1

Aritmetica

1.1 Numeri e unità di misura

La Matematica è tradizionalmente nota per occuparsi di numeri e figure. Anche se questo ormai non è più vero (la Matematica si occupa di strutture, siano esse numeriche, geometriche, algebriche, analitiche, fisiche, biologiche, o cavalleggeri prussiani), i numeri forniscono un buon punto di partenza per un corso introduttivo.

Il primo tipo di numeri che si incontra sono i *numeri naturali:*

$$0, 1, 2, 3, \dots \ ;$$

l'insieme dei numeri naturali sarà indicato con il simbolo $\mathbb{N}$.

Fin da piccolo hai utilizzato i numeri naturali per contare oggetti, mele in un cestino o cellule su un vetrino (sì, eri una bambina precoce). Ben presto ti sei però reso conto che i numeri naturali non bastavano; per misurare la temperatura d'inverno o il conto in banca degli zii (e, più in generale, per poter effettuare la sottrazione di due numeri naturali qualsiasi, senza limitazioni) servivano anche numeri negativi; era importante poter contare anche al di sotto dello zero. A questo scopo è stato introdotto l'insieme $\mathbb{Z}$ dei *numeri interi* (o *numeri relativi*):

$$0, +1, -1, +2, -2, \dots \ .$$

Il passaggio successivo, dalle parti del nono compleanno, tagliando la torta, è stato l'introduzione delle frazioni, cioè dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali:*

$$0, 1, -1, 1/2, -1/2, 2, -2, 1/3, -1/3, 2/3, -2/3, \dots$$

Curiosità 1.1 È possibile elencare uno per volta, in un ordine preciso, tutti i numeri razionali, proseguendo la lista qui sopra con le frazioni di denominatore 4, e poi 5, e così via. Questo vuol dire che è possibile *contare* i numeri razionali; i numeri razionali sono tanti quanti i numeri naturali. In termini tecnