5
Calcolo differenziale

5.1 Derivate

In molte situazioni, più che il valore effettivo di una quantità conta quanto velocemente varia; ci interessa studiare la variazione di quella quantità nel tempo (o in funzione di una qualche altra variabile indipendente).

Esempio 5.1 Una volta messa la pentola con l'acqua della pasta sul fuoco, di solito non ci interessa sapere il valore esatto della temperatura d'ebollizione (e, tanto meno, la temperatura esatta dell'acqua uscita dal rubinetto); ci interessa sapere quanto velocemente l'acqua giungerà a ebollizione. Ci interessa sapere quanto velocemente varia la temperatura dell'acqua sul fuoco — magari per verificare l'esattezza del detto popolare "acqua guardata non bolle mai."

Esempio 5.2 Osservando la crescita di una colonia di batteri, è di solito abbastanza irrilevante sapere il numero esatto di individui della colonia; studiare 1 237 664 batteri o studiare 1 244 511 batteri è di solito abbastanza equivalente. Quello che invece è importante sapere è se il numero di batteri aumenta o diminuisce, e quanto velocemente aumenta o diminuisce, e come questa variazione dipende dalle condizioni dell'esperimento (temperatura, luminosità, disponibilità di sostanze nutritive), e come questa variazione cambia nel tempo.

Esempio 5.3 La colonia di batteri del tuo assistente è fuori controllo, e sta invadendo l'intero laboratorio; devi intervenire con un antibiotico per uccidere i batteri di troppo. Hai giusto a disposizione un antibiotico inedito da testare, e vuoi vedere a quale concentrazione è più efficace. Ordini al tuo assistente di misurare la percentuale di mortalità di batteri a seconda della concentrazione dell'antibiotico; i dati ottenuti sono poi interpolati con una funzione logistica, ottenendo il grafico di Figura 5.1.

Esaminando il grafico è naturale suddividere la concentrazione in tre zone. Nella prima, di bassa concentrazione, l'antibiotico è praticamente inefficace. Nella terza,

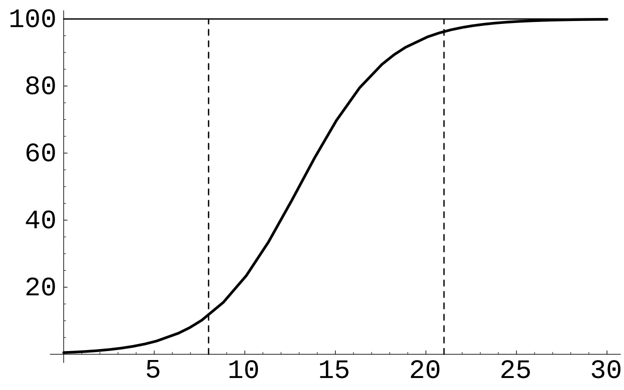

Figura 5.1 Concentrazione/Mortalità.

di alta concentrazione, l'efficacia diventa quasi indipendente dalla concentrazione: aumentando la concentrazione la mortalità praticamente non cambia, per cui conviene rimanere a concentrazioni più basse senza sprecare inutilmente antibiotico. Nella zona centrale, invece, basta una piccola variazione nella concentrazione per provocare una sensibile variazione della mortalità. In questa zona, l'efficacia dell'antibiotico è massima, nel senso che piccoli aumenti dell'antibiotico hanno effetti significativi sulla mortalità.

Riflettendo un secondo sul discorso appena fatto, vedrai che la suddivisione naturale in tre zone corrisponde a una suddivisione in base alla velocità di variazione: nella prima e nella terza zona la velocità di variazione era chiaramente bassa, mentre la velocità di variazione era molto maggiore nella zona centrale. Un altro modo per spiegare la stessa cosa è dire che la suddivisione è legata alla pendenza del grafico: quasi orizzontale nella prima e terza zona, molto inclinato in quella centrale. Uno degli obiettivi di questo capitolo sarà proprio fornire tecniche precise per misurare la "velocità di variazione" e la "pendenza" di un grafico.

Esempio 5.4 Non posso esimermi dal citare l'esempio paradigmatico di velocità di variazione: la velocità di un corpo che si muove. Misura esattamente la variazione di posizione del corpo; e, in diversi casi, è più interessante conoscere la variazione di posizione piuttosto che la posizione esatta. Per esempio, gli autovelox, indipendentemente da dove si trovano, sono interessati solo alla velocità di variazione di posizione delle auto che passano — mentre, effettivamente, gli autisti sono molto più interessati alla posizione assoluta degli autovelox.

Esempio 5.5 In diverse situazioni può essere utile studiare anche la variazione della variazione. L'esempio paradigmatico stavolta è fornito dalla variazione della velocità, cioè dall'accelerazione. Infatti, alla base della fisica newtoniana (e galileiana) c'è l'osservazione che l'azione di una forza su un corpo è misurata dalla variazione della velocità; un corpo indisturbato rimane a velocità costante. E una delle principali leggi di Newton dice esattamente che la forza è proporzionale all'accelerazione: $F = ma$.

Vogliamo quindi trovare un modo efficace per misurare la variazione di una quantità. Come al solito, rappresentiamo la nostra quantità con una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è il dominio di definizione della nostra funzione, l'insieme in cui varia la variabile indipendente. Vogliamo misurare la velocità di variazione di f in un punto $x_0 \in I$, ammesso che sia possibile.

Se prendiamo un altro punto $x_1 \in I$, possiamo prima di tutto calcolare la *variazione assoluta*

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

di f nel passare da x_0 a x_1. Come già accadeva per l'errore assoluto, la variazione assoluta di due funzioni diverse è difficile da confrontare, in quanto dipende pesantemente dai valori effettivi delle due funzioni. Inoltre, anche intuitivamente, la variazione assoluta non misura la velocità di variazione: una variazione assoluta pari a 100 può essere una variazione lentissima se ottenuta in un milione di anni, oppure una variazione velocissima se ottenuta in un milionesimo di secondo.

Questo suggerisce di confrontare la variazione assoluta Δf con la lunghezza

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

dell'intervallo in cui avviene la variazione, cioè di calcolare la *variazione media* (o *variazione relativa*) di f da x_0 a x_1:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

Dalla Figura 5.2 risulta evidente che la variazione media è il coefficiente angolare della retta (detta *secante*) che collega i punti $\big(x_0, f(x_0)\big)$ e $\big(x_1, f(x_1)\big)$ del grafico di f, e che ha equazione

$$y = f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot (x - x_0) .$$

La variazione media è già più interessante della variazione assoluta, ma è ancora una misura piuttosto grezza: non ci dice rigorosamente nulla su cosa accade fra x_0 e x_1. Per esempio, nella Figura 5.2 vediamo che le due funzioni raffigurate e la retta secante hanno esattamente la stessa variazione media da x_0 a x_1. D'altra parte, più x_1 è vicino a x_0 più precisa è l'informazione data dalla variazione media sul comportamento della funzione vicino a x_0; anche la differenza (vicino a x_0) fra il grafico di f e la retta secante diminuisce. Questo suggerisce di far tendere x_1 a x_0, e quindi di considerare la *variazione istantanea*

$$\begin{aligned}\lim_{x_1 \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} ,\end{aligned} \tag{5.1}$$

dove nell'ultima formula abbiamo semplicemente indicato Δx con il simbolo h; tanto, per il calcolo del limite l'unica cosa che importa è che la quantità in questione diventi arbitrariamente piccola, indipendentemente da come si chiama.

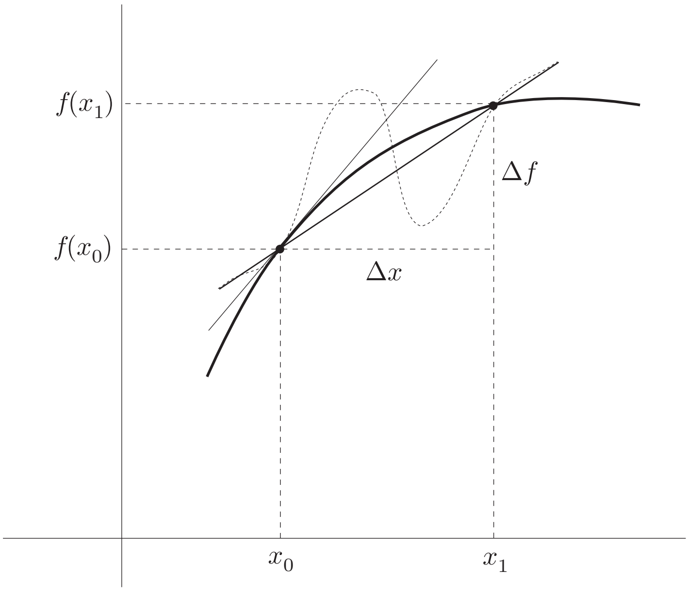

Figura 5.2 .

Osservazione 5.1 *Attenzione:* non è detto che il limite (5.1) esista! In altre parole, non è sempre detto che si possa calcolare la variazione istantanea. Per esempio, scriviamo

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Se f è derivabile in x_0, allora per $x \to x_0$ il secondo membro tende (perché?) a 0; quindi $f(x)$ tende a $f(x_0)$, cioè f è continua in x_0. In altre parole, *se f non è continua in x_0 allora non può essere derivabile in x_0.* Ma anche quando la funzione f è continua in x_0 il limite (5.1) è una forma indeterminata del tipo 0/0, per cui nulla ci assicura a priori che esista. Uno dei principali obiettivi di questo capitolo sarà far vedere che il limite (5.1) esiste finito per tutte le funzioni elementari del bestiario; però vedremo anche che esistono funzioni semplici (per esempio, la funzione valore assoluto; vedi l'Esempio 5.7) di cui non è sempre possibile calcolare la variazione istantanea.

Se il limite (5.1) esiste finito, diremo che la funzione f è *derivabile* in x_0. Il valore del limite verrà detto *derivata* di f in x_0, e indicato o con il simbolo $f'(x_0)$ o con il simbolo $\frac{df}{dx}(x_0)$, a seconda dei casi:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} ;$$

il quoziente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è detto *rapporto incrementale.*

Osservazione 5.2 Il concetto di derivata è stato introdotto indipendentemente da

Newton e Leibniz nel diciassettesimo secolo. La notazione f' è stata introdotta da Lagrange un secolo più tardi modificando quella originale di Newton, mentre la notazione df/dx è quella usata da Leibniz. Come vedrai, a seconda della situazione una o l'altra può essere più utile, per cui le useremo entrambe.

Osservazione 5.3 Quando diciamo che una funzione f è derivabile in un punto x_0 intendiamo che il rapporto incrementale ha limite sia per h che tende a zero da sopra, sia per h che tende a zero da sotto, e che i due limiti sono uguali. A volte capita che esista finito solo il limite per $h \to 0^+$ (rispettivamente, per $h \to 0^-$); in quel caso diremo che f è *derivabile a destra* (rispettivamente, *sinistra*) in x_0, e il valore del limite sarà la *derivata destra* (rispettivamente, *sinistra*) di f in x_0. Un caso in cui siamo costretti a considerare derivate destre e sinistre è quando f è definita su un intervallo chiuso $[a, b]$, e vogliamo considerare la derivata negli estremi dell'intervallo. Chiaramente (perché?), in a possiamo calcolare solo la derivata destra, mentre in b possiamo calcolare solo la derivata sinistra.

Geometricamente, l'esistenza del limite (5.1) in x_0 (o, come diremo, l'esistenza della derivata di f in x_0) significa che le rette secanti per x_0 e x_1 tendono a una retta limite quando x_1 tende a x_0. Questa retta si chiama *retta tangente* al grafico di f in x_0, ed è la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) ;$$

la Figura 5.2 contiene anche la retta tangente al grafico di f in x_0.

Supponiamo che una funzione f sia derivabile in tutti i punti di un intervallo I (e in tal caso diremo semplicemente che f è *derivabile* in I). Allora possiamo associare a ciascun punto $x \in I$ il valore $f'(x)$ della derivata di f in x. In questo modo abbiamo quindi definito una nuova funzione $f' \colon I \to \mathbb{R}$, chiamata ovviamente *derivata* di f — e che indicheremo anche con la notazione $\frac{df}{dx}$ di Leibniz. La derivata di f misura quindi la variazione istantanea di f in ogni punto di I, cioè proprio quanto ci eravamo proposti di trovare in questa sezione.

Osservazione 5.4 *Attenzione:* in questo testo i simboli df e dx singolarmente non avranno alcun significato[1]; df/dx *non* è il quoziente delle "quantità" df e dx. La notazione di Leibniz per noi serve solo a ricordare che la derivata è il limite del quoziente $\Delta f/\Delta x$ al diventare Δx arbitrariamente piccolo. Inoltre, la "x" in $\frac{df}{dx}$ è semplicemente il nome scelto in quel momento per la variabile indipendente; notazioni quali $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{du}$ e così via indicano tutte la derivata di f, e differiscono solo nel nome dato alla variabile indipendente.

Esempio 5.6 Se la funzione f misura lo spostamento di un corpo nel tempo, allora f' misura la velocità di spostamento. Se invece f misura la velocità, allora f' misura l'accelerazione. Se f è la quantità di carica elettrica in un punto nel tempo,

[1] In testi di matematica più avanzati servono a indicare oggetti particolari chiamati "forme differenziali", che però noi non studieremo.

f' è l'intensità di corrente passante per quel punto. Se f è la concentrazione di un dato reagente, allora f' è la velocità di reazione.

Nelle prossime sezioni vedremo come calcolare le derivate delle funzioni del bestiario (e di altre funzioni costruite a partire da quelle) e, soprattutto, come dedurre informazioni importanti sulla funzione originaria f conoscendone la derivata f'. Questo ci darà una procedura efficace per lo studio qualitativo delle funzioni, in quanto *le derivate si calcolano:* più precisamente, le derivate di funzioni elementari si esprimono sempre in termini di funzioni elementari (mentre vedremo che questo non accade per gli integrali).

5.2 Calcolo di derivate: funzioni costanti

Cominciamo a vedere come calcolare le derivate di funzioni f. In tutti i casi che vedremo, per calcolare la derivata di f nel punto x procederemo come segue:

– scriveremo il rapporto incrementale
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
per $h \neq 0$;
– manipoleremo, se possibile, il rapporto incrementale (effettuando operazioni valide per $h \neq 0$) in modo da semplificarlo o portarlo in una forma a noi più congeniale;
– calcoleremo il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale manipolato.

Cominciamo col caso più semplice: quello delle funzioni costanti. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che vale costantemente $c \in \mathbb{R}$, cioè $f(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora il rapporto incrementale è

$$\forall h \neq 0 \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \,.$$

Quindi il rapporto incrementale di una funzione costante è sempre nullo, e dunque il limite del rapporto incrementale è chiaramente sempre zero. In altre parole, abbiamo fatto vedere che *la derivata di una funzione costante è identicamente nulla.*

Questo era un fatto geometricamente prevedibile. Infatti, il grafico di una funzione costante è una retta orizzontale. Quindi tutte le rette secanti coincidono con questa retta orizzontale, per cui anche tutte le rette tangenti coincidono con questa retta orizzontale. Le rette orizzontali hanno tutte coefficiente angolare nullo, il coefficiente angolare delle rette tangenti è dato dalla derivata, e quindi le funzioni costanti hanno derivata nulla.

Osservazione 5.5 L'ultimo ragionamento suggerisce che valga anche il viceversa: *una funzione derivabile con derivata identicamente nulla su un intervallo è necessariamente costante su quell'intervallo.* Dire che la derivata è identicamente nulla equivale a dire che tutte le rette tangenti sono orizzontali, e sembra difficile immaginare che possa esistere una funzione con tutte rette tangenti orizzontali il cui grafico non sia a sua volta costante. Detto in altri termini ancora, se la variazione istantanea di una funzione è sempre nulla, la funzione non varia mai: l'annullarsi ovunque della variazione istantanea implica l'annullarsi ovunque della variazione media. Tutto ciò è vero, ma per verificarlo rigorosamente serve un modo per collegare la variazione istantanea (che dipende solo da quello che avviene arbitrariamente vicino al punto in cui viene calcolata) alla variazione media; vedi la Curiosità 5.1.

CURIOSITÀ 5.1 Una formula che lega la variazione istantanea alla variazione media esiste, ed è contenuta nel *Teorema del valor medio di Lagrange*. Questo teorema dice che se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto (a,b), allora per ogni coppia di punti $x_0 < x_1$ in $[a,b]$ esiste (almeno) un punto $x_0 < \overline{x} < x_1$ tale che la variazione media di f da x_0 a x_1 è uguale alla variazione istantanea di f in $\overline{x}$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\overline{x}) \; .$$

In altre parole, la retta secante per x_0 e x_1 è parallela ad almeno una retta tangente nell'intervallo (x_0, x_1). È importante notare che questo teorema non ci dice come trovare $\overline{x}$ né quanti ce ne sono; ma fornisce comunque un importante legame fra variazione media e variazione istantanea. Per esempio, ci dice che se la derivata è identicamente nulla in $[a,b]$ allora la variazione media di f in due punti qualunque dell'intervallo è sempre zero, e quindi f è costante.

Osservazione 5.6 L'equazione

$$\frac{df}{dx} = 0 \tag{5.2}$$

è un (primo e banalissimo) esempio di *equazione differenziale*. Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita è una funzione, e che coinvolge anche la derivata della funzione stessa. Una caratteristica tipica delle equazioni differenziali è che la soluzione (se esiste) non è unica, a meno di richiedere che siano soddisfatte delle condizioni aggiuntive. Per esempio, abbiamo appena visto che le soluzioni dell'equazione (5.2) sono tutte e sole le funzioni costanti:

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \equiv c \; .$$

Per individuare una soluzione unica, abbiamo bisogno di condizioni aggiuntive. Per esempio, possiamo richiedere che la soluzione cercata valga 7 (o qualsiasi altro valore c_0) nel punto 2 (o in qualsiasi altro punto x_0), cioè che $f(2) = 7$ (rispettivamente, che $f(x_0) = c_0$); allora l'unica soluzione che soddisfa questa condizione aggiuntiva è la funzione costante $f \equiv 7$ (rispettivamente, $f \equiv c_0$).

5.3 Calcolo di derivate: funzioni lineari

Passiamo ora alle funzioni lineari. Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=mx+d$ una funzione lineare. Il rapporto incrementale in $x\in\mathbb{R}$ è dato da

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{m(x+h)+d-(mx+d)}{h}=\frac{mh}{h}=m\;.$$

In particolare, il rapporto incrementale non dipende da h (né da x), e quindi chiaramente ammette limite (finito uguale a m) per $h\to 0$. Quindi *le funzioni lineari (sono derivabili e) hanno derivata costante, uguale al coefficiente angolare.*

Di nuovo, geometricamente questo è un risultato ovvio. Le rette secanti del grafico di una funzione lineare coincidono tutte con la retta grafico della funzione, e quindi anche le rette tangenti devono coincidere con questa, e in particolare hanno lo stesso coefficiente angolare.

Esempio 5.7 Il conto appena fatto ci permette di verificare che la funzione valore assoluto non è derivabile in 0. Infatti il rapporto incrementale in 0 è dato da

$$\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}+1 & \text{se } h>0\;,\\ -1 & \text{se } h<0\;.\end{cases}$$

Quindi il rapporto incrementale non ha limite per h che tende a zero (il limite sinistro è diverso dal limite destro), e quindi il valore assoluto non è derivabile in 0. Geometricamente, si vede bene: il grafico del valore assoluto ha un vertice nell'origine, per cui le rette secanti da sopra tendono a una retta diversa da quella a cui tendono le rette secanti da sotto.

Osservazione 5.7 La funzione lineare $f(x)=mx+d$ è un esempio di somma di due funzioni: la funzione mx e la funzione costante d. Questo non è l'unico caso; i polinomi sono somma di funzioni potenza, per esempio. Chiaramente, se fossimo in grado di calcolare la derivata della somma di due funzioni partendo dalla derivata degli addendi, potremmo semplificarci diversi conti. Fortunatamente, questo si può fare, e otteniamo una formula molto semplice:

$$\frac{d(f+g)}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}\;, \tag{5.3}$$

cioè *la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate*[2]. Questo fatto si verifica molto semplicemente scrivendo il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}&=\frac{f(x+h)+g(x+h)-\big(f(x)+g(x)\big)}{h}\\ &=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\;.\end{aligned}$$

[2] O, più precisamente: se f e g sono derivabili in x allora anche $f+g$ è derivabile in x e si ha $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Passando al limite per $h \to 0$, e ricordando che il limite della somma è uguale alla somma dei limiti, otteniamo (5.3). In maniera analoga ricaviamo che *la derivata della differenza è uguale alla differenza delle derivate:*

$$\frac{d(f-g)}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx} \, . \tag{5.4}$$

Curiosità 5.2 Attenzione: la somma di due funzioni può essere derivabile senza che nessuna delle due lo sia singolarmente. Per esempio, prendiamo $f(x) = |x|$ e $g(x) = x - |x|$. Allora $(f+g)(x) = x$ è derivabile in tutti i punti, mentre né f né g (perché?) sono derivabili in 0.

Osservazione 5.8 Nel Capitolo 4 abbiamo visto che le funzioni lineari sono tutte e sole quelle con variazione media costante (cioè $\Delta f = m\Delta x$); non è difficile vedere che sono anche tutte e sole quelle con variazione istantanea costante. In altre parole, le funzioni lineari $f(x) = mx+d$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{df}{dx} = m \, .$$

Infatti, supponiamo che f sia una soluzione di questa equazione, cioè che si abbia $f' \equiv m$, e poniamo $g(x) = mx$. Allora l'osservazione precedente ci dice che

$$(f-g)' = f' - g' = m - m \equiv 0 \; ;$$

quindi $f - g$, avendo derivata identicamente nulla, dev'essere costante. In altre parole, deve esistere $d \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - mx \equiv d$, e quindi $f(x) = mx + d$, cioè f è lineare come volevamo.

Osservazione 5.9 Più in generale, *due funzioni derivabili che hanno la stessa derivata differiscono per una costante additiva.* Infatti, supponiamo che f e g siano due funzioni derivabili tali che $f' \equiv g'$. Allora $(f-g)' = f' - g' \equiv 0$, per cui $f - g$ è una costante c, cioè $f = g + c$ come voluto.

5.4 Calcolo di derivate: funzioni quadratiche

Una funzione quadratica $f(x) = ax^2+bx+c$ è naturalmente somma di una funzione potenza (ax^2) e di una funzione lineare ($bx + c$). Siccome la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate, e siccome sappiamo calcolare la derivata di funzioni lineari, abbiamo

$$\frac{d}{dx}\big(ax^2 + bx + c\big) = \frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(bx + c) = \frac{d}{dx}(ax^2) + b \, .$$

Quindi per trovare la derivata di una funzione quadratica ci basta saper calcolare la derivata della funzione ax^2. Scriviamo come al solito il rapporto incrementale:

$$\frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \frac{a(x^2 + 2hx + h^2) - ax^2}{h} = \frac{2ahx + ah^2}{h} = 2ax + ah \, .$$

Anche stavolta siamo stati in grado di semplificare il rapporto incrementale in modo da poter calcolare il limite per $h \to 0$. Infatti $\lim_{h\to 0}(2ax + ah) = 2ax$, e quindi

$$\frac{d}{dx}(ax^2) = 2ax \; .$$

Riassumendo abbiamo ottenuto la seguente formula per la derivazione delle funzioni quadratiche:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 2ax + b \; .$$

ESEMPIO 5.8 Se $f(x) = 12x^2 - 7x + 3$, allora $f'(x) = 2 \cdot 12x - 7 = 24x - 7$.

Vale la pena esaminare le relazioni fra il comportamento di una funzione quadratica $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la sua derivata $f'(x) = 2ax + b$. Ricordando quanto abbiamo studiato nel Capitolo 4, otteniamo:

- la derivata f' si annulla esattamente nell'ascissa del vertice $x = -b/2a$ della parabola grafico di f;
- la derivata f' è positiva esattamente nei punti (dopo il vertice se $a > 0$, prima del vertice se $a < 0$) in cui la funzione f è crescente;
- la derivata f' è negativa esattamente nei punti (prima del vertice se $a > 0$, dopo il vertice se $a < 0$) in cui la funzione f è decrescente;
- la derivata f' è crescente (cioè $a > 0$) se e solo se il grafico di f ha la concavità rivolta verso l'alto;
- la derivata f' è decrescente (cioè $a < 0$) se e solo se il grafico di f ha la concavità rivolta verso il basso.

Vedremo più in là che queste relazioni fra f ed f' sono valide per qualsiasi funzione, e non solo per quelle quadratiche.

5.5 Calcolo di derivate: funzioni polinomiali

Sistemate le funzioni quadratiche, il passo successivo consiste nelle funzioni polinomiali. Chiaramente abbiamo

$$\frac{d}{dx}\bigl(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\bigr) = \frac{d}{dx}(a_n x^n) + \frac{d}{dx}(a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots + \frac{d}{dx}(a_0) \; ;$$

quindi dobbiamo calcolare la derivata della generica funzione potenza a esponente naturale ax^k.

Ci sono (almeno) tre modi diversi per effettuare questo calcolo. Il primo consiste nell'usare la formula (2.22) per lo sviluppo del binomio, come fatto nel caso $k = 2$.

Otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{a(x+h)^k - ax^k}{h} &= \frac{1}{h}\left[a\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{k-j}h^j - ax^k\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[a\left(x^k + kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \cdots + h^k\right) - ax^k\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[a\left(kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \cdots + h^k\right)\right] \\
&= kax^{k-1} + \binom{k}{2}ax^{k-2}h + \cdots + ah^{k-1} .
\end{aligned}$$

Facendo tendere h a zero muoiono tutti i termini nell'ultima somma tranne il primo, per cui otteniamo

$$\frac{d}{dx}(ax^k) = kax^{k-1} ; \tag{5.5}$$

la derivata della funzione potenza ax^k è la funzione potenza con esponente diminuito di 1 *e coefficiente moltiplicato per l'esponente.*

Osservazione 5.10 Vedremo più in là (Sezione 5.8) che questa formula vale per funzioni potenza di esponente reale qualsiasi.

Il secondo modo utilizza la formula (4.17) della differenza di potenze:

$$\begin{aligned}
\frac{a(x+h)^k - ax^k}{h} &= \frac{a}{h}\left[(x+h)^k - x^k\right] = \frac{a}{h}\left[(x+h) - x\right]\sum_{i=0}^{k-1}(x+h)^i x^{k-1-i} \\
&= a\sum_{i=0}^{k-1}(x+h)^i x^{k-1-i} .
\end{aligned}$$

Mandando h a zero tutti gli addendi della sommatoria tendono a x^{k-1}; siccome ci sono k addendi, otteniamo nuovamente kax^{k-1} come limite del rapporto incrementale.

Il terzo metodo invece ha applicazioni che vanno ben al di là delle funzioni polinomiali. L'idea è considerare ax^k come il prodotto di due funzioni potenza di grado minore (per esempio, ax e x^{k-1}), e di vedere se riusciamo a calcolare la derivata di un prodotto conoscendo le derivate dei fattori.

Effettivamente si può fare, ma con un avvertenza: la derivata del prodotto *NON* è uguale al prodotto delle derivate. Per capire a cosa è uguale, scriviamo come al solito il rapporto incrementale per il prodotto fg di due funzioni, e manipoliamolo in modo da far comparire i rapporti incrementali di f e g:

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h)+f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\ .\end{aligned}$$

Mandando h a 0 i rapporti incrementali tendono alle derivate, e $g(x+h)$ tende a $g(x)$, per cui abbiamo dimostrato che *se f e g sono derivabili in x allora anche fg è derivabile in x, e vale la regola di Leibniz*

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}\,g + f\,\frac{dg}{dx}\ . \tag{5.6}$$

Osservazione 5.11 In particolare, se g è una funzione costante, diciamo $g \equiv c$, ha derivata nulla e quindi

$$\forall c \in \mathbb{R} \qquad \frac{d}{dx}(cf) = c\,\frac{df}{dx}\ .$$

Mettendo $g = f$ in (5.6) otteniamo la derivata del quadrato di una funzione:

$$\frac{d(f^2)}{dx} = 2f\frac{df}{dx}\ .$$

Mettendo $g = f^2$ in (5.6) otteniamo la derivata del cubo di una funzione:

$$\frac{d(f^3)}{dx} = f^2\frac{df}{dx} + f\frac{d(f^2)}{dx} = 3f^2\,\frac{df}{dx}\ .$$

Procedendo in questo modo chiaramente otteniamo

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \frac{d(f^k)}{dx} = kf^{k-1}\frac{df}{dx}\ . \tag{5.7}$$

In particolare, prendendo $f(x) = x$, e ricordando l'Osservazione 5.11, otteniamo nuovamente (5.5).

Curiosità 5.3 La dimostrazione della formula (5.7) usa una procedura particolarmente utile in matematica, nota come *principio di induzione*. L'idea è la seguente: per dimostrare che una certa affermazione P_k, dipendente da un numero naturale k, è vera per ogni $k \geq 0$ (o $k \geq 1$, o $k \geq k_0$ per un qualche k_0 fissato), basta dimostrare che:

(I1) P_0 (o P_1, o P_{k_0}) è vera; e che

(I2) se P_{k-1} è vera allora anche P_k lo è.

Infatti, (I1) dice che P_0 è vera; allora usando (I2) per $k = 1$ otteniamo che anche P_1 è vera; ma allora usando (I2) con $k = 2$ otteniamo che anche P_2 è vera; ma allora usando (I2) con $k = 3$ otteniamo che anche P_3 è vera; e così via, fino a raggiungere in un numero finito di passi qualsiasi P_k.

Per esempio, indichiamo con P_k la formula (5.7). Allora P_1 è banalmente vera (in quanto $f^0 \equiv 1$ per ogni funzione f), per cui (I1) è verificata. Supponiamo che P_{k-1} sia vera; applicando la regola di Leibniz a $f^k = f^{k-1} \cdot f$ otteniamo

$$\frac{d(f^k)}{dx} = \frac{d(f^{k-1})}{dx} f + f^{k-1} \frac{df}{dx} = (k-1)f^{k-2} \frac{df}{dx} f + f^{k-1} \frac{df}{dx} = kf^{k-1} \frac{df}{dx} ,$$

per cui P_k è vera. Quindi abbiamo verificato anche (I2), e il principio di induzione ci assicura che (5.7) è vera per ogni $k \geq 1$.

Riassumendo, siamo in grado di calcolare la derivata di una qualsiasi funzione polinomiale:

$$\frac{d}{dx}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 .$$

Esempio 5.9 Se $f(x) = 6x^3 - 3\pi x^2 + 11\sqrt{2}x + 7$ allora

$$f'(x) = 3 \cdot 6x^2 - 2 \cdot 3\pi x + 1 \cdot 11\sqrt{2} = 18x^2 - 6\pi x + 11\sqrt{2} .$$

5.6 Calcolo di derivate: funzioni razionali

Proseguendo col calcolo delle derivate delle funzioni del bestiario, ora tocca alle funzioni razionali. Siccome le funzioni razionali sono quozienti di polinomi, è naturale affrontare questo problema cercando di trovare una formula per la derivata di un quoziente. Siccome un quoziente si può scrivere come il prodotto del numeratore per il reciproco del denominatore, e sappiamo già calcolare la derivata del prodotto, ci basta calcolare la derivata di un reciproco.

Supponiamo allora che $f\colon I \to \mathbb{R}$ sia una funzione derivabile in un punto $x \in I$ con $f(x) \neq 0$. Manipolando il rapporto incrementale otteniamo

$$\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)f(x)h} = \frac{-1}{f(x+h)f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Passando al limite per $h \to 0$ ricaviamo che *se f è derivabile in un punto x con $f(x) \neq 0$ allora $1/f$ è derivabile in x e vale la formula*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{f'}{f^2} . \tag{5.8}$$

Osservazione 5.12 Un modo per ricordarsi questa formula consiste nel derivare l'identità

$$1 \equiv f \cdot \frac{1}{f} .$$

Sapendo già che $1/f$ è derivabile possiamo usare la regola di Leibniz ottenendo

$$0 \equiv \frac{d}{dx}\left(f \cdot \frac{1}{f}\right) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{1}{f} + f \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right) ,$$

che è equivalente a (5.8).

Usando la regola di Leibniz possiamo ora calcolare la derivata di un qualsiasi quoziente nei punti in cui il denominatore non si annulla:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d}{dx}\left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = \frac{df}{dx}\frac{1}{g} + f\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}\;,$$

e quindi *se f e g sono derivabili in un punto x in cui $g(x) \neq 0$ allora f/g è derivabile in x e vale la formula*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}\;.$$

Esempio 5.10 Proviamo a calcolare la derivata di una funzione razionale (nei punti in cui il denominatore non si annulla):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+1}{2x-2}\right) &= \frac{\frac{d(3x^2+1)}{dx}\cdot(2x-2) - \frac{d(2x-2)}{dx}\cdot(3x^2+1)}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{6x(2x-2) - 2(3x^2+1)}{4(x-1)^2} = \frac{6x^2-12x-2}{4(x^2-2x+1)} \\ &= \frac{3x^2-6x-1}{2x^2-4x+2}\;.\end{aligned}$$

Esempio 5.11 Un caso particolare di funzione razionale è dato dalle funzioni potenza a esponente negativo $f(x) = ax^{-k}$. Siccome $ax^{-k} = a/x^k$ otteniamo

$$\frac{d}{dx}(ax^{-k}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^k}\right) = -a\frac{\frac{d}{dx}(x^k)}{x^{2k}} = -a\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kax^{-k-1}\;.$$

In particolare, la formula (5.5) vale per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

5.7 Calcolo di derivate: potenze a esponente razionale

Vogliamo ora calcolare la derivata di funzioni della forma $f(x) = x^{p/q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$. Ora, possiamo scrivere

$$x^{p/q} = (x^{1/q})^p = g_p\big(x^{1/q}\big) = g_p\big(f_q(x)\big)\;, \tag{5.9}$$

dove abbiamo posto $g_p(x) = x^p$ e $f_q(x) = x^{1/q}$. Quindi la nostra f si può scrivere come composizione delle funzioni g_p e f_q, cioè $f = g_p \circ f_q$, e questo ci suggerisce che sarebbe utile saper calcolare la derivata della composizione di funzioni derivabili.

Anche stavolta procediamo manipolando il rapporto incrementale; solo che stavolta l'operazione è un attimo più complessa delle altre volte. Supponiamo che

f sia derivabile nel punto x, e che g sia derivabile nel punto $y = f(x)$; vogliamo vedere se $g \circ f$ è derivabile nel punto x. Cominciamo scrivendo

$$\begin{aligned}\frac{g \circ f(x+h) - g \circ f(x)}{h} &= \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{h} \\ &= \frac{g\Big(f(x) + \big(f(x+h) - f(x)\big)\Big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{g(y+h_1) - g(y)}{h_1} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} ,\end{aligned} \tag{5.10}$$

dove abbiamo posto $h_1 = f(x+h) - f(x)$ e $y = f(x)$. Siccome f (essendo derivabile) è continua in x, quando h tende a 0 anche h_1 tende a 0; quindi nell'ultimo membro di (5.10) il primo quoziente tende alla derivata di g in $y = f(x)$, e il secondo quoziente tende alla derivata di f in x. Quindi *se f è derivabile nel punto x, g è derivabile nel punto $f(x)$, e la composizione $g \circ f$ è definita vicino a x, allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula*

$$\frac{d}{dx}(g \circ f) = \left(\frac{dg}{dx} \circ f\right) \frac{dg}{dx} ,$$

che può anche essere scritta come

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x) . \tag{5.11}$$

Esempio 5.12 Prendiamo $f(x) = 3x^2 - 2$ e $g(x) = 2x^3 - 3x$; vogliamo calcolare la derivata di $g \circ f$. Possiamo procedere in due modi: calcolando l'espressione polinomiale esplicita di $g \circ f$ e poi derivandola, oppure applicando la formula appena ottenuta per la derivata di funzione composta. Nel primo caso abbiamo

$$\begin{aligned}g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x^2 - 2) &= 2(3x^2 - 2)^3 - 3(3x^2 - 2) \\ &= 2(27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8) - 9x^2 + 6 \\ &= 54x^6 - 108x^4 + 63x^2 - 10 ,\end{aligned}$$

per cui

$$(g \circ f)'(x) = 324x^5 - 432x^3 + 126x .$$

Usando la (5.11) otteniamo direttamente

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'\big(f(x)\big) f'(x) = g'(3x^2 - 2) \cdot 6x = [6(3x^2 - 2)^2 - 3]6x \\ &= 6x(54x^4 - 72x^2 + 21) \\ &= 324x^5 - 432x^3 + 126x .\end{aligned}$$

Tornando al nostro problema originale, applicando (5.11) a (5.9) otteniamo

$$\frac{d}{dx}(x^{p/q}) = g_p'(x^{1/q}) f_q'(x) = p x^{(p-1)/q} \frac{d}{dx}(x^{1/q}) ; \tag{5.12}$$

quindi dobbiamo trovare il modo di calcolare la derivata di $x^{1/q}$.

Ora, $x^{1/q}$ è, per definizione, la funzione inversa della funzione $g_q(x) = x^q$, di cui sappiamo calcolare la derivata; quindi questo suggerisce di trovare un modo per calcolare la derivata di una funzione inversa.

Supponiamo allora che f sia una funzione invertibile, derivabile in un punto y; vogliamo vedere se la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $x = f(y)$. Come vedremo fra un attimo, dovremo assumere che $f'(y) \neq 0$.

Scriviamo il rapporto incrementale per f^{-1} in x:

$$\frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \frac{f^{-1}(x+h) - y}{(x+h) - x} = \frac{y_1 - y}{f(y_1) - f(y)} \ ,$$

dove abbiamo posto $y_1 = f^{-1}(x+h)$. Sia $h_1 = y_1 - y$; siccome f^{-1} è continua in x, anche h_1 tende a 0 per h che tende a 0. Quindi per h che tende a 0 il rapporto incrementale

$$\frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \frac{1}{\frac{f(y+h_1)-f(y)}{h_1}}$$

tende a $1/f'(y)$, che esiste perché $f'(y) \neq 0$. Ricordando che $y = f^{-1}(x)$ abbiamo dimostrato che *se la funzione invertibile f è derivabile nel punto y con $f'(y) \neq 0$ allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $x = f(y)$ e vale la formula*

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{f'\bigl(f^{-1}(x)\bigr)} \ . \tag{5.13}$$

Osservazione 5.13 Supponiamo di sapere già per altri motivi che f^{-1} è derivabile in $x = f(y)$. Allora derivando l'identità $f \circ f^{-1}(x) = x$ otteniamo

$$f'\bigl(f^{-1}(x)\bigr) \cdot \frac{df^{-1}}{dx}(x) = 1 \ ,$$

cioè (5.13).

Possiamo allora calcolare la derivata di $f_q(x) = x^{1/q}$. Come già notato, f_q è la funzione inversa di $g_q(y) = y^q$. Ora, $g_q'(y) = qy^{q-1}$; quindi l'unico punto y_0 in cui g_q' si annulla è $y_0 = 0$; di conseguenza, possiamo calcolare la derivata di $x^{1/q}$ in tutti i punti in cui g_q è definita tranne in $x_0 = g_q(y_0) = 0$. Quindi

$$\frac{d\,x^{1/q}}{dx} = \frac{1}{g_q'(x^{1/q})} = \frac{1}{q(x^{1/q})^{q-1}} = \frac{1}{q}x^{(1/q)-1} \tag{5.14}$$

per ogni $x \neq 0$ in cui $x^{1/q}$ è definita.

Osservazione 5.14 In particolare, non siamo in grado di calcolare la derivata della funzione radice cubica $f(x) = x^{1/3}$ in zero. Ora, guardando il grafico notiamo che stavolta il problema non è causato dalla presenza di un vertice nel grafico; la retta tangente al grafico di f nell'origine esiste. Il problema è causato dal fatto che la retta tangente in quel punto è verticale, per cui il suo coefficiente angolare (che dovrebbe essere il valore della derivata) non è definito.

Osservazione 5.15 Abbiamo notato che se f è una funzione invertibile, il grafico di f^{-1} si ottiene riflettendo il grafico di f rispetto alla diagonale di equazione $y = x$. Chiaramente, questa operazione di riflessione trasforma rette tangenti al grafico di f in rette tangenti al grafico di f^{-1} — e non ti sarà difficile verificare (esercizio) che questa riflessione trasforma rette di coefficiente angolare m (non nullo!) in rette di coefficiente angolare $1/m$. Inoltre, la riflessione trasforma rette orizzontali (di coefficiente angolare nullo) in rette verticali (in cui il coefficiente angolare non è definito); quindi punti del grafico di f a tangente orizzontale diventano punti del grafico di f^{-1} a tangente verticale, in cui la retta tangente esiste ma la derivata di f^{-1} no.

Mettendo insieme (5.12) ed (5.14) siamo finalmente in grado di calcolare la derivata di $x^{p/q}$:

$$\frac{d\,x^{p/q}}{dx} = px^{(p-1)/q}\,\frac{1}{q}\,x^{1/q-1} = \frac{p}{q}\,x^{(p/q)-1}$$

per ogni $x \neq 0$ in cui $x^{p/q}$ è definita. In particolare, la formula (5.5) continua a valere per ogni esponente razionale.

5.8 Calcolo di derivate: esponenziali e logaritmi

Una delle conseguenze di (5.5) è che siamo in grado di risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{df}{dx} = x^k$$

per *quasi* ogni $k \in \mathbb{Z}$. Infatti, (5.5) ci dice che

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right) = x^k\ ;$$

quindi (ricordando l'Osservazione 5.9)

$$\frac{df}{dx} = x^k \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + c\ ,$$

con $c \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Attenzione, però: la formula che abbiamo ottenuta *non* ha senso per $k = -1$ (in quanto richiederebbe di dividere per $(-1) + 1 = 0$). E in effetti la derivata di x^0 non è un multiplo di x^{-1}.

Quindi in questo momento non conosciamo alcuna funzione la cui derivata sia un multiplo di x^{-1}; ma rimediamo subito, con un risultato forse inaspettato.

Scriviamo il rapporto incrementale per il logaritmo naturale nel punto $x > 0$. Usando le proprietà dei logaritmi otteniamo

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{x}h\right)^{1/h} .$$

Ma allora ricordando (4.26), e usando la continuità del logaritmo, troviamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \log e^{1/x} = \frac{1}{x} .$$

In altre parole abbiamo dimostrato che

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \ :$$

il logaritmo naturale ha come derivata esattamente x^{-1}. Per trovare la derivata del logaritmo in una base qualsiasi basta allora applicare la formula (4.34) e l'Osservazione 5.11:

$$\frac{d}{dx} \log_p x = \frac{1}{(\log p)x} .$$

Osservazione 5.16 Nella Sezione 4.8 abbiamo parlato della legge di Weber, che dice che la variazione assoluta ΔP dell'intensità percepita è proporzionale alla variazione relativa $\Delta s/s$ dello stimolo, almeno per variazioni assolute piccole dello stimolo. Questa relazione può venire scritta come

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = \frac{\lambda}{s}$$

per un'opportuna costante $\lambda \in \mathbb{R}$. Questa è una affermazione sulla variazione media di P, che però è valida solo per *variazioni assolute piccole* dello stimolo. Nella pratica scientifica questo vuol dire che la nostra relazione in realtà non vale (necessariamente) per la variazione media (in quanto non sappiamo a priori quanto piccole debbano essere le variazioni assolute dello stimolo) ma vale sicuramente per la variazione istantanea. In altre parole, la vera legge di Weber è

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\lambda}{s} .$$

Questa è un'equazione differenziale che ora siamo in grado di risolvere; la relazione fra P ed s dev'essere della forma

$$P(s) = \lambda \log s + c ,$$

per un'opportuna costante $c \in \mathbb{R}$. Scrivendo $c = -\log s_0$, dove $s_0 = e^{-c}$, otteniamo

$$P(s) = \lambda \log(s/s_0) ,$$

che è la formula che avevamo anticipato in (4.37).

Osservazione 5.17 Se f è una funzione derivabile sempre positiva, la formula di derivazione di una funzione composta ci dice che

$$\frac{d}{dx}\log f = \frac{f'}{f} \ .$$

L'esponenziale è la funzione inversa del logaritmo; quindi possiamo usare la formula per la derivazione della funzione inversa trovando

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{1}{1/e^x} = e^x \ .$$

In altre parole, *la funzione esponenziale di base e coincide con la propria derivata!* È questo il motivo per cui i matematici preferiscono usare il numero di Nepero e come base delle funzioni esponenziali.

La formula $a^x = e^{x\log a}$ ci permette poi di calcolare la derivata di qualsiasi funzione esponenziale. Infatti (controlla)

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\exp(x\log a) = \exp(x\log a)\cdot\log a = (\log a)a^x \ .$$

Inoltre, la formula $x^\alpha = \exp(\alpha\log x)$ ci permette di calcolare la derivata di qualsiasi funzione potenza: infatti (verifica)

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}\exp(\alpha\log x) = \exp(\alpha\log x)\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \ ,$$

per cui (5.5) effettivamente vale per ogni esponente $\alpha\in\mathbb{R}$.

Osservazione 5.18 In particolare, la funzione esponenziale risolve l'equazione differenziale

$$\frac{df}{dx} = f \ ;$$

nota che in questa equazione l'incognita f appare in entrambi i membri, contrariamente alle equazioni che avevamo visto finora. Non è difficile verificare che le soluzioni di questa equazione sono tutte e sole le funzioni della forma ce^x con $c\in\mathbb{R}$. Infatti, sia f una soluzione dell'equazione; allora la regola di Leibniz ci dà

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}f) = -e^{-x}f + e^{-x}\frac{df}{dx} = -e^{-x}f + e^{-x}f \equiv 0 \ ;$$

quindi $e^{-x}f\equiv c$, cioè $f(x) = ce^{-x}$, come voluto.

Osservazione 5.19 La formula di derivazione composta ci permette di calcolare la derivata di funzioni della forma $\exp(f)$, con f derivabile. Infatti (verifica)

$$\frac{d}{dx}e^f = f'e^f \ .$$

Possiamo trovare quindi anche la derivata di funzioni della forma f^g, con f, g funzioni derivabili e f sempre positiva. Infatti, si ha $f^g = \exp(g \log f)$, e quindi (controlla)

$$\frac{d}{dx} f^g = g f^{g-1} f' + g' f^g \log f \ .$$

Esempio 5.13 Vogliamo calcolare la derivata di $f(x) = x^{1/x}$ per $x > 0$. L'osservazione precedente ci dà

$$f'(x) = \frac{1}{x} x^{1/x-1} - \frac{1}{x^2} x^{1/x} \log x = x^{1/x-2}(1 - \log x) \ .$$

Curiosità 5.4 A voler essere del tutto precisi, c'è un problema che ancora non abbiamo del tutto risolto: cosa vuol dire elevare un numero positivo a una potenza di esponente irrazionale. Senza questa informazione il limite (4.26) non è del tutto verificato, e quindi tutti i conti fatti in questa sezione non sono completamente dimostrati. Un modo per superare questo problema è stato accennato nella Curiosità 4.8; qui voglio invece descrivere un'altra procedura, che in un certo senso ripercorre il percorso che abbiamo fatto noi ma nel verso opposto.

L'idea è partire da una funzione derivabile definita su $\mathbb{R}^+$, che valga 0 nel punto 1 e la cui derivata sia uguale a $1/x$ (nel prossimo capitolo vedremo come costruire una funzione del genere usando gli integrali); chiamiamo "log" questa funzione. La prima osservazione è che

$$\forall a > 0 \qquad \frac{d}{dx} \text{“log”}(ax) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \ ;$$

quindi deve esistere $c \in \mathbb{R}$ (dipendente da a) tale che "log"(ax) = "log"$x + c$. Ponendo $x = 1$ troviamo c = "log"a, e quindi abbiamo dimostrato che

$$\forall x, y > 0 \qquad \text{“log”}(xy) = \text{“log”}x + \text{“log”}y \ . \tag{5.15}$$

Ora, la derivata di "log" è sempre positiva in $\mathbb{R}^+$; nella Sezione 5.11 vedremo che questo implica che "log" è strettamente crescente. In particolare, è invertibile; indichiamo con "exp" la funzione inversa. Siccome la derivata di "log" non si annulla mai, "exp" è derivabile ovunque, e si verifica come al solito che

$$\frac{d}{dx} \text{“exp”}(x) = \text{“exp”}(x) \ .$$

Inoltre (5.15) implica che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \text{“exp”}(x+y) = \text{“exp”}(x) \cdot \text{“exp”}(y) \ . \tag{5.16}$$

In particolare, se poniamo e = "exp"(1), otteniamo $e^{p/q}$ = "exp"(p/q) per ogni $p/q \in \mathbb{Q}$. Questo suggerisce di *definire* e^x per $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi ponendolo uguale a "exp"(x); in particolare, siccome "exp" è una funzione continua e derivabile, otteniamo che $x \mapsto e^x$ è una funzione continua e derivabile. Per ogni $a > 0$ definiamo allora a^x con la formula a^x = "exp"$(x$"log"$a)$; le formule (5.15) e (5.16) ci assicurano che a^x coincide con la solita definizione di potenza quando x è razionale. Infine,

$$(1+rx)^{1/x} = \text{“exp”}\left(\frac{1}{x}\text{“log”}(1+rx)\right) \ ,$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}(1+rx)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \text{“exp”}\left(\frac{1}{x}\text{“log”}(1+rx)\right) = \text{“exp”}\left(\frac{d\text{“log”}(1+rx)}{dx}(0)\right) = \text{“exp”}(r)\ .$$

In particolare, “exp”(1) è il numero di Nepero, e dunque “exp” coincide con la funzione esponenziale come l'abbiamo definita noi, e “log” è il nostro logaritmo naturale.

5.9 Calcolo di derivate: funzioni trigonometriche

Rimangono da calcolare le derivate delle funzioni trigonometriche, e delle funzioni trigonometriche inverse.

Cominciamo con la funzione seno. Usando le formule di prostaferesi troviamo

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = 2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\sin(h/2)}{h} = \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\sin(h/2)}{h/2}\ .$$

Ricordando (4.39) vediamo che il rapporto incrementale del seno tende a $\cos x$ per h che tende a 0, per cui

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\ .$$

In modo analogo, le formule di prostaferesi per il coseno danno

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\sin(h/2)}{h} = -\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\sin(h/2)}{h/2}\ ,$$

per cui

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\ .$$

La derivata della tangente la otteniamo con la formula di derivazione del quoziente:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

Analogamente si calcola (esercizio) la derivata della cotangente:

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\ .$$

Passiamo alle funzioni trigonometriche inverse. Applicando brutalmente la formula di derivazione di una funzione inversa otteniamo

$$\forall x \in (-1,1) \qquad \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\ .$$

Possiamo scrivere meglio questo risultato. Infatti, si ha $\cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t}$, dove il segno della radice quadrata è uguale al segno di $\cos t$. Siccome per definizione

$x \in (-1,1)$ implica $\arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$, e il coseno è positivo nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, otteniamo

$$\forall x \in (-1,1) \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}\ ,$$

e quindi

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

In maniera analoga (esercizio) si trova

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Osservazione 5.20 Una conseguenza di queste formule è che

$$\frac{d}{dx}\bigl(\arcsin x + \arccos x\bigr) \equiv 0\ ;$$

quindi deve esistere una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\arcsin x + \arccos x \equiv c$. Siccome $\arcsin 0 = 0$ e $\arccos 0 = \pi/2$, otteniamo $c = \pi/2$ e la relazione

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\ ,$$

che forse (ma forse no) avevi già notato quando definimmo le funzioni trigonometriche inverse.

Rimane la derivata dell'arcotangente. La formula di derivazione della funzione inversa ci dà

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \cos^2(\arctan x)\ ;$$

ma anche stavolta possiamo semplificarla. Infatti

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

per cui

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

In particolare, la derivata dell'arcotangente è una funzione razionale.

Con questo abbiamo finito di derivare le funzioni del bestiario. In particolare, abbiamo mantenuto la promessa: *ogni funzione che si ottiene a partire dalle funzioni elementari con le operazioni di somma, sottrazione, prodotto, quoziente, composizione e inversione è derivabile, e la sua derivata si esprime in termini di funzioni elementari.*

Nel resto di questo capitolo, vedremo a cosa servono le derivate.

5.10 La regola di de l'Hôpital

Abbiamo visto che per calcolare le derivate dobbiamo calcolare un limite che è della forma indeterminata 0/0. Più in generale, le derivate possono essere usate per calcolare anche altri limiti della forma indeterminata 0/0.

Il motivo è questo: supponiamo di avere due funzioni f e g derivabili vicino a un punto x_0 e tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$; supponiamo inoltre che $g'(x_0)$ sia diverso da zero. Allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)}{\big(g(x) - g(x_0)\big)/(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \;;$$

la forma indeterminata 0/0 può venire calcolata usando il rapporto delle derivate.

Questo ragionamento può essere perfezionato in modo da potersi applicare in situazioni un poco più generali. Il risultato finale è noto come *regola di de l'Hôpital: supponiamo che f e g siano due funzioni derivabili tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \;,$$

dove x_0 può essere un numero reale o anche $\pm\infty$. Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 (ma non necessariamente in x_0), e che esista finito il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;.$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;.$$

Osservazione 5.21 L'equivalente della regola di de l'Hôpital vale anche per limiti da destra o da sinistra.

Vediamo su alcuni esempi come si usa la regola di de l'Hôpital.

Esempio 5.14 Vogliamo calcolare il limite di $(e^x - 1)/x$ per x che tende a zero. Ponendo $f(x) = e^x - 1$ e $g(x) = x$, le ipotesi della regola di de l'Hôpital sono soddisfatte: infatti $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 quando $x \to x_0 = 0$, e g' non si annulla mai. Allora derivando numeratore e denominatore otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 \;.$$

Esempio 5.15 Stavolta scegliamo $x_0 = 1$, $f(x) = x^\alpha - 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e $g(x) = x - 1$. Di nuovo le ipotesi sono tutte soddisfatte, per cui

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1} = \alpha \;.$$

Esempio 5.16 Prendiamo $x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ e $g(x) = 1/x$. Siccome $g'(x) = -1/x^2$ non si annulla per $x > 0$ le ipotesi della regola di de l'Hôpital sono soddisfatte, e otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{1/x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1/x^2} = 1 .\end{aligned}$$

Osservazione 5.22 Il limite del precedente esempio può essere scritto anche come

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) ,$$

che è una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$. Tutte le forme indeterminate di questo tipo possono essere ricondotte alla forma indeterminata $0/0$: infatti, se $g(x) \to \pm\infty$ per $x \to x_0$, allora $1/g(x) \to 0$ per $x \to x_0$, e scrivendo

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

abbiamo trasformato la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ nella forma indeterminata $0/0$ studiabile con l'Hôpital. Analogamente, scrivendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

si trasforma qualsiasi forma indeterminata ∞/∞ nella forma indeterminata $0/0$.

Esempio 5.17 Vogliamo calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\tan x}{(x-\pi/2)^{-1}} ,$$

che è una forma indeterminata ∞/∞. Usando l'osservazione precedente e la regola di de l'Hôpital otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\tan x}{(x-\pi/2)^{-1}} &= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{x-\pi/2}{\cot x} = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{1}{-1/\sin^2 x} \\ &= -\lim_{x\to\pi/2^-} \sin^2 x = -1 .\end{aligned}$$

Osservazione 5.23 Può capitare che anche il rapporto f'/g' dia origine a una forma indeterminata del tipo $0/0$. In quel caso, se f e g hanno anche le derivate seconde e $g''(x) \neq 0$ vicino a x_0 (ma non necessariamente in x_0) si può applicare l'Hôpital una seconda volta e tentare di ricavare il limite di f'/g' (e quindi quello di f/g) calcolando il limite di f''/g''.

Esempio 5.18 Vogliamo calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)}{(x-1)^2} .$$

Applicando una prima volta l'Hôpital otteniamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1} - \alpha}{2(x-1)} ,$$

che è ancora una forma indeterminata del tipo $0/0$. Applicando ancora una volta l'Hôpital troviamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1} - \alpha}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} ,$$

e quindi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} .$$

Osservazione 5.24 *Attenzione:* per poter ripetere l'Hôpital bisogna essere sicuri che anche il limite di f'/g' dia una forma indeterminata del tipo $0/0$. Se non lo è, il procedimento non funziona! Per esempio, il conto seguente è sbagliato:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{2x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3 .$$

Infatti, il secondo limite non è una forma indeterminata, in quanto per $x \to 1$ il numeratore tende a $6 \cdot 1 - 2 = 4$ e il denominatore a $2 \cdot 1 - 1 = 1$. Quindi

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{2x-1} = \frac{4}{1} = 4 \neq 3 .$$

Osservazione 5.25 La regola di de l'Hôpital non è una panacea universale: non permette di calcolare proprio tutti i limiti della forma $0/0$. Per esempio, se tentiamo di applicare l'Hôpital al quoziente $e^{-1/x}/x$ per $x \to 0^+$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} ,$$

che è ancora una forma indeterminata $0/0$. Riapplicando l'Hôpital troviamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3} ,$$

che è sempre del tipo $0/0$ pure peggio di prima. Ripetere ancora l'Hôpital non aiuta; si ottengono sempre quozienti del tipo $e^{-1/x}/(n!x^{n+1})$, cioè forme indeterminate $0/0$. Per calcolare questo limite servono tecniche più sofisticate, che vedremo più avanti.

Esercizio 5.1 *Vedi cosa succede se tenti di calcolare usando l'Hôpital i seguenti limiti (mi raccomando, ricordati prima di tutto di trasformarli nella forma* 0/0*):*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\ , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}\ , \quad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}\ , \quad \lim_{x\to 0^+} x\log x\ .$$

Nei dintorni della regola di de l'Hôpital circola una terminologia che è spesso utile, e che adesso introduciamo.

Diremo che una funzione f è *infinitesima* in un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\ ;$$

diremo invece che è *infinita* in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$$

(usiamo il modulo perché non ci interessa distinguere fra $+\infty$ e $-\infty$; come esercizio verifica che se f è infinita in x_0, ed è continua fuori da x_0, allora esistono i limiti destro e sinistro di $f(x)$ per $x \to x_0$, valgono $+\infty$ o $-\infty$, ma possono essere diversi).

Dunque una funzione infinitesima (rispettivamente, infinita) in x_0 è una funzione che diventa arbitrariamente piccola (rispettivamente, di modulo arbitrariamente grande) vicino a x_0. In molti contesti, è importante saper confrontare due funzioni infinitesime nello stesso punto x_0, e decidere quale delle due è più piccola.

Date due funzioni f e g infinitesime in x_0, diremo che g è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a f in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\ .$$

In altre parole, il rapporto $g(x)/f(x)$ diventa arbitrariamente piccolo per x sufficientemente vicino a x_0, che vuol dire che l'infinitesimo g è molto più piccolo dell'infinitesimo f vicino a x_0.

Se g è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a f in x_0, si scrive

$$g = o(f)\ ,$$

che si legge "g è un o piccolo di f".

Se invece

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ ,$$

diremo che g ed f sono infinitesimi *dello stesso ordine* in x_0; in tal caso abbiamo

$$g(x) \approx cf(x) \qquad \text{e} \qquad f(x) \approx \frac{1}{c}\, g(x)\ .$$

L'interesse di queste nozioni è che, in molte situazioni, *è ragionevole trascurare gli infinitesimi di ordine superiore.* Infatti, supponiamo di avere due funzioni f

e $h = f + g$, dove $g = o(f)$, cioè g è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a f in un punto x_0. Allora possiamo scrivere

$$h(x) = f(x) + g(x) = f(x)\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) ,$$

per cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1 .$$

Ricordando il simbolo $\approx$ introdotto nel Capitolo 4, abbiamo quindi fatto vedere che

$$f(x) + o\big(f(x)\big) \approx f(x) ;$$

in altre parole, vicino a x_0 la presenza dell'infinitesimo di ordine superiore non modifica sostanzialmente il comportamento della funzione — e quindi può spesso essere trascurato. Nella Sezione 5.14 utilizzeremo in maniera sistematica questa possibilità.

Osservazione 5.26 Attenzione: gli infinitesimi di ordine superiore si possono trascurare quando si è abbastanza vicino a x_0. Per sapere in dettaglio quanto vicino è "abbastanza" vicino, occorrono stime precise su quanto piccolo è l'infinitesimo di ordine superiore. Stime di questo genere le vedremo nella Sezione 5.13; in assenza di stime, si procede incrociando le dita sperando di non stare commettendo errori troppo grossi.

Osservazione 5.27 Gli infinitesimi in $x_0 \in \mathbb{R}$ più semplici che vengono in mente sono le funzioni $(x - x_0)^k$ con $k \in \mathbb{N}^*$; gli infinitesimi in $\pm\infty$ più semplici sono le funzioni x^{-k}, sempre con $k \in \mathbb{N}^*$. Un problema che si pone spesso è confrontare un infinitesimo f qualsiasi con uno di questi infinitesimi standard — che è quanto abbiamo fatto negli Esempi 5.14–5.16.

