la nostra equazione ha una soluzione che non si annulla mai, dev'essere della forma che abbiamo trovato; siccome la $y(t)$ che abbiamo trovato effettivamente non si annulla mai, l'ipotesi fatta all'inizio è confermata, e il procedimento che abbiamo seguito è corretto.

Cosa abbiamo fatto? Abbiamo operato tre passaggi. Prima di tutto, abbiamo spostato nel membro sinistro tutte le y (assumendo di poter effettuare la divisione); poi abbiamo integrato entrambi i membri rispetto a t; infine, abbiamo applicato la funzione inversa del membro sinistro (ammesso che questa funzione si possa invertire). Questa procedura si chiama appunto *separazione delle variabili,* in quanto abbiamo "separato" nei due membri la variabile y dalla variabile t.

In generale, si applica in questo modo. Supponiamo di avere un'equazione differenziale della forma

$$y'(t) = a(t) f\big(y(t)\big) , \tag{8.13}$$

per opportune funzioni a ed f. Supponiamo (*ipotesi da verificare a posteriori*) di avere una soluzione tale che $f\big(y(t)\big)$ non si annulli mai. Allora possiamo scrivere

$$\frac{1}{f\big(y(t)\big)} \frac{dy}{dt}(t) = a(t) .$$

Integriamo entrambi i membri rispetto a t; otteniamo

$$\int \frac{1}{f\big(y(t)\big)} \frac{dy}{dt}(t)\, dt = \int a(t)\, dt .$$

Ora, il metodo di integrazione per sostituzione ci dice che se poniamo

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)}\, ds$$

allora

$$\int \frac{1}{f\big(y(t)\big)} \frac{dy}{dt}(t)\, dt = F\big(y(t)\big) + C ;$$

quindi

$$F\big(y(t)\big) = \int a(t)\, dt + C .$$

Se la funzione F è invertibile, possiamo applicare F^{-1} a entrambi i membri ottenendo la soluzione

$$y(t) = F^{-1} \left(\int a(t)\, dt + C \right) .$$

Se la y così ottenuta effettivamente è tale che $f\big(y(t)\big)$ non si annulla mai, allora abbiamo trovato delle soluzioni dell'equazione (8.13).

Ti sarà chiaro che questo metodo non si può applicare spesso per ottenere soluzioni esplicite. Come minimo, bisogna essere in grado di integrare esplicitamente la funzione a, e di invertire esplicitamente la funzione F; poi, bisogna verificare che $f\big(y(t)\big)$ non si annulli. Ma a volte funziona, ed è quello che ci serve per risolvere (8.12).

Osservazione 8.12 Una volta capito come funziona, i passaggi precedenti sono spesso abbreviati scrivendo semplicemente

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int a(t)\,dt + C\ .$$

Proviamo ad applicare il metodo di separazione delle variabili all'equazione, di cui (8.12) è un caso particolare,

$$y' = ay^2 + by + c\ , \tag{8.14}$$

con $a \neq 0$, b, $c \in \mathbb{R}$. Supponendo che $ay^2 + by + c$ non si annulli mai scriviamo

$$\frac{y'}{ay^2 + by + c} = 1$$

e quindi, integrando,

$$\int \frac{1}{ay^2 + by + c}\,dy = \int dt = t + C\ .$$

Dobbiamo quindi calcolare l'integrale indefinito di $(ay^2+by+c)^{-1}$. Per semplicità, supponiamo che il polinomio $ay^2 + bx + c$ abbia due radici reali distinte, in modo da poter scrivere

$$ay^2 + by + c = a(y - y_0)(y - y_1)\ ,$$

dove $y_0 \neq y_1$ sono le due radici, ordinate in modo che $a(y_1 - y_0) > 0$. Questo ci basterà per risolvere (8.12); gli altri casi sono discussi nella Curiosità 8.2. Nota che $ay(t)^2+by(t)+c = 0$ se e solo se $y(t) = y_0$ o $y(t) = y_1$; quindi a posteriori dovremo verificare che la soluzione y trovata non assuma mai i valori y_0 e y_1.

Il trucco che ci permette di calcolare l'integrale indefinito è l'identità

$$\frac{1}{ay^2 + by + c} = \frac{1}{a(y - y_0)(y - y_1)} = \frac{1}{a(y_1 - y_0)}\left[\frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y - y_0}\right]\ .$$

Allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ay^2 + by + c}\,dy &= \frac{1}{a(y_1 - y_0)}\left[\int \frac{1}{y - y_1}\,dy - \int \frac{1}{y - y_0}\,dy\right]\\ &= \frac{1}{a(y_1 - y_0)}\bigl[\log|y - y_1| - \log|y - y_0|\bigr] + C\\ &= \frac{1}{a(y_1 - y_0)}\log\left|\frac{y - y_1}{y - y_0}\right| + C\ .\end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$\frac{1}{a(y_1 - y_0)}\log\left|\frac{y(t) - y_1}{y(t) - y_0}\right| = t + C\ ,$$

da cui segue

$$\frac{y(t)-y_1}{y(t)-y_0} = -De^{a(y_1-y_0)t}\;, \tag{8.15}$$

dove $D = \mp e^{a(y_1-y_0)C}$, e il segno è il segno di $\big(y(t)-y_1\big)/\big(y(t)-y_0\big)$; nota che questo quoziente è sempre definito e non può mai annullarsi (in quanto $y(t) \neq y_0, y_1$ sempre), per cui ha segno costante su ogni intervallo.

Ricavando $y(t)$ da (8.15) e manipolando un poco il risultato troviamo

$$y(t) = \frac{y_1 + Dy_0e^{a(y_1-y_0)t}}{1+De^{a(y_1-y_0)t}} = y_1 + \frac{(y_0-y_1)De^{a(y_1-y_0)t}}{1+De^{a(y_1-y_0)t}}$$

e infine

$$y(t) = y_1 + \frac{y_0-y_1}{1+D^{-1}e^{-a(y_1-y_0)t}}\;, \tag{8.16}$$

che è una funzione logistica (almeno quando $D > 0$ e $y_0 > y_1$). Siccome $y(t)$ è sempre diversa da y_0 e y_1 (verifica), abbiamo effettivamente trovato una soluzione della nostra equazione differenziale.

Osservazione 8.13 Nota che se $D < 0$ può succedere che il denominatore in (8.16) si annulli; quindi può capitare che la soluzione non sia definita su tutto l'asse reale.

Concludiamo il discorso generale segnalando che

$$y(0) = y_1 + \frac{y_0-y_1}{1+D^{-1}}\;, \tag{8.17}$$

e che

$$a(y_1-y_0) = \sqrt{b^2-4ac}\;,$$

come si vede subito dalla formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado.

Curiosità 8.2 Nella Curiosità 6.8 abbiamo visto come integrare tutte le funzioni razionali; vediamo come applicare quella tecnica per risolvere (8.14) quando il polinomio ay^2+by+c non ha due radici reali distinte.

Supponiamo che abbia una sola radice reale $y_0 \in \mathbb{R}$, in modo che $ay^2+by+c = a(y-y_0)^2$. Allora

$$\int \frac{1}{ay^2+by+c}\,dy = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(y-y_0)^2}\,dy = -\frac{1}{a(y-y_0)} + C\;.$$

Quindi

$$\frac{1}{a\big(y_0-y(t)\big)} = t + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = y_0 - \frac{1}{at+C}\;. \tag{8.18}$$

Supponiamo infine che ay^2+by+c non abbia radici reali; in particolare possiamo scrivere

$$ay^2+by+c = a(u^2+\rho^2)\;,$$

dove $u = y + b/2a$ e $\rho = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$. Allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ay^2 + by + c}\,dy = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+\rho^2}\,du &= \frac{1}{a\rho}\arctan(u/\rho) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ay+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C\,.\end{aligned}$$

Eguagliando questo risultato a $t + C$ otteniamo

$$\frac{2ay(t)+b}{\sqrt{4ac-b^2}} = \tan\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2}t + C\right)$$

e quindi

$$y(t) = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\tan\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2}t + C\right) - \frac{b}{2a}\,. \tag{8.19}$$

Nota che sia (8.18) sia (8.19) non sono definite per tutti i valori di t; inoltre, le soluzioni così ottenute non forniscono tutte le soluzioni di (8.14). Per esempio, nel primo caso anche $y(t) \equiv y_0$ è una soluzione, l'unica che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = y_0$.

Torniamo ora a (8.12). Confrontando con (8.14), vediamo che

$$a = -k\,, \quad b = k\beta\,, \quad c = 0\,, \quad y_0 = \beta\,, \quad y_1 = 0\,, \quad a(y_1 - y_0) = k\beta\,;$$

inoltre (8.17) diventa

$$N_0 = \frac{\beta}{1 + D^{-1}} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \frac{N_0}{\beta - N_0}\,.$$

Quindi la soluzione che abbiamo trovato è

$$N(t) = \frac{\beta}{1 + \left(\frac{\beta}{N_0} - 1\right)e^{-k\beta t}}\,. \tag{8.20}$$

Il comportamento di questa funzione dipende dal segno di $\frac{\beta}{N_0} - 1$; discutiamo i vari casi.

- $0 < N_0 < \beta$, cioè partiamo sotto la soglia. In questo caso $\frac{\beta}{N_0} - 1 > 0$, per cui (8.20) è effettivamente una funzione logistica. Dunque per $t > 0$ la popolazione aumenta tendendo al valore di soglia senza mai raggiungerlo.
- $\beta < N_0$, cioè partiamo sopra la soglia. In questo caso $\frac{\beta}{N_0} - 1 < 0$, per cui (8.20) non è una funzione logistica. Più precisamente, per $t > 0$ il denominatore di (8.20) è positivo ma minore di 1, e tende a 1 per $t \to +\infty$, per cui $N(t) > \beta$ per ogni $t > 0$ e $N(t) \to \beta$ per $t \to +\infty$. In altre parole, se partiamo sopra la soglia la popolazione decresce tendendo al valore di soglia senza mai raggiungerlo.
- $N_0 = \beta$. Strettamente parlando, il procedimento che ci ha portato alla (8.20) in questo caso non si applica, in quanto β è una delle radici del polinomio $ky(\beta - y)$. Però (8.20) in questo caso diventa $N(t) \equiv \beta$, che è effettivamente la soluzione del problema di Cauchy (8.12). Quindi se partiamo sul valore di soglia la popolazione rimane costante.

– $N_0 = 0$. In questo caso (8.20) non ha proprio senso; però si vede subito (controlla) che $N(t) \equiv 0$ risolve (8.12), per cui anche in questo modello non c'è generazione spontanea.

Osservazione 8.14 Può essere interessante studiare anche cosa succede per $t < 0$, in modo da estrapolare informazioni sul passato della nostra popolazione. Se $0 < N_0 < \beta$, (8.20) è una funzione logistica, per cui sappiamo perfettamente come si comporta anche per $t < 0$. Se $N_0 > \beta$, invece, abbiamo una sorpresa: il denominatore di (8.20) si annulla in

$$t_0 = \frac{1}{k\beta} \log\left(1 - \frac{\beta}{N_0}\right) < 0 \, .$$

Quindi la popolazione può esistere solo per $t > t_0$, e $N(t) \to +\infty$ per $t \to t_0^+$. Per $t < t_0$, la funzione $N(t)$ è negativa, per cui abbiamo una popolazione di zombie, che esplode per $t \to t_0^-$, mentre $N(t) \to 0^-$ per $t \to -\infty$.

Osservazione 8.15 Anche se non ha un'interpretazione biologica immediata, matematicamente è interessante studiare anche il caso $N_0 < 0$. Siccome $\beta > 0$ per ipotesi, abbiamo $\frac{\beta}{N_0} - 1 < 0$ sempre. Inoltre il denominatore si annulla per

$$t_0 = \frac{1}{k\beta} \log\left(1 + \frac{\beta}{|N_0|}\right) > 0 \, ,$$

è negativo per $t < t_0$ ed è positivo per $t > t_0$. Quindi la nostra popolazione di zombie esplode per $t \to t_0^-$, per poi risorgere quando $t > t_0$ come una popolazione normale che tende al valore di soglia β per $t \to +\infty$.

La Fig. 8.5 riassume la situazione.

Esercizio 8.1 *Studia cosa succede se in questo modello si aggiunge l'immigrazione/emigrazione. In altre parole, studia il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} N' = kN(\beta - N) + \nu \, , \\ N(0) = N_0 \, , \end{cases}$$

al variare dei parametri k, $\beta > 0$ e N_0, $\nu \in \mathbb{R}$. Avrai bisogno dei risultati della Curiosità 8.2.

8.4 Sistemi lineari di equazioni

In questa sezione cambiamo il nostro modello introducendo una seconda popolazione. Abbiamo due specie che coabitano nello stesso habitat, e indichiamo con $N_1(t)$ il numero di individui della prima specie al tempo t, e con $N_2(t)$ il numero di individui della seconda specie al tempo t. Ciascuna specie, se da sola, si evolverebbe secondo il modello precedente; vogliamo vedere se riusciamo a riprodurre l'interazione fra le due specie.

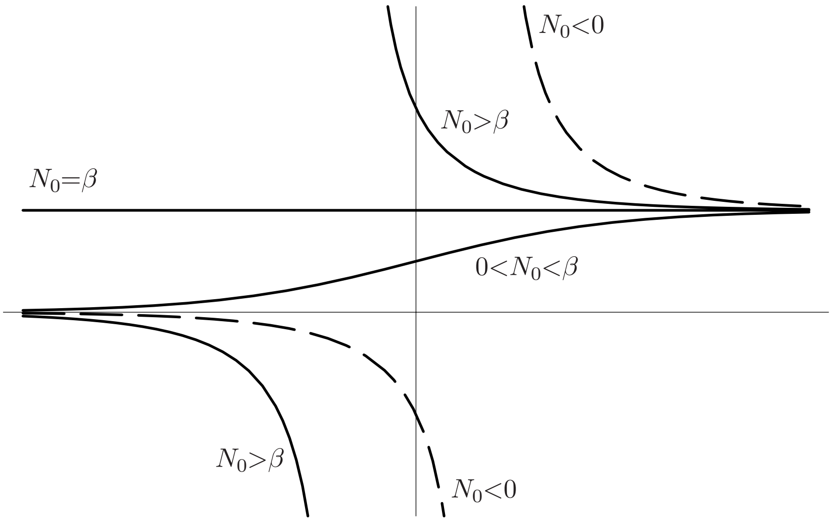

Figura 8.5 Popolazione con soglia.

Come al solito, faremo ipotesi molto semplificatrici. Supponiamo prima di tutto di non avere fenomeni di immigrazione/emigrazione, né fenomeni di soglia; quindi ciascuna specie per conto suo si evolverebbe seguendo l'equazione $N_i' = \lambda_i N_i$ per $i = 1, 2$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ positivo o negativo a seconda della situazione (crescita o decrescita demografica). Supponiamo poi che la presenza di una popolazione causi una variazione nel numero di individui dell'altra popolazione rappresentabile con un'equazione dello stesso tipo. Il nostro modello quindi è

$$\begin{cases} N_1' = \lambda_1 N_1 + \mu_1 N_2 \,, \\ N_2' = \mu_2 N_1 + \lambda_2 N_2 \,, \end{cases} \tag{8.21}$$

dove $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ sono i *tassi di correlazione* fra le due popolazioni. Il segno di μ_1 e μ_2 rappresenta il tipo interazione fra le due popolazioni. Per esempio, se sono uno positivo e l'altro negativo potremmo essere in una situazione di tipo *predatore-preda:* la popolazione 1 si ciba della popolazione 2, per cui la presenza di individui della popolazione 2 fornisce cibo e quindi causa un incremento della popolazione 1 (cioè $\mu_1 > 0$), mentre la presenza di individui della popolazione 1 causa morti e quindi un decremento della popolazione 2 (cioè $\mu_2 < 0$).

Se invece entrambi i tassi di correlazione sono negativi potremmo essere in una situazione di tipo *competizione:* entrambe le popolazioni competono per le stesse risorse (cibo, spazio, eccetera) per cui la presenza di individui di una popolazione causa una diminuzione nel numero di individui dell'altra (cioè $\mu_1, \mu_2 < 0$).

Infine, se entrambi i tassi di correlazione sono positivi potremmo essere in una situazione di tipo *simbiotico:* la presenza di individui di una popolazione fornisce qualcosa di utile per la sopravvivenza dell'altra, e quindi ne aumenta il numero di individui (cioè $\mu_1, \mu_2 > 0$).

Il sistema (8.21) è un esempio di *sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti omogenee.* Abbiamo due equazioni e due funzioni incognite, N_1 ed N_2, dipendenti dalla stessa variabile t; vogliamo vedere se riusciamo a trovare due funzioni che soddisfano entrambe le equazioni contemporaneamente, magari richiedendo anche che soddisfino opportune condizioni iniziali

$$N_1(t_0) = N_1^0 \ , \qquad N_2(t_0) = N_2^0 \ .$$

In un certo senso, questo tipo di sistemi di equazioni differenziali è il più bello di tutti: infatti, si può sempre risolvere usando funzioni elementari. Per l'esattezza, vale il seguente risultato: *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $a_{11}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *e* $y_1^0, \ldots, y_n^0 \in \mathbb{R}$ *il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \ , \\ \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \ , \\ y_1(t_0) = y_1^0 \ , \ldots, y_n(t_0) = y_n^0 \ , \end{cases} \tag{8.22}$$

ammette un'unica soluzione. Inoltre, le funzioni soluzione $y_1, \ldots, y_n$ *sono definite su tutto l'asse reale, e si ottengono come somma e prodotto di funzioni della forma*

$$ae^{kt} \ , \quad b\cos(\omega t) \ , \quad c\sin(\omega t) \ , \quad dt^q \ ,$$

con a, b, c, d, k, $\omega \in \mathbb{R}$ *e* $q \in \mathbb{N}$.

Vediamo cosa succede per il nostro sistema (8.21). Usando le notazioni del risultato appena citato, vogliamo studiare il sistema

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \ , \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \ . \end{cases} \tag{8.23}$$

In assenza di idee brillanti (il tuo assistente è ancora nel deserto) affrontiamo il problema a tentativi, provando a vedere se per caso il sistema ha soluzioni della forma

$$y_1(t) = A_1e^{kt} \ , \qquad y_2(t) = A_2e^{kt} \ , \tag{8.24}$$

per opportuni A_1, A_2, $k \in \mathbb{R}$; del resto, abbiamo visto che questa è la forma delle soluzioni se c'è una sola equazione.

Derivando (8.24) troviamo

$$y_1'(t) = kA_1e^{kt} \ , \qquad y_2'(t) = kA_2e^{kt} \ ;$$

quindi le y_1, y_2 date da (8.24) sono una soluzione di (8.23) se e solo se

$$\begin{cases} kA_1e^{kt} = a_{11}A_1e^{kt} + a_{12}A_2e^{kt} \ , \\ kA_2e^{kt} = a_{21}A_1e^{kt} + a_{22}A_2e^{kt} \ , \end{cases}$$

ovvero, dividendo per e^{kt} (che non si annulla mai) se e solo se

$$\begin{cases} kA_1 = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 \ , \\ kA_2 = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 \ , \end{cases} \iff \begin{cases} (a_{11} - k)A_1 + a_{12}A_2 = 0 \ , \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - k)A_2 = 0 \ . \end{cases} \tag{8.25}$$

In quest'ultimo sistema lineare le incognite sono A_1 e A_2, mentre a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} sono coefficienti noti; infine, k è un parametro che vogliamo scegliere in modo che il sistema abbia soluzioni *non banali.* Infatti il sistema (8.25) ammette sempre la soluzione ovvia $A_1 = A_2 = 0$, che corrisponde a prendere y_1, $y_2 \equiv 0$. Questa è certamente una soluzione del sistema (8.23), ma non molto interessante; ci dice solo che se partiamo senza popolazioni rimaniamo senza popolazioni. Il nostro obiettivo è quindi *trovare, se esistono, dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema* (8.25) *abbia una soluzione non banale,* cioè una soluzione $(A_1, A_2) \neq (0, 0)$.

Supponiamo per un istante che $a_{12} \neq 0$; vedremo fra poco che il risultato finale varrà anche se $a_{12} = 0$. Allora possiamo ricavare A_2 dalla prima equazione; inserendola nella seconda troviamo

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{k - a_{11}}{a_{12}} A_1 \;, \\ \left[a_{21} - \dfrac{(k - a_{22})(k - a_{11})}{a_{12}}\right] A_1 = 0 \;. \end{cases} \tag{8.26}$$

Se il coefficiente di A_1 nella seconda equazione è diverso da zero, ricaviamo $A_1 = 0$ e quindi, grazie alla prima equazione, $A_2 = 0$. Dunque una soluzione non banale può esistere se e solo se il coefficiente di A_1 è diverso da zero, cioè (moltiplicando per a_{12} e riordinando i termini) *se e solo se k è una radice della seguente equazione:*

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \;; \tag{8.27}$$

questa equazione è detta *equazione caratteristica* del sistema (8.23); le (eventuali) radici di questa equazione sono dette *radici caratteristiche* di (8.23).

Osservazione 8.16 Se $a_{12} = 0$ l'equazione caratteristica si riduce a

$$(k - a_{11})(k - a_{22}) = 0 \;,$$

cioè a $k = a_{11}$ o $k = a_{22}$. Controlla allora che il sistema (8.25) con $a_{12} = 0$ ammette una soluzione non banale se e solo se $k = a_{11}$ o $k = a_{22}$.

L'equazione caratteristica, come ogni equazione di secondo grado che si rispetti, può avere due radici reali distinte, una sola radice reale, oppure nessuna radice reale, a seconda del valore del *discriminante*

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \;.$$

Supponiamo che l'equazione caratteristica ammetta almeno una radice reale $k_1 \in \mathbb{R}$ (discuteremo un poco nella Curiosità 8.3 cosa fare quando questo non accade). Allora il discorso che abbiamo fatto ci dice che esistono A_1 e A_2 non entrambi nulli che risolvono il sistema (8.25) con $k = k_1$; quindi con questi valori di A_1 e A_2 e con $k = k_1$ le (8.24) sono una soluzione del sistema di equazioni differenziali (8.23).

Inoltre, esistono *infinite* coppie (A_1, A_2) che risolvono (8.25), e si possono tutte scrivere nella forma

$$(A_1, A_2) = (\alpha A_1^0, \alpha A_2^0)$$

con $A_1^0 = 1$ o $A_2^0 = 1$ (o entrambi), e $\alpha \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi numero reale. Se $a_{12} \neq 0$ questo è una conseguenza immediata (perché?) di (8.26); se $a_{12} = 0$ te lo lascio per esercizio.

Esempio 8.6 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 \ , \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \ , \end{cases} \tag{8.28}$$

corrispondente al caso di due popolazioni in competizione, con

$$a_{11} = \lambda_1 = 2 \ , \quad a_{22} = \lambda_2 = 2 \ , \quad a_{12} = \mu_1 = -3 \ , \quad a_{21} = \mu_2 = -1 \ .$$

In questo caso il discriminante è $\Delta = 12 > 0$; quindi l'equazione caratteristica ha due radici reali distinte

$$k_1 = 2 + \sqrt{3} \ , \qquad k_2 = 2 - \sqrt{3} \ .$$

Scegliendo $k = k_1$ il sistema (8.25) diventa

$$\begin{cases} -\sqrt{3}A_1 - 3A_2 = 0 \ , \\ -A_1 - \sqrt{3}A_2 = 0 \ , \end{cases}$$

le cui soluzioni sono chiaramente tutte le coppie della forma

$$(A_1, A_2) = (-\sqrt{3}\alpha, \alpha) \ .$$

Quindi ogni coppia di funzioni

$$y_1(t) = -\sqrt{3}\alpha e^{(2+\sqrt{3})t} \ , \qquad y_2(t) = \alpha e^{(2+\sqrt{3})t}$$

risolve (8.28).

Scegliendo invece $k = k_2$, il sistema (8.25) diventa

$$\begin{cases} \sqrt{3}A_1 - 3A_2 = 0 \ , \\ -A_1 + \sqrt{3}A_2 = 0 \ , \end{cases}$$

le cui soluzioni sono chiaramente tutte le coppie della forma

$$(A_1, A_2) = (\sqrt{3}\beta, \beta) \ .$$

Quindi anche ogni coppia di funzioni

$$y_1(t) = \sqrt{3}\beta e^{(2-\sqrt{3})t} \ , \qquad y_2(t) = \beta e^{(2-\sqrt{3})t}$$

risolve (8.28).

Ma non è finita qui. Se (y_1, y_2) e $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ sono due coppie di soluzioni di (8.28), allora puoi verificare subito che anche $(y_1 + \tilde{y}_1, y_2 + \tilde{y}_2)$ è una soluzione di (8.28). Quindi ogni coppia di funzioni della forma

$$y_1(t) = -\sqrt{3}\alpha e^{(2+\sqrt{3})t} + \sqrt{3}\beta e^{(2-\sqrt{3})t} , \qquad y_2(t) = \alpha e^{(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{(2-\sqrt{3})t} ,$$

risolve (8.28), quali che siano α, $\beta \in \mathbb{R}$. Vedremo fra poco che in questo modo abbiamo ottenuto *tutte* le soluzioni di (8.28).

Supponiamo ora che l'equazione caratteristica del sistema (8.23) abbia due radici reali distinte, k_1 e k_2. Allora il ragionamento precedente ci fornisce *due* coppie di soluzioni: la prima, della forma

$$\big(\alpha A_1^0 e^{k_1 t}, \alpha A_2^0 e^{k_1 t}\big) ,$$

corrispondente a $k = k_1$; e la seconda, della forma

$$\big(\beta B_1^0 e^{k_2 t}, \beta B_2^0 e^{k_2 t}\big) ,$$

corrispondente a $k = k_2$. Come osservato nel precedente esempio, la somma di soluzioni di (8.23) è ancora una soluzione; quindi tutte le coppie di funzioni della forma

$$\big(y_1(t), y_2(t)\big) = \big(\alpha A_1^0 e^{k_1 t} + \beta B_1^0 e^{k_2 t}, \alpha A_2^0 e^{k_1 t} + \beta B_2^0 e^{k_2 t}\big) \tag{8.29}$$

sono soluzioni di (8.23), quali che siano α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Con questa informazione siamo ora in grado di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 , \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 , \\ y_1(t_0) = y_1^0 , \ y_2(t_0) = y_2^0 . \end{cases} \tag{8.30}$$

Infatti, ci basta verificare se esiste una coppia di funzioni della forma (8.29) che soddisfa le condizioni iniziali di (8.30). Mettendo $t = t_0$ in (8.29) vediamo che il nostro problema si trasforma nel trovare α e β tali che

$$\begin{cases} A_1^0 e^{k_1 t_0}\alpha + B_1^0 e^{k_2 t_0}\beta = y_1^0 , \\ A_2^0 e^{k_1 t_0}\alpha + B_2^0 e^{k_2 t_0}\beta = y_2^0 . \end{cases} \tag{8.31}$$

Tecniche di Algebra Lineare che non abbiamo tempo di richiamare qui ci dicono che (8.31) ammette sempre un'unica soluzione (α_0, β_0); quindi

$$\big(y_1(t), y_2(t)\big) = \big(\alpha_0 A_1^0 e^{k_1 t} + \beta_0 B_1^0 e^{k_2 t}, \alpha A_2^0 e^{k_1 t} + \beta B_2^0 e^{k_2 t}\big)$$

risolve il problema di Cauchy (8.30). Inoltre, siccome il problema di Cauchy (8.22) ammette un'*unica* soluzione, e ogni soluzione di (8.23) soddisfa una qualche condizione iniziale, le coppie di funzioni della forma (8.29) forniscono *tutte* le possibili soluzioni di (8.30), in quanto scegliendo opportunamente α e β possiamo soddisfare qualsiasi condizione iniziale.