Un'ultima osservazione: il simbolo o si usa anche per gli infiniti. Se f e g sono infinite in x_0, diremo che g è un *infinito di ordine inferiore* rispetto a f in x_0, e scriveremo $g = o(f)$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 .$$

In altre parole, $g = o(f)$ significa che il rapporto g/f è infinitesimo in x_0, indipendentemente dal fatto che f o g siano infinite, infinitesime o altro.

Esempio 5.19 Attenzione: $x^2 = o(x)$ come infinitesimi in 0, ma $x = o(x^2)$ come infiniti in $+\infty$.

Curiosità 5.5 Nella letteratura si trovano anche formule del tipo $g = O(f)$, che si legge "g è un O grande di f". Sfortunatamente, il significato del simbolo O può cambiare da testo a testo. I tre significati più comuni sono:

(a) $g = O(f)$ in x_0 se il limite $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)|/|f(x)|$ esiste finito e diverso da zero;

(b) $g = O(f)$ in x_0 se esistono due costanti m, $M > 0$ tali che $m < |g(x)|/|f(x)| < M$ per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0;

(c) $g = O(f)$ in x_0 se esiste una costante $M > 0$ tale che $|g(x)| \leq M|f(x)|$ per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0.

Ti lascio la cura di verificare che se $g = O(f)$ secondo il significato (a) allora $g = O(f)$ secondo il significato (b), e che se $g = O(f)$ secondo il significato (b) allora $g = O(f)$ secondo il significato (c), ma che nessuno dei viceversa è vero (esistono funzioni f e g tali che $g = O(f)$ secondo il significato (c) ma non secondo il significato (b), e così via). Dunque se in un testo troverai il simbolo O assicurati di controllare cosa l'autore vuol dire con quel simbolo.

5.11 Massimi e minimi

Uno degli usi più comuni delle derivate è per trovare massimi e minimi di una funzione; in questa sezione vedremo perché e come.

Iniziamo cercando di capire il significato del segno della derivata. Supponiamo che f sia una funzione derivabile in x_0, e che si abbia $f'(x_0) > 0$. Siccome $f'(x_0)$ è il limite del rapporto incrementale, questo implica che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

non appena $|h|$ è abbastanza piccolo. Tenendo presente il segno di h ricaviamo quindi

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

non appena $h > 0$ è abbastanza piccolo. Questa osservazione suggerisce la seguente definizione: diremo che f è *crescente* nel punto x_0 se $x_1 < x_0 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ non appena x_1 e x_2 sono sufficientemente vicini a x_0. Allora abbiamo appena fatto vedere che *$f'(x_0) > 0$ implica che f è crescente in x_0.*

Osservazione 5.28 Se una funzione è strettamente crescente nel senso usuale in un intervallo (a, b) allora è anche crescente in tutti i punti dell'intervallo. Attenzione, però: esistono funzioni crescenti in un punto x_0 che non sono crescenti in nessun intervallo contenente x_0: per esempio, la funzione

$$f(x) = x\left(\frac{3}{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$$

è crescente in 0 (per il semplice motivo che $f(x) < 0$ se $x < 0$ e $f(x) > 0$ se $x > 0$) ma non è crescente in nessun intervallo contenente l'origine.

In modo analogo (controlla!) si dimostra che *$f'(x_0) < 0$ implica che f è decrescente in x_0,* cioè che $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$ non appena $x_1 < x_0 < x_2$ e x_1 e x_2 sono sufficientemente vicini a x_0.

Viceversa, supponiamo che f sia (derivabile e) crescente in x_0. Possiamo dedurre che la derivata è positiva in x_0? Quasi. Infatti, se f è crescente in x_0 abbiamo

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

per $h > 0$ piccolo, ovvero (tenendo presente il segno di h)

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$$

per ogni h sufficientemente piccolo (positivo o negativo che sia). Passando al limite deduciamo

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \;,$$

cioè la derivata in x_0 è non negativa. Un ragionamento analogo (che sicuramente farai) mostra che se f è decrescente in x_0 allora $f'(x_0) \leq 0$; anche stavolta compare il minore o uguale, e non il minore stretto. Questo fa parte della natura delle cose: come mostra il prossimo esempio, *dobbiamo* ammettere la possibilità che la derivata sia nulla in un punto in cui f è crescente o decrescente; può effettivamente succedere.

Esempio 5.20 Sia $f(x) = x^3$. Allora f è crescente in tutti i punti, e in particolare anche nell'origine; ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla nell'origine. Quindi f è crescente in 0 anche se $f'(0) = 0$. Analogamente, la funzione $g(x) = -x^3$ è decrescente nell'origine ma $g'(0) = 0$.

Osservazione 5.29 Il ragionamento precedente mostra (esercizio per te) che se f è crescente (rispettivamente, decrescente) nel senso usuale in tutto un intervallo (a,b), allora $f'(x) \geq 0$ (rispettivamente, $f'(x) \leq 0$) per ogni $x \in (a,b)$. Viceversa, si può dimostrare che se f' è positiva (rispettivamente, negativa) in tutti i punti di un intervallo (a,b), allora f è strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) in (a,b).

Curiosità 5.6 Di nuovo, lo strumento che permette di passare dall'informazione puntuale all'informazione in tutto un intervallo è il teorema del valor medio di Lagrange (Curiosità 5.1). Infatti, supponiamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$, e scegliamo due punti qualsiasi $x_1,\ x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$. Allora il Teorema del valor medio di Lagrange ci dice che esiste $\overline{x} \in (x_1,x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\overline{x})$, e quindi $f(x_1) < f(x_2)$ perché $f'(\overline{x}) > 0$ per ipotesi. Analogamente, se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b)$ deduciamo che f è strettamente decrescente in (a,b).

Riassumendo, abbiamo dimostrato che

$$\begin{aligned} f'(x_0) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ è crescente in } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) \geq 0 \;; \\ f'(x_0) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ è decrescente in } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) \leq 0 \;. \end{aligned}$$

Che succede nei punti in cui la derivata si annulla? Come vedremo, possono succedere varie cose, di cui alcune particolarmente importanti; ma intanto introduciamo una definizione. Un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ sarà detto *punto critico* (o *punto stazionario*, o *estremo*) della funzione f.

I ragionamenti precedenti ci forniscono subito due categorie di punti critici. Diremo che un punto x_0 è un *massimo locale* (o *relativo*) di una funzione f se $f(x_0) \geq f(x)$ per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0. Analogamente, x_0 è un *minimo locale* (o *relativo*) di una funzione f se $f(x_0) \leq f(x)$ per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0.

Chiaramente, se x_0 è un minimo o un massimo locale per f allora f non può essere né crescente né decrescente in x_0; quindi $f'(x_0)$ non può essere né positiva né negativa, per cui necessariamente $f'(x_0) = 0$. In altre parole, *minimi e massimi locali sono sempre punti critici.* I punti critici che non sono né minimi locali né massimi locali sono chiamati *punti di flesso* (e a volte si aggiunge *orizzontale,* per ricordare che la retta tangente in quel punto è orizzontale).

Osservazione 5.30 Attenzione a distinguere fra massimi e minimi locali e massimi e minimi globali. Un punto x_0 è detto di *massimo globale* (o *assoluto*) per una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ se $f(x_0) \geq f(x)$ per *ogni* punto $x \in I$ del dominio di f, e non solo per i punti x sufficientemente vicini a x_0. Analogamente, x_0 è un punto di *minimo globale* (o *assoluto*) per una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ se $f(x_0) \leq f(x)$ per *ogni* punto $x \in I$ del dominio di f. La derivata di f in un punto x_0 dipende solo dal comportamento di f vicino a x_0; quindi usando solo le derivate non siamo in grado di identificare minimi e massimi globali fra i minimi e massimi locali. Sapere quanto fa la derivata in un punto non dice nulla su cosa succede a duecento chilometri (o secondi, o quale che sia l'unità di misura) da lì. Più in generale, le derivate *misurano solo fenomeni locali,* e non fenomeni globali.

Osservazione 5.31 Un'altra avvertenza importante è che se una funzione f ha come dominio un intervallo chiuso $[a, b]$, allora massimi e minimi globali potrebbero essere negli estremi dell'intervallo a e b *anche se la derivata* (destra o sinistra a seconda dei casi) *non si annulla nell'estremo*[3]. Per esempio, la Figura 5.3 mostra il grafico di una funzione con 6 punti critici interni all'intervallo di definizione, di cui 2 sono massimi locali, 1 un punto di flesso, e 3 minimi locali. Il minimo globale è uno dei punti di minimo locale, ma il massimo globale è uno degli estremi dell'intervallo. Di conseguenza, *per trovare i minimi e i massimi globali di una funzione bisogna controllare sia i punti critici interni sia gli estremi dell'intervallo di definizione.*

Una domanda che sorge spontanea a questo punto è: è possibile usare la derivata per distinguere un punto di minimo locale da un punto di massimo locale? La risposta, come vedremo fra poco, è che si può fare spesso usando la derivata della derivata.

La derivata f' di una funzione f è, a sua volta, una funzione; quindi possiamo provare a derivarla. La derivata della derivata (quando esiste) si chiama *derivata seconda,* e si indica con i simboli

$$f'' \qquad \text{oppure} \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} \,.$$

[3] Questo non dovrebbe sorprenderti troppo: se ripensi al ragionamento che abbiamo fatto, per stabilire che un punto x_0 di massimo o minimo locale era un punto critico abbiamo avuto bisogno di esaminare la funzione da entrambi i lati di x_0, cosa che non è possibile fare negli estremi dell'intervallo di definizione.

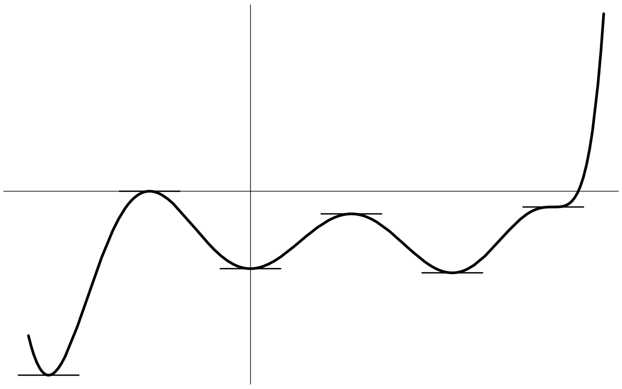

Figura 5.3 $f(x) = -\frac{10067}{360} + 54x^2 - 12x^3 - \frac{147x^4}{4} + \frac{49x^5}{5} + 7x^6 - 2x^7 - \frac{3x^8}{8} + \frac{x^9}{9}$, $x \in [-2.2, 3.5]$.

Osservazione 5.32 A volte serve considerare anche la derivata della derivata seconda, che si chiama *derivata terza,* e si indica con i simboli f''' oppure $\frac{d^3 f}{dx^3}$. Più in generale, se deriviamo n volte una funzione f otteniamo la *derivata di ordine* n, che si indica con i simboli

$$f^{(n)} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{d^n f}{dx^n} \,.$$

Il segno della derivata seconda segnala se la derivata prima è crescente o decrescente; possiamo usare questo fatto per identificare massimi e minimi locali.

Sia allora x_0 un punto critico per una funzione f (cioè $f'(x_0) = 0$), e supponiamo che la derivata seconda di f sia (calcolabile e) positiva in x_0, cioè $f''(x_0) > 0$. Questo vuol dire che f' è crescente in x_0; quindi, essendo $f'(x_0) = 0$, otteniamo che $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ (sufficientemente vicino a x_0), e che $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ (sufficientemente vicino a x_0). Ma allora f è decrescente prima di x_0 e crescente dopo x_0 — che vuol dire esattamente che x_0 è un minimo locale.

In altre parole, abbiamo dimostrato che

$$f'(x_0) = 0 \text{ e } f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \text{ è un minimo locale.}$$

In modo analogo si dimostra (esercizio) che

$$f'(x_0) = 0 \text{ e } f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \text{ è un massimo locale.}$$

Quindi il segno della derivata seconda ci fornisce un criterio per stabilire se un punto critico è un minimo locale o un massimo locale.

Osservazione 5.33 Attenzione: se $f''(x_0) = 0$ a priori può succedere di tutto. Per esempio, le tre funzioni $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = -x^4$ hanno tutte derivate prime e seconde nulle in 0, ma 0 è un punto di flesso per f, un minimo locale per g e un massimo locale per h.

CURIOSITÀ 5.7 Più in generale, supponiamo che f si possa derivare n volte in x_0, e che si abbia $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ma $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora si può far vedere che

- se n è dispari allora x_0 è un punto di flesso;
- se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è un minimo locale;
- se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è un massimo locale.

Vediamo ora come applicare quanto visto finora in un problema concreto.

ESEMPIO 5.21 È noto che i piccioni viaggiatori non amano volare a lungo sopra ampi specchi d'acqua (per esempio, laghi), e che spesso per evitarlo compiono delle deviazioni che allungano il percorso totale. Non è noto con sicurezza il motivo di questo comportamento; per gli scopi di questo esempio, supporremo che sia dovuto al fatto che di giorno sui laghi si formano correnti d'aria discendenti (causate dal raffreddamento dell'aria sopra la superficie dell'acqua), per cui i piccioni per rimanere in quota devono spendere più energia sopra il lago di quanto ne spendano sopra la terra. Siccome il piccione tende a scegliere il proprio percorso in modo da minimizzare l'energia necessaria per giungere al punto d'arrivo, questo meccanismo potrebbe spiegare il comportamento dei piccioni.

Vediamo cosa di applicare questo modello alla situazione illustrata nella Figura 5.4. Un piccione viaggiatore viene liberato nel punto A sulla sponda ovest di un lago, e deve raggiungere il punto C sulla sponda sud. Il tragitto più breve sarebbe il segmento $\overline{AC}$, ma non è detto che sia il tragitto che minimizza l'energia. Supponendo, per semplicità, che la sponda sud del lago sia più o meno rettilinea, vogliamo trovare il punto P lungo la costa tale che il tragitto formato dal segmento $\overline{AP}$ seguito dal segmento $\overline{PC}$ minimizzi l'energia.

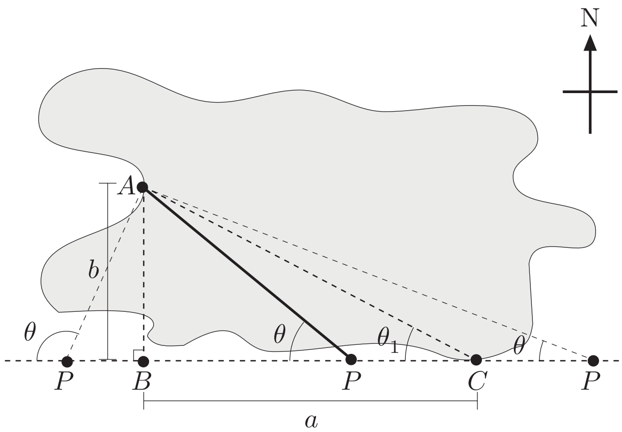

Figura 5.4 Piccioni viaggiatori.

Introduciamo alcuni dati. Indichiamo con B la proiezione di A sulla retta est-ovest passante per C, con $a = |BC|$ la lunghezza del segmento $\overline{BC}$, e con $b = |AB|$ la lunghezza del segmento $\overline{AB}$. In particolare, la lunghezza del segmento $\overline{AC}$ è $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Indichiamo poi con E_ℓ l'energia per unità di lunghezza necessaria per volare sopra il lago, e con E_t l'energia per unità di lunghezza necessaria per volare sopra la terra. La nostra ipotesi è che E_ℓ sia maggiore di E_t, cioè che

$$k = \frac{E_\ell}{E_t} > 1 .$$

L'energia necessaria per compiere il percorso APC è quindi

$$E(P) = E_\ell |AP| + E_t |PC| ;$$

dobbiamo trovare P in modo da minimizzare $E(P)$.

Per poter effettuare i conti, introduciamo l'angolo θ fra il segmento $\overline{AP}$ e il segmento $\overline{BC}$; è chiaro (vedi anche la Figura 5.4) che l'angolo θ identifica univocamente il punto P. Abbiamo

$$|AP| = \frac{b}{\sin\theta} ;$$

inoltre, se P si trova fra B e C allora

$$|PC| = a - |BP| = a - |AP|\cos\theta = a - \frac{b\cos\theta}{\sin\theta} .$$

Attenzione: questa formula vale solo se P si trova fra B e C, ovvero, in termini di angoli, se e solo se $\theta_1 \le \theta \le \pi/2$, dove θ_1 è l'angolo fra $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e soddisfa

$$\cos\theta_1 = \frac{a}{|AP|} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} .$$

Discuteremo dopo cosa succede se θ non appartiene all'intervallo $[\theta_1, \pi/2]$.

Con queste notazioni, la funzione da minimizzare diventa

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_\ell \frac{b}{\sin\theta} + E_t\left(a - \frac{b\cos\theta}{\sin\theta}\right) = aE_t + b\frac{E_\ell - E_t\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= aE_t + bE_t\,\frac{k-\cos\theta}{\sin\theta} . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Per trovare il punto di minimo assoluto, cominciamo col derivare:

$$E'(\theta) = bE_t \frac{\sin^2\theta - \cos\theta(k-\cos\theta)}{\sin^2\theta} = bE_t \frac{1-k\cos\theta}{\sin^2\theta} . \tag{5.18}$$

Quindi l'unico punto critico di E è il punto θ_0 tale che

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{k} , \tag{5.19}$$

cioè $\theta_0 = \arccos k^{-1} \in (0, \pi/2)$. Verifichiamo che è un minimo calcolando la derivata seconda:

$$E''(\theta) = bE_t \left(\frac{k \sin\theta}{\sin^2\theta} + (1 - k\cos\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin^2\theta} \right) \right) ,$$

per cui

$$E''(\theta_0) = \frac{bE_t k}{\sin\theta_0} > 0 ,$$

e θ_0 è effettivamente un minimo.

Abbiamo quindi identificato il punto P cercato; è il punto corrispondente all'angolo θ_0 soddisfacente la relazione (5.19). Nota un fatto interessante: θ_0 dipende solo dal rapporto k fra le energie, e non dalle dimensioni del lago (né dalla posizione dei punti di partenza e arrivo!). In particolare, questo vuol dire che il piccione può essere in grado di determinare θ_0 (e quindi la direzione in cui volare) semplicemente stando sul lago e confrontando l'energia che spende per volarci sopra con l'energia che spende sulla terra; quindi il piccione è in grado di stabilire la rotta solo usando informazioni locali.

Il nostro lavoro non è ancora terminato. Come abbiamo già notato, la formula (5.17) vale solo per $\theta \in [\theta_1, \pi/2]$; quindi abbiamo trovato il punto di minimo *solo se θ_0 appartiene a questo intervallo,* cioè solo se $\theta_1 \leq \theta_0 \leq \pi/2$, ovvero (ricordando che il coseno è decrescente in $[0, \pi/2]$) solo se

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} = \cos\theta_1 \geq \cos\theta_0 = \frac{1}{k} ,$$

che è equivalente a

$$k \geq \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} . \tag{5.20}$$

Se questa condizione non è soddisfatta, il punto di minimo θ_0 non appartiene all'intervallo $[\theta_1, \pi/2]$, per cui il minimo di E in questo intervallo dev'essere in uno degli estremi (non essendoci altri punti critici interni). Ora, (5.18) ci dice che se $\theta > \theta_0$ allora $E'(\theta) > 0$. Questo vuol dire che se $\theta_0 < \theta_1$ allora la funzione E è crescente nell'intervallo $[\theta_1, \pi/2]$, per cui il valore minimo è assunto in θ_1. In altre parole, *se* (5.20) *non è soddisfatta allora il percorso che minimizza l'energia è il segmento $\overline{AC}$.* Questo è ragionevole: infatti se (5.20) non è soddisfatta allora l'altezza nord-sud del lago è molto maggiore della larghezza est-ovest, per cui in ogni caso la maggior parte del tragitto deve essere sul lago, e il risparmio di energia ottenuto volando sopra un pezzo di costa non compensa l'allungamento del percorso.

Per essere sicuri di avere effettivamente considerato tutti i casi possibili, troviamo la formula dell'energia anche per P a est di C o a ovest di B. Se P è a est di C la formula diventa

$$E_{\text{est}}(\theta) = E_\ell |AP| + E_t |PC| = bE_t \frac{k + \cos\theta}{\sin\theta} - aE_t ,$$

valida per $\theta \in (0, \theta_1]$. Derivando troviamo

$$E'_{\text{est}}(\theta) = -bE_t \frac{1 + k\cos\theta}{\sin^2\theta} < 0$$

in tutto l'intervallo; quindi E_{est} è decrescente in $(0, \theta_1]$ e ha minimo in $\theta = \theta_1$, come previsto. Infine, se P è a ovest di B la formula diventa

$$E_{\text{ovest}}(\theta) = E_\ell |AP| + E_t |PC| = bE_t \frac{k + \sin\theta}{\cos\theta} + aE_t \ ,$$

valida per $\theta \in [\pi/2, \pi)$. Derivando troviamo

$$E'_{\text{ovest}}(\theta) = bE_t \frac{1 + k\sin\theta}{\cos^2\theta} > 0$$

in tutto l'intervallo; quindi E_{ovest} è crescente in $[\pi/2, \pi)$ e ha minimo in $\theta = \pi/2$. Siccome $E_{\text{ovest}}(\pi/2) = E(\pi/2)$, scegliere P a ovest di B non fornisce un tragitto con energia minore di quelli che avevamo esaminato prima.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che *se i dati del problema soddisfano la condizione* (5.20) *allora il tragitto migliore è quello corrispondente all'angolo θ_0 dato da* (5.19)*; se invece i dati del problema non soddisfano* (5.20) *allora il tragitto migliore è il segmento $\overline{AC}$.*

Questo risultato suggerisce esperimenti successivi che potrebbero gettare luce sui meccanismi di volo dei piccioni viaggiatori. Infatti, mentre, come abbiamo visto, il calcolo dell'angolo θ_0 può essere effettuato dal piccione soltanto in base alla situazione locale, la condizione (5.20) dipende dalla geometria globale del problema, e, in particolare, dalle dimensioni del lago. Si possono quindi progettare degli esperimenti (per esempio, variando la posizione del punto A di partenza) in cui la condizione (5.20) non sia soddisfatta. Se il piccione parte volando nella direzione data dall'angolo θ_0, allora dovremo dedurre che, almeno all'inizio, stabilisce la propria rotta solo in base a informazioni locali; se invece parte fin dall'inizio nella direzione data dall'angolo θ_1, allora dovremo dedurre che il piccione è in possesso di informazioni globali sulla geometria della situazione, e che determina la propria rotta in base a queste informazioni — e quindi diventa interessante scoprire di quali informazioni è in possesso.

In conclusione, abbiamo visto come trasformare un problema di etologia in un modello matematico, e come lo studio attento del modello possa a sua volta indicare nuovi problemi etologici e suggerire ulteriori esperimenti.

5.12 Studio qualitativo di funzioni

Torniamo ora alla situazione generale, e cerchiamo di vedere se il segno della derivata seconda ha un significato anche al di fuori dei punti critici.

Se $f''(x_0) > 0$ allora $f'(x_0)$ è crescente in x_0. Questo vuol dire che, andando da sinistra verso destra, la pendenza della retta tangente al grafico di f sta aumentando: il grafico di f sta ruotando in senso antiorario (vedi la Figura 5.5).

Visivamente, il grafico di f ha la concavità rivolta verso l'alto; in tal caso diremo che la funzione f è *convessa* in x_0.

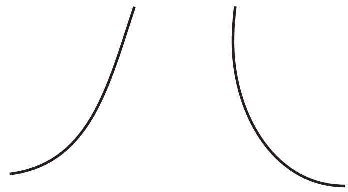

Figura 5.5 Funzioni convesse.

Se invece $f''(x_0) < 0$ allora $f'(x_0)$ è decrescente in x_0. Questo vuol dire che, andando da sinistra verso destra, la pendenza della retta tangente al grafico di f diminuisce: il grafico di f ruotando in senso orario (vedi la Figura 5.6). Visivamente, il grafico di f ha la concavità rivolta verso il basso; in tal caso diremo che la funzione f è *concava* in x_0.

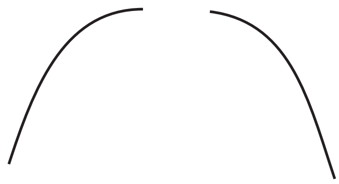

Figura 5.6 Funzioni concave.

CURIOSITÀ 5.8 Si può definire cos'è una funzione convessa anche senza tirare in ballo le derivate. Essenzialmente, si dice che una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è *convessa* se per ogni $x_1 < x_2$ in I il grafico di f in $[x_1, x_2]$ è sotto il segmento secante da $\big(x_1, f(x_1)\big)$ a $\big(x_2, f(x_2)\big)$. Si può allora dimostrare che ogni funzione che ammetta derivata seconda sempre positiva è convessa anche in questo senso.

Rimangono i punti x_0 in cui la derivata seconda si annulla; e, al solito, può succedere di tutto (nel senso che il grafico della funzione può sia cambiare sia non cambiare concavità passando attraverso x_0); vedi l'Osservazione 5.32. I punti in cui $f''(x_0) = 0$ vengono detti *punti di flesso* (*obliquo* se $f'(x_0) \neq 0$, cioè se la retta tangente non è orizzontale).

A questo punto abbiamo abbastanza tecniche per effettuare quello che si chiama *studio qualitativo delle funzioni.* In altre parole, siamo in grado (almeno per funzioni che ammettono due derivate) di avere un'idea piuttosto precisa, anche se qualitativa, dell'andamento del grafico della funzione. Tipicamente, si procede nel modo seguente:

– si identifica il dominio di definizione della funzione, trovando in particolare eventuali punti singolari e gli estremi degli intervalli che compongono il dominio di definizione;
– si studia il segno della funzione, in modo da capire in quali intervalli è positiva e in quali è negativa (e in quali punti si annulla);

– si studia il segno della derivata prima, in modo da capire in quali intervalli la funzione è crescente e in quali è decrescente; inoltre, si calcolano i punti critici (cioè gli zeri della derivata), e il valore della funzione in questi punti, in modo da poter porre sul grafico tutti i minimi, massimi e punti di flesso;
– si studia il segno della derivata seconda, in modo da capire in quali intervalli la funzione è convessa e in quali è concava, e da distinguere minimi e massimi locali dai punti di flesso;
– si calcola il limite (se esiste) della funzione nei punti singolari, negli estremi degli intervalli di definizione, e all'infinito (se ha senso farlo).

Non è detto che si riescano a effettuare tutti questi passaggi; ma più se ne fanno, maggiore è la precisione con sui si traccia il grafico.

Esempio 5.22 Vogliamo effettuare uno studio qualitativo della funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \; .$$

È una funzione razionale; quindi il dominio è costituito da tutta le retta reale tolti gli eventuali zeri del denominatore. In questo caso il denominatore $x^2 + 1$ non si annulla mai, per cui f è definita su tutto l'asse reale.

Siccome il denominatore è sempre positivo, il segno e gli zeri di f coincidono con il segno e gli zeri del numeratore $2x^2 - 1$. Le tecniche che abbiamo visto nel Capitolo 4 ci dicono quindi che $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1/\sqrt{2}$, e che $f(x)$ è negativo per $x \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, e positiva fuori da $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Riportiamo queste informazioni su un grafico come nella Figura 5.7.(a).

La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2} \; .$$

Quindi f' si annulla solo in 0, è negativa per $x < 0$, ed è positiva per $x > 0$. Di conseguenza, f è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$, e ha un punto critico in $x = 0$, dove vale $f(0) = -1$. Nota che possiamo già adesso stabilire che 0 è un minimo assoluto di f, per almeno due motivi. Prima di tutto, abbiamo appena visto che f è decrescente prima di 0 e crescente poi; quindi 0 è un minimo — necessariamente assoluto dato che non ci sono altri punti critici e il dominio di f non ha estremi. Ma possiamo arrivare alla stessa conclusione anche senza bisogno di studiare il segno della derivata. Infatti, f deve avere un minimo nell'intervallo chiuso $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$; siccome f è negativa nell'interno dell'intervallo, e nulla negli estremi, il minimo dev'essere un punto critico interno all'intervallo; siccome 0 è l'unico punto critico, dev'essere il minimo. La Figura 5.7.(b) riassume le informazioni trovate finora.

La derivata seconda di f è

$$f''(x) = \frac{6(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)(2x)(6x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-6(3x^4 + 2x^2 - 1)}{(x^2+1)^4} \; .$$

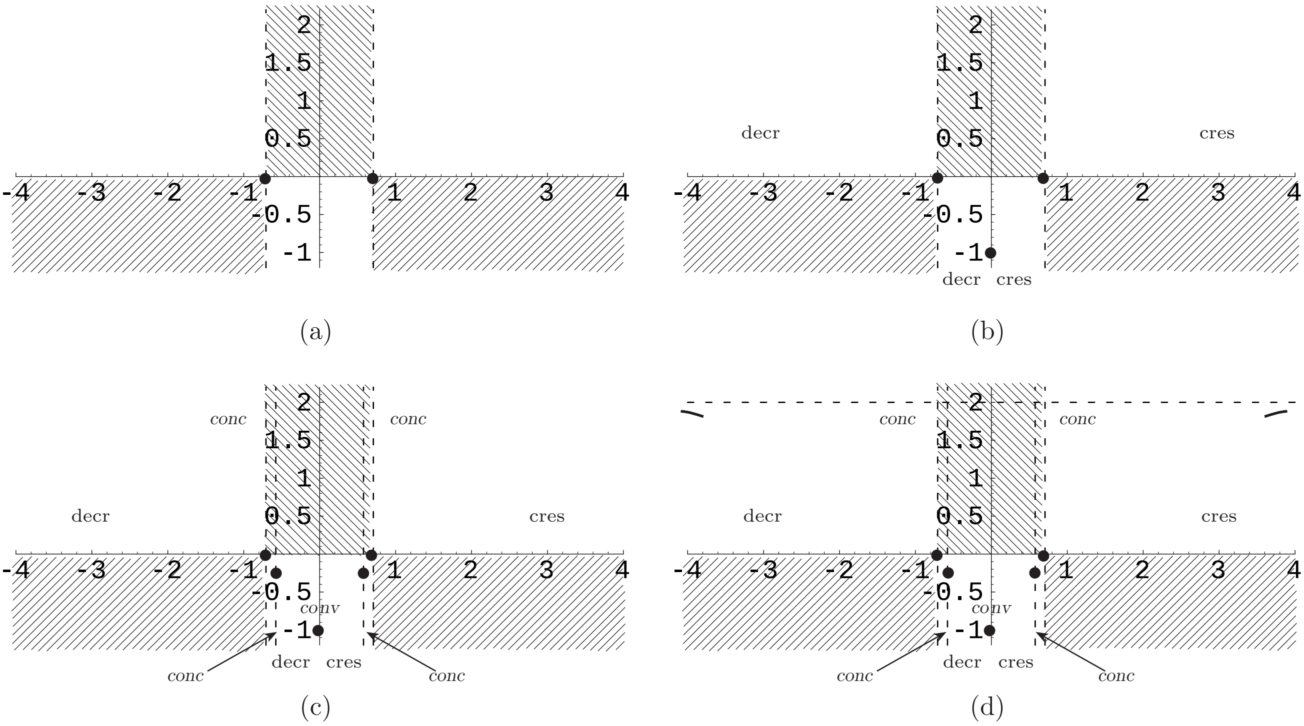

Figura 5.7 Studio qualitativo di funzione.