Esempio 8.7 Vogliamo studiare due popolazioni in competizione rappresentate dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} N_1' = 2N_1 - 3N_2 \,, \\ N_2' = -N_1 + 2N_2 \,, \\ N_1(0) = 600 \,,\ N_2(0) = 300 \,. \end{cases}$$

Nel precedente esempio abbiamo visto che le soluzioni devono essere della forma

$$N_1(t) = -\sqrt{3}\alpha e^{(2+\sqrt{3})t} + \sqrt{3}\beta e^{(2-\sqrt{3})t} \,, \qquad N_2(t) = \alpha e^{(2+\sqrt{3})t} + \beta e^{(2-\sqrt{3})t} \,;$$

dobbiamo determinare α e β in modo da soddisfare anche le condizioni iniziali. Per far ciò, α e β devono risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} N_1(0) = -\sqrt{3}\alpha e^0 + \sqrt{3}\beta e^0 = -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3}\beta = 600 \,, \\ N_2(0) = \alpha e^0 + \beta e^0 = \alpha + \beta = 300 \,. \end{cases}$$

Ricavando β dalla seconda equazione e inserendola nella prima otteniamo

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3}(300 - \alpha) = 600 \,, \\ \beta = 300 - \alpha \,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -50(2\sqrt{3} - 3) \,, \\ \beta = 50(2\sqrt{3} + 3) \,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione cercata è

$$\begin{cases} N_1(t) = 150(2 - \sqrt{3})e^{(2+\sqrt{3})t} + 150(2 + \sqrt{3})e^{(2-\sqrt{3})t} \,, \\ N_2(t) = -50(2\sqrt{3} - 3)e^{(2+\sqrt{3})t} + 50(2\sqrt{3} + 3)e^{(2-\sqrt{3})t} \,. \end{cases}$$

Raccogliendo $e^{(2+\sqrt{3})t}$ otteniamo

$$\begin{cases} N_1(t) = e^{(2+\sqrt{3})t}\big[300 - 150\sqrt{3} + (300 + 150\sqrt{3})e^{-2\sqrt{3}t}\big] \,, \\ N_2(t) = e^{(2+\sqrt{3})t}\big[150 - 100\sqrt{3} + (150 + 100\sqrt{3})e^{-2\sqrt{3}t}\big] \,. \end{cases}$$

Quindi per $t \to +\infty$ abbiamo

$$N_1(t) \approx (300 - 150\sqrt{3})e^{(2+\sqrt{3})t} \to +\infty \,, \quad N_2(t) \approx (150 - 100\sqrt{3})e^{(2+\sqrt{3})t} \to -\infty \,.$$

In altre parole, nonostante la competizione sia più dura per la prima popolazione rispetto alla seconda (in quanto $\mu_1 < \mu_2 < 0$), il vantaggio iniziale ($N_1(0) > N_2(0)$) è sufficiente a compensare la competizione, e permette alla prima popolazione di prevalere facendo estinguere la seconda (e anzi trasformandola in una popolazione di zombie). La Fig. 8.6 contiene i grafici di N_1 e N_2.

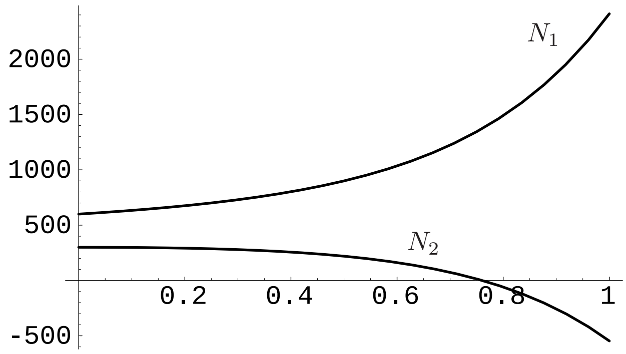

Figura 8.6 Evoluzione di due popolazioni in competizione.

Riassumendo, la procedura per risolvere il problema di Cauchy (8.30) è la seguente:

- si determinano le radici dell'equazione caratteristica (8.27);
- supponendo che (8.27) abbia due radici reali k_1, k_2 distinte, si trovano le soluzioni del sistema lineare (8.25) per $k = k_1$, e per $k = k_2$, dipendenti rispettivamente da un coefficiente α e da un coefficiente β;
- si determinano α e β risolvendo il sistema lineare (8.31).