Anche stavolta il denominatore è sempre positivo, per cui per trovare il segno di f'' ci basta studiare il segno del numeratore. Poniamo $y = x^2$; allora il numeratore si annulla se e solo se $-6(3y^2 + 2y - 1) = 0$, cioè se e solo se $y = -1$ o $y = 1/3$; è positivo (ricorda che il coefficiente di y^2 è -18) se e solo se $y \in (-1, 1/3)$, ed è negativo se e solo se $y \notin [-1, 1/3]$. Ora, $y = x^2$ non può mai essere negativo; quindi $f''(x)$ si annulla se e solo se $x^2 = 1/3$, è positivo se e solo se $x^2 \in [0, 1/3)$, ed è negativo se e solo se $x^2 > 1/3$. Estraendo le radici quadrate otteniamo quindi che $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1/\sqrt{3}$, $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, e $f''(x) < 0$ se e solo se $x \notin [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$. Dunque abbiamo due punti di flesso obliquo (non sono punti critici) in cui f vale $f(\pm 1/\sqrt{3}) = -1/4$, la funzione f è convessa fra i due punti di flesso, ed è concava all'esterno di essi. È importante vedere dove si situano i punti di flesso rispetto agli altri punti significativi (gli zeri e i punti critici) che abbiamo individuato: siccome $0 < 1/\sqrt{3} < 1/\sqrt{2}$, i punti di flesso si trovano fra il punto critico e gli zeri. Tutto ciò è riassunto nella Figura 5.7.(c).

Infine dobbiamo calcolare il limite di f all'infinito. Quanto visto nel Capitolo 4 ci dice subito che questo limite vale 2; un altro modo per verificarlo è il seguente conto:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2}\frac{2 - 1/x^2}{1 + 1/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - 1/x^2}{1 + 1/x^2} = 2 \, .$$

La Figura 5.7.(d) inserisce nel grafico anche questa ulteriore informazione.

A questo punto non rimane che tracciare il grafico della funzione. È chiaro che la curva che tracciamo usando le informazioni trovate potrebbe non essere esattamente quella giusta; ma è anche altrettanto chiaro che questa curva rifletterà bene il comportamento *qualitativo* (segno, crescenza/decrescenza, convessità/concavità, massimi/minimi/flessi, limiti agli estremi) della nostra funzione — e spesso questo è sufficiente. Prova a tracciare una curva nella Figura 5.7.(d) che rispetta tutte le informazioni ottenute, e poi confrontala con la Figura 5.8 che contiene il grafico vero della funzione f.

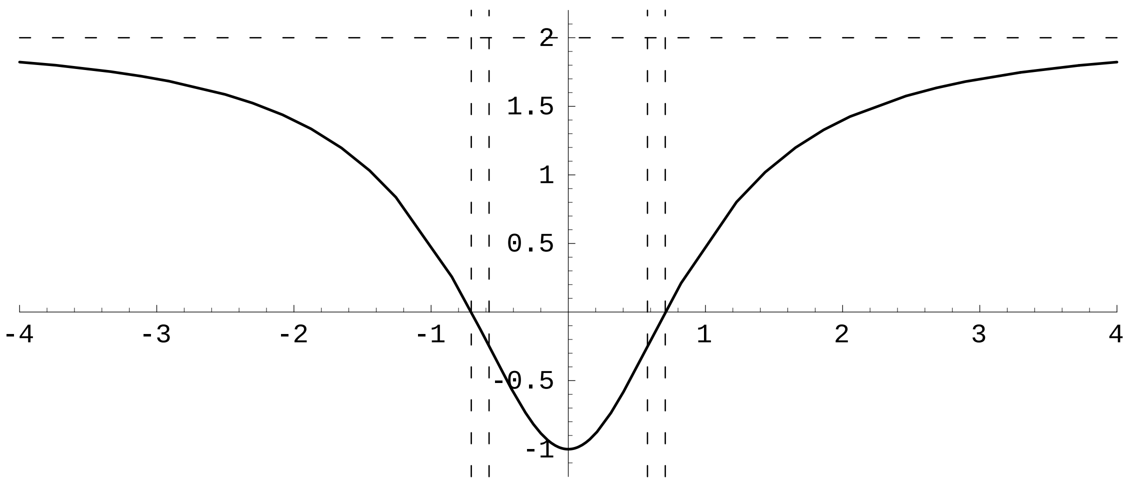

Figura 5.8 Grafico di $f(x) = (2x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.

5.13 Sviluppo di Taylor

Si sente spesso dire che "la retta tangente è la retta che meglio approssima un grafico in un punto". In questa sezione vogliamo chiarire cosa vuol dire questa affermazione, perché è vera, e vedere come ottenere approssimazioni anche migliori.

"Meglio approssima" significa che l'errore che si compie sostituendo il grafico con la retta dev'essere il minimo possibile. Come abbiamo già visto quando abbiamo studiato l'interpolazione, l'errore che conta è dato dalla differenza delle ordinate in punti di uguale ascissa. Quindi data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in I$, vogliamo trovare m, $d \in \mathbb{R}$ tali che la funzione errore

$$E_1(x) = f(x) - (mx + d)$$

sia la più piccola possibile vicino a x_0.

Come concretizziamo questa condizione di "più piccolo possibile vicino a x_0"? Prima di tutto, possiamo richiedere che l'errore sia nullo *in* x_0, cioè che

$$0 = E_1(x_0) = f(x_0) - (mx_0 + d) \quad \Longrightarrow \quad d = f(x_0) - mx_0 \; .$$

Con questa scelta, la funzione E_1 diventa

$$E_1(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) ,$$

ed è infinitesima in x_0. Ma quanto infinitesima? L'idea è che *maggiore è l'ordine di infinitesimo in x_0* minore è l'errore e quindi *migliore è l'approssimazione.* Per cercare di capire quanto infinitesima può essere E_1, confrontiamola con l'infinitesimo più semplice, $x - x_0$ (vedi l'Osservazione 5.27). Supponendo che f sia derivabile in x_0 otteniamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - m .$$

Quindi $E_1(x)$ e $x - x_0$ sono infinitesimi dello stesso ordine in x_0 a meno che $m = f'(x_0)$, nel qual caso $E_1(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - x_0$. Quindi il valore di m che rende $E_1(x)$ più piccolo possibile vicino a x_0 è $m = f'(x_0)$, per cui $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ è la retta che meglio approssima il grafico di f vicino a x_0. Più precisamente, abbiamo fatto vedere che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) .$$

Vogliamo adesso la migliore approssimazione quadratica, cioè il polinomio quadratico il cui grafico meglio approssima il grafico di f vicino a x_0. Siccome con una funzione lineare otteniamo un errore $o(x - x_0)$, con un'approssimazione quadratica vogliamo ottenere un errore che sia un infinitesimo di ordine superiore, almeno pari a $o\big((x - x_0)^2\big)$. Quindi la parte lineare del polinomio quadratico dev'essere (perché?) quella che abbiamo già trovato, e cerchiamo $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$E_2(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - a(x - x_0)^2$$

sia $o\big((x - x_0)^2\big)$. Supponendo che f sia derivabile due volte vicino a x_0 possiamo applicare l'Hôpital e ottenere

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - a(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x - x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2} f''(x_0) - a . \end{aligned}$$

Quindi l'unico valore di a per cui $E_2(x) = o\big((x - x_0)^2\big)$ è $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$. In altre parole, la migliore approssimazione quadratica di f vicino a x_0 è

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 ,$$

e possiamo scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big) .$$

A questo punto avrai capito come si procede. Se vogliamo trovare la migliore approssimazione cubica di f vicino a x_0 consideriamo l'errore

$$E_3(x) = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + b(x - x_0)^3 ,$$

e cerchiamo il valore di b tale che $E_3(x) = o\big((x - x_0)^3\big)$. Supponendo che f sia derivabile tre volte vicino a x_0 e applicando l'Hôpital due volte otteniamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} \\
&\qquad = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - b(x - x_0)^3}{(x - x_0)^3} \\
&\qquad = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - 3b(x - x_0)^2}{3(x - x_0)^2} \\
&\qquad = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - 3\cdot 2b(x - x_0)}{3\cdot 2(x - x_0)} = \frac{1}{3!}f'''(x_0) - b .
\end{aligned}$$

Quindi il polinomio cubico che meglio approssima f vicino a x_0 è

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 ,$$

e possiamo scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + o\big((x - x_0)^3\big) .$$

Procedendo in questo modo, si vede che *se f è derivabile n volte vicino a x_0 allora il polinomio di grado n che meglio approssima f vicino a x_0 è il polinomio*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j$$

(dove $0! = 1$ come al solito, e $f^{(0)} = f$), che è l'unico polinomio tale che l'errore

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

sia un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, per cui si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) . \tag{5.21}$$

Il polinomio $P_n(x)$ è detto *polinomio di Taylor* di f in x_0 di grado n, e (5.21) viene detto *sviluppo di Taylor* di f in x_0 di *ordine* n.

Osservazione 5.34 In alcuni libri i polinomi e lo sviluppo di Taylor in 0 vengono chiamati *polinomi* e *sviluppi di Maclaurin* di f.

ESEMPIO 5.23 Vogliamo trovare lo sviluppo di Taylor di ordine n in $x_0 = 0$ per la funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Siccome $f^{(j)}(x) = e^x$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, abbiamo $f^{(j)}(0) = 1$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, per cui lo sviluppo cercato è

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \; .$$

ESEMPIO 5.24 Vogliamo trovare gli sviluppi di Taylor in $x_0 = 0$ per la funzione seno $f(x) = \sin x$. Siccome

$$f(x) = \sin x \; , \quad f'(x) = \cos x \; , \quad f''(x) = -\sin x \; , \quad f^{(3)}(x) = -\cos x \; ,$$

e $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, le derivate successive si ripetono. Quindi

$$f(0) = 0 \; , \quad f'(0) = 1 \; , \quad f''(0) = 0 \; , \quad f^{(3)}(0) = -1 \; ,$$

e quelle successive si ripetono in maniera periodica; per l'esattezza (controlla)

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 2n \text{ è pari,} \\ (-1)^n & \text{se } j = 2n+1 \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi lo sviluppo cercato è

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

(e convinciti che l'aver scritto $o(x^{2n+2})$ invece di $o(x^{2n+1})$ non è un errore).

ESEMPIO 5.25 In modo analogo troviamo gli sviluppi di Taylor in $x_0 = 0$ per la funzione coseno $f(x) = \cos x$. Siccome

$$f(x) = \cos x \; , \quad f'(x) = -\sin x \; , \quad f''(x) = -\cos x \; , \quad f^{(3)}(x) = \sin x \; ,$$

stavolta abbiamo

$$f(0) = 1 \; , \quad f'(0) = 0 \; , \quad f''(0) = -1 \; , \quad f^{(3)}(0) = 0 \; ,$$

e più in generale (verifica)

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 2n+1 \text{ è dispari,} \\ (-1)^n & \text{se } j = 2n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Quindi lo sviluppo cercato è

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \; .$$

Esempio 5.26 Vogliamo lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \log x$ nel punto $x_0 = 1$. Abbiamo

$$f(x) = \log x \;, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \;, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \;, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \;,$$

e, in generale,

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{x^j} \;.$$

Quindi $f(1) = 0$ e

$$\forall j \geq 1 \qquad\qquad f^{(j)}(1) = (-1)^{j-1}(j-1)! \;,$$

per cui lo sviluppo cercato è

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + o\big((x-1)^n\big) \;.$$

Esempio 5.27 Vogliamo lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = 1/(1-x)$ in $x_0 = 0$. Abbiamo

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \;, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \;, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \;, \quad f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4} \;,$$

e, in generale,

$$f^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}} \;.$$

Quindi

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad\qquad f^{(j)}(0) = j! \;,$$

per cui lo sviluppo cercato è

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \;.$$

Curiosità 5.9 Se f ammette derivate di ordine qualsiasi in x_0 (come accade per esempio per le funzioni esponenziali o trigonometriche) possiamo approssimare f con polinomi di Taylor di ordine arbitrariamente alto; quindi potremmo essere tentati di scrivere una formula del tipo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots \;, \tag{5.22}$$

dove i puntini sottintendono la “somma” di un'infinità di termini. Questa è in realtà una buona idea, ma non si può fare sempre. Voglio darti un'idea di come si può procedere, e quali sono i problemi che si possono incontrare.

Prima di tutto dobbiamo dare un senso alla somma infinita (5.22). Per farlo, consideriamo prima un problema lievemente più semplice. Supponiamo di avere una successione

$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ di numeri reali. Allora possiamo costruire la successione $\{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ delle somme parziali sommando un numero finito di termini alla volta:

$$s_0 = a_0 \ , \quad s_1 = a_0 + a_1 \ , \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \ , \quad s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ ,$$

e, più in generale,

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \ .$$

Se la successione $\{s_n\}$ ammette un limite finito per $n \to +\infty$, allora è ragionevole considerare questo limite come somma della successione infinita di addendi $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Questa somma infinita viene detta *serie* e indicata col seguente simbolo:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j \ .$$

Quindi per definizione la somma della serie (quando esiste — nel qual caso diremo che la serie *converge*) è data dal limite delle somme parziali:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j \ .$$

Torniamo al nostro problema. Per ogni numero x fissato, possiamo considerare la successione di numeri

$$a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j \ .$$

Allora il polinomio di Taylor $P_j(x)$ valutato in x coincide proprio con la somma parziale degli a_j, cioè

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \ ,$$

per cui possiamo considerare la *serie di Taylor* per f in x_0

$$T(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \ .$$

Quando $x = x_0$ tutti gli addendi di questa serie tranne il primo sono nulli, per cui $T(x_0)$ è in realtà una somma finita e si ha $T(x_0) = f(x_0)$. Ma per $x \neq x_0$ possono capitare tre cose:

(a) la somma non esiste, cioè la serie non converge;
(b) la serie converge a un valore $T(x) \in \mathbb{R}$, ma $T(x) \neq f(x)$;
(c) la serie converge a un valore $T(x)$ uguale a $f(x)$.

La situazione migliore è chiaramente la (c): vuol dire che possiamo approssimare la funzione arbitrariamente bene con i polinomi di Taylor, in quanto (c) è equivalente ad avere

$$\lim_{n\to+\infty} E_n(x) = 0 \ .$$

Quando questo accade per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0 si dice che f è *analitica reale* in x_0. Ovviamente, a questo punto si pone il problema di stabilire per quali x la serie di Taylor converge a $f(x)$. Per esempio, si può dimostrare (vedi la Curiosità 5.11) che la serie di Taylor dell'esponenziale converge all'esponenziale per *tutti* gli $x \in \mathbb{R}$; lo stesso accade per il seno o il coseno. Invece, la serie di Taylor di $1/(1-x)$ trovata nell'Esempio 5.27 non converge per tutti gli $x \in \mathbb{R}$; per esempio, è chiaro che diverge per ogni $x > 1$ (in quanto somma di termini sempre più grandi). Però si può dimostrare che converge a $1/(1-x)$ per $|x| < 1$, per cui la funzione $1/(1-x)$ è comunque analitica reale in 0. Lo studio di queste problematiche, e in generale delle funzioni analitiche reali, è un campo della matematica molto sviluppato e pieno di applicazioni.

Infine, voglio citare almeno un esempio di funzione f con derivate di ogni ordine la cui serie di Taylor converge in ogni punto ma $T(x) \neq f(x)$ per ogni $x > 0$. Si tratta della funzione f definita nella Curiosità 4.12. Infatti vedremo nel prossimo capitolo che questa funzione ha derivate di ogni ordine, ma $f^{(j)}(0) = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$; quindi la serie di Taylor di f in 0 è identicamente nulla (e quindi in particolare convergente) ma $f(x) \neq 0$ per ogni $x > 0$.

Quando si approssima qualcosa, è importante avere una stima dell'errore che si compie. Uno dei motivi per cui i polinomi di Taylor sono così utili è che esiste una formula semplice per stimare l'errore che si compie sostituendo il polinomio di Taylor alla funzione originale. Dato x_0, sia f una funzione con $n+1$ derivate (una in più rispetto a quelle necessarie per scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n), e per ogni x indichiamo con $M_n(x)$ il massimo del modulo della derivata $(n+1)$-esima $f^{(n+1)}$ sull'intervallo di estremi x_0 e x. Allora se P_n il polinomio di Taylor di grado n per f in x_0 abbiamo la *stima di Lagrange dell'errore*

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq M_n(x) \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \,. \tag{5.23}$$

La Curiosità 5.10 spiega come si ricava questa formula; ma prima vediamo in un paio di esempi come si usa.

Esempio 5.28 Vogliamo trovare un'approssimazione alla quarta cifra decimale del numero di Nepero e. Lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale ci dice che

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + E_n(1) \,;$$

se troviamo un $n \geq 1$ tale che $|E_n(1)| < 10^{-5}$ allora (perché?) l'approssimazione

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

ci darà le prime quattro cifre decimali di e. Ora, tutte le derivate della funzione esponenziale coincidono con la funzione esponenziale, che è crescente nell'intervallo $[0,1]$; quindi $M_n(1) = e^1 = e$ per ogni $n \geq 1$, ed (5.23) ci dice che

$$|E_n(1)| \leq \frac{e|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \,,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza elementare $e < 3$. Quindi ci basta trovare n tale che $3/(n+1)! < 10^{-5}$, cioè tale che $(n+1)! > 300\,000$. Siccome $9! = 362\,880$, basta prendere $n = 8$ per ottenere

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \simeq 2.71827877$$

corretto almeno fino alla quarta cifra decimale compresa.

Esempio 5.29 Vogliamo ricavare la stima (4.29) del capitolo precedente. Prendiamo $f(x) = a(1-e^{-k(x-x_0)})+b$; allora (4.29) non è altro che la stima di Lagrange dell'errore per f in x_0 di ordine 1. Infatti,

$$f'(x) = kae^{-k(x-x_0)} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = -k^2ae^{-k(x-x_0)} ,$$

per cui $f(x_0) = b$, $f'(x_0) = ka$ e

$$E_1(x) = f(x) - (b + ka(x - x_0)) \ ;$$

dunque il membro sinistro di (4.29) coincide con $|E_1(x)|$. Infine, per $x > x_0$ il modulo della derivata seconda di f è decrescente; quindi $M_1(x) = k^2a$, e (4.29) è esattamente la stima di Lagrange dell'errore.

Esempio 5.30 Stavolta vogliamo dimostrare la stima contenuta nell'Osservazione 4.47. I conti sono più complessi rispetto al caso precedente, per cui seguili con attenzione. Poniamo

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-k(x-x_0)}} + b \ ;$$

allora

$$f'(x) = \frac{kae^{-k(x-x_0)}}{(1 + e^{-k(x-x_0)})^2} , \qquad f''(x) = \frac{ak^2e^{-k(x-x_0)}(e^{-k(x-x_0)} - 1)}{(1 + e^{-k(x-x_0)})^3} .$$

In particolare, $f(x_0) = b + (a/2)$ e $f'(x_0) = ak/4$; quindi il membro sinistro della stima dell'Osservazione 4.47 è, come al solito, $|E_1(x)|$, dove abbiamo fatto lo sviluppo di Taylor di f in x_0. Dobbiamo quindi calcolare $M_1(x)$, cioè trovare il massimo di $|f''|$ nell'intervallo di estremi x_0 e $x \in [x_{-1}, x_1]$, dove $x_{\pm1}$ è tale che $f(x_{\pm1}) = b + (a/2) \pm (a/4)$.

Poniamo $y = e^{-k(x-x_0)}$, e $y_{\pm1} = e^{-k(x_{\pm1}-x_0)}$. Allora abbiamo

$$\frac{a}{1 + y_{\pm1}} + b = f(x_{\pm1}) = b + \frac{a}{2} \pm \frac{a}{4} \ ;$$

risolvendo troviamo $y_1 = 1/3$ e $y_{-1} = 3$. Siccome $e^{-k(x-x_0)}$ è strettamente decrescente, abbiamo trovato che quando x varia in $[x_{-1}, x_1]$ allora y varia in $[1/3, 3]$. Ora,

$$|f''(x)| = \frac{|a|k^2y|y - 1|}{(1 + y)^3} \ ;$$

quindi dobbiamo trovare il massimo di $g(y) = y|y-1|/(1+y)^3$ per $y \in [1/3, 3]$. La presenza del valore assoluto di $y-1$ ci costringe (perché?) a considerare separatamente l'intervallo $[1/3, 1]$ dall'intervallo $[1, 3]$. Nel primo intervallo

$$g(y) = \frac{y - y^2}{(1+y)^3} ,$$

per cui derivando otteniamo

$$g'(y) = \frac{1 - 4y + y^2}{(1+y)^4} ,$$

che si annulla in $2 \pm \sqrt{3}$. Siccome $2 - \sqrt{3} < 1/3 < 1 < 2 + \sqrt{3}$, la derivata $g'(y)$ è negativa in $[1/3, 1]$, per cui g è decrescente in questo intervallo, e il massimo è nell'estremo $y_1 = 1/3$.

Nel secondo intervallo

$$g(y) = \frac{y^2 - y}{(1+y)^3} ,$$

per cui derivando otteniamo

$$g'(y) = -\frac{1 - 4y + y^2}{(1+y)^4} ,$$

che si annulla di nuovo in $2 \pm \sqrt{3}$. Siccome $2 - \sqrt{3} < 1 < 3 < 2 + \sqrt{3}$, la derivata $g'(y)$ è positiva in $[1, 3]$, per cui g è crescente in questo intervallo, e il massimo è nell'estremo $y_{-1} = 3$. Siccome $g(1/3) = g(3) = 3/32$, otteniamo

$$\forall x \in [x_{-1}, x_1] \qquad M_1(x) \le \frac{3}{32}|a|k^2 ,$$

e dunque

$$\forall x \in [x_{-1}, x_1] \qquad |E_1(x)| \le \frac{3|a|}{32} \frac{k^2(x - x_0)^2}{2} .$$

L'ultimo passaggio rimasto consiste nello stimare $k^2(x - x_0)^2$. Ora, noi sappiamo che $y_{\pm 1} = e^{-k(x_{\pm 1} - x_0)}$; quindi

$$-k(x_{\pm 1} - x_0) = \log y_{\pm 1} = \mp \log 3 \quad \Longrightarrow \quad k^2(x_{\pm 1} - x_0)^2 = (\log 3)^2 .$$

Siccome $k^2(x - x_0)^2 \le k^2(x_{\pm 1} - x_0)^2$ per ogni $x \in [x_{-1}, x_1]$ otteniamo infine

$$\forall x \in [x_{-1}, x_1] \qquad |E_1(x)| \le \frac{3|a|(\log 3)^2}{64} < 0.06|a| ,$$

che è anche meglio della stima che avevamo dato nell'Osservazione 4.47.

Osservazione 5.35 Lo sviluppo di Taylor è una delle tecniche più usate da calcolatrici e calcolatori per determinare il valore numerico delle funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche con un'approssimazione qualsiasi.

Curiosità 5.10 La stima di Lagrange dell'errore è conseguenza del teorema del valor medio di Lagrange. Per farlo vedere, introduciamo prima una piccola generalizzazione, dovuta a Cauchy, del teorema del valor medio di Lagrange: supponiamo di avere due funzioni f e g derivabili in un intervallo $[a,b]$. Allora per ogni x_1, $x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$ esiste $\overline{x} \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(\overline{x})[g(x_2) - g(x_1)] = g'(\overline{x})[f(x_2) - f(x_1)]$$

(*teorema del valor medio di Cauchy*); questo risultato segue subito (esercizio) dal teorema del valor medio di Lagrange applicato alla funzione $h(x) = f(x)[g(x_2)-g(x_1)]-g(x)[f(x_2)-f(x_1)]$.

Ora, sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione con $n+1$ derivate, e $x_0 \in I$. Sia

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

il polinomio di Taylor di grado n di f in x_0. Fissiamo ora un punto $x \in I$, e definiamo le funzioni

$$F(t) = f(t) + f'(t)(x - t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \qquad \text{e} \qquad G(t) = (x - t)^{n+1} \,.$$

Allora si verifica facilmente che $F(x) = f(x)$ e $F(x_0) = P_n(x)$, per cui $F(x) - F(x_0) = E_n(x)$; inoltre,

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \,.$$

Applocando il teorema del valor medio di Cauchy alle funzioni F e G (usando le derivate rispetto a t, non a x) troviamo un punto $\overline{x}$ fra x_0 e x tale che

$$-\frac{(x - \overline{x})^n}{n!} f^{(n+1)}(\overline{x})(x - x_0)^{n+1} = -(n+1)(x - \overline{x})^n E_n(x) \,,$$

per cui otteniamo la *formula di Lagrange del resto*

$$E_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overline{x}) \,.$$

Quindi se indichiamo con M_x il massimo del modulo di $f^{(n+1)}$ fra x_0 e x abbiamo chiaramente $|f^{(n+1)}(\overline{x})| \le M_x$ e quindi

$$|E_n(x)| \le M_x \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \,,$$

come voluto.

Curiosità 5.11 Vogliamo usare la stima dell'errore di Lagrange per dimostrare che la serie di Taylor di $f(x) = e^x$ (vedi la Curiosità 5.9) converge a e^x per ogni x reale, cioè che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} x^j \,.$$

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} E_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La stima di Lagrange dell'errore ci dice (perché?) che

$$|E_n(x)| \leq C_x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

dove $C_x = e^x$ se $x > 0$, e $C_x = 1$ se $x < 0$. Quindi ci basta dimostrare che

$$\forall a > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 .$$

Ma infatti, scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 + 1 > 2a$. Allora per ogni $n > n_0$ abbiamo

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n_0} \cdot \frac{a}{n_0+1} \cdots \frac{a}{n} \leq \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n_0} \left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0} < \frac{(2a)^{n_0}}{n_0!} \frac{1}{2^n}$$

che tende a zero per $n \to +\infty$, ed è fatta. In modo analogo puoi dimostrare (esercizio) che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

5.14 Propagazione degli errori

Lo sviluppo di Taylor al primo ordine può essere usato anche per studiare la propagazione degli errori dalla variabile indipendente alla funzione.

Supponiamo di stare studiando una quantità $f(x)$ dipendente da una variabile indipendente x. Supponiamo inoltre che la misura della variabile indipendente sia soggetta a un errore relativo pari a e_r; vogliamo trovare una stima dell'errore relativo che compiamo calcolando la quantità $f(x)$.

Indichiamo con $e_a \in \mathbb{R}$ l'errore assoluto commesso sulla variabile indipendente x. Per questo conto, considereremo e_a *con segno:* se $e_a > 0$ allora l'errore è per eccesso, mentre se $e_a < 0$ allora l'errore è per difetto. Inoltre, supporremo per semplicità che la variabile indipendente assuma solo valori positivi; allora

$$e_r = \frac{e_a}{x} ,$$

e il segno dell'errore relativo indica se l'errore assoluto è per eccesso o per difetto.

L'errore assoluto E_a (sempre con segno) compiuto calcolando la quantità $f(x)$ è dunque

$$E_a = f(x + e_a) - f(x) ;$$

e l'errore relativo E_r è dato da

$$E_r = \frac{f(x + e_a) - f(x)}{f(x)} ,$$

dove, per semplicità, supponiamo che anche i valori di f siano tutti positivi.

Vogliamo una stima di E_r in funzione di e_r ed f. Scrivendo lo sviluppo di Taylor al prim'ordine di f in x otteniamo

$$\begin{aligned}E_a &= f(x+e_a) - f(x) = f'(x)\big((x+e_a)-x\big) + o\big((x+e_a)-x\big) = f'(x)e_a + o(e_a)\\ &= x\big[f'(x)e_r + o(e_r)\big]\ .\end{aligned}$$

Quindi se l'errore relativo e_r è abbastanza piccolo possiamo trascurare gli infinitesimi di ordine superiore e ottenere

$$E_a \approx xf'(x)e_r$$

e

$$E_r \approx \frac{xf'(x)}{f(x)}e_r\ , \tag{5.24}$$

che erano le formule che stavamo cercando.

Osservazione 5.36 Ovviamente si ottengono formule più precise considerando sviluppi di Taylor di ordine superiore; ma per i nostri scopi possiamo limitarci a queste.

Osservazione 5.37 Anche E_a ed E_r hanno un segno, indicanti errori per eccesso o per difetto. Siccome abbiamo supposto x ed $f(x)$ positivi, il segno di E_r dipende sia dal segno di e_r che dal segno della derivata $f'(x)$. In particolare, se $f'(x) > 0$ allora errori per eccesso (difetto) nella variabile indipendente causano errori per eccesso (difetto) nella quantità calcolata, mentre se $f'(x) < 0$ allora errori per eccesso (difetto) nella variabile indipendente causano errori per difetto (eccesso) nella quantità calcolata.

Concludiamo con un esempio di applicazione di queste stime.

ESEMPIO 5.31 In assenza di turbolenza, la resistenza totale R che il cuore deve superare per pompare del sangue in un capillare di lunghezza l e raggio interno a è data dalla *formula di Poiseuille*

$$R = k\frac{l}{a^4}\ ,$$

dove k è un coefficiente di proporzionalità dipendente, per esempio, dalla viscosità del sangue. Supponiamo di aver misurato il raggio interno del capillare con un errore (relativo) del 2%; vogliamo stimare l'errore relativo nel valore calcolato della resistenza totale. La formula (5.24) ci fornisce il risultato:

$$E_r \approx \frac{a}{R(a)}\frac{dR}{da}(a)e_r = \frac{a}{kl/a^4}\left(-4\frac{kl}{a^5}\right)e_r = -4e_r = -8\%\ .$$

Quindi un errore per eccesso del 2% nella misura del raggio interno causa un errore per difetto di circa l'8% nella misura della resistenza totale.

Supponiamo ora di aver misurato con un errore relativo del 2% la lunghezza del capillare; stimiamo che errore causiamo nel calcolo della resistenza totale. Stavolta la formula (5.24) diventa

$$E_r \approx \frac{l}{R(l)} \frac{dR}{dl}(l) e_r = \frac{l}{kl/a^4} \cdot \frac{k}{a^4} e_r = e_r = 2\% \ .$$

Quindi un errore per eccesso del 2% nella misura della lunghezza del capillare causa un errore per eccesso di circa il 2% nella misura della resistenza totale.