CURIOSITÀ 8.3 Per presentare la teoria generale dei problemi di Cauchy del tipo (8.30) ci servirebbero tecniche di Algebra Lineare che non abbiamo. Mi limito a dire che quando l'equazione caratteristica ha un'unica radice reale k_0, oltre a soluzioni della forma (8.24) il sistema ammette anche soluzioni della forma

$$y_1(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{k_0 t} , \qquad y_2(t) = (\beta_1 + \beta_2 t)e^{k_0 t} ,$$

per opportuni α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Quando invece l'equazione caratteristica non ha radici reali, il sistema ammette soluzioni della forma

$$y_1(t) = \alpha_1 e^{kt}\cos(\omega t) + \alpha_2 e^{kt}\sin(\omega t) , \qquad y_2(t) = \beta_1 e^{kt}\cos(\omega t) + \beta_2 e^{kt}\sin(\omega t) ,$$

per opportuni α_1, α_2, β_1, β_2, k, $\omega \in \mathbb{R}$.

8.5 L'equazione $y'' = -ky$.

In questa nostra breve carrellata sulle equazioni differenziali non posso esimermi dal citare l'equazione

$$y'' = -\omega^2 y . \tag{8.32}$$

ESEMPIO 8.8 La fisica ci dice che la forza esercitata su un oggetto di massa m attaccato a una molla allungata di una lunghezza y rispetto alla posizione di riposo è

$$F = -ky$$

per un'opportuna costante positiva k. Ricordando che $F = my''$ otteniamo (8.32), con $\omega^2 = k/m > 0$.

Si vede subito (controlla) che le funzioni della forma

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{8.33}$$

sono tutte soluzioni di (8.32), quali che siano A, $B \in \mathbb{R}$. Inoltre, un facile conto (verifica) mostra che prendendo

$$A = y_0\cos(\omega t_0) - y_1\sin(\omega t_0)\ , \qquad B = y_0\sin(\omega t_0) + y_1\cos(\omega t_0)$$

allora la funzione data da (8.33) risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -\omega^2 y\ , \\ y(t_0) = y_0\ ,\ y'(t_0) = y_1\ . \end{cases} \tag{8.34}$$

In particolare, le soluzioni di (8.34) sono sempre periodiche di periodo $2\pi/\omega$.

Vale la pena ricordare anche un collegamento con gli argomenti della sezione precedente. Infatti, introducendo le nuove funzioni

$$y_1(t) = y(t) \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = y'(t)\ ,$$

il problema di Cauchy (8.34) si trasforma nel seguente problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali lineari del prim'ordine:

$$\begin{cases} y_1' = y_2\ , \\ y_2' = -\omega^2 y_1\ , \\ y_1(t_0) = y_0\ ,\ y_2(t_0) = y_1\ . \end{cases} \tag{8.35}$$

Questo problema è esattamente della forma (8.30), con

$$a_{11} = 0\ ,\quad a_{12} = 1\ ,\quad a_{21} = -\omega^2\ ,\quad a_{22} = 0\ ,\quad y_1^0 = y_0\ ,\quad y_2^0 = y_1\ .$$

In particolare il discriminante vale

$$\Delta = -\omega^2 < 0\ ,$$

per cui l'equazione caratteristica non ha radici reali. Nonostante ciò, il problema di Cauchy (8.35), essendo equivalente a (8.34), ammette soluzioni della forma

$$y_1(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ ,\quad y_2(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\ ,$$

per opportuni A, $B \in \mathbb{R}$.

Curiosità 8.4 L'equazione (8.32) assomiglia molto all'equazione

$$y'' = k^2 y\ ,$$

che invece ha soluzioni della forma

$$y(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt} .$$

Questo potrebbe far sospettare l'esistenza di una relazione inaspettata fra funzioni esponenziali e funzioni trigonometriche. Per descrivere questa relazione bisogna usare i numeri complessi. Se $z = a + ib$ è un numero complesso, si definisce l'*esponenziale complesso* e^z ponendo

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b) . \tag{8.36}$$

Se ci pensi un attimo, vedrai che questa definizione è perfettamente coerente con gli sviluppi in serie di esponenziale, seno e coseno che abbiamo visto nella Curiosità 5.11. Derivando separatamente parte reale e parte immaginaria, trattando i come una costante (cosa che effettivamente è) non è difficile verificare che la derivata della funzione

$$f(t) = e^{zt}$$

è data da

$$f'(t) = ze^{zt}$$

per *ogni* numero complesso z. In particolare, se $z = i\omega$ troviamo che

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t} ;$$

essendo

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) ,$$

abbiamo recuperato le soluzioni (8.33) di (8.32).

Concludiamo queste dispense notando che ponendo $z = 0 + i\pi$ in (8.36) otteniamo la *relazione di Eulero*

$$e^{i\pi} + 1 = 0 ,$$

che collega le cinque costanti fondamentali e, π, i, 1 e 0 (ed è una delle più belle formule di tutta la Matematica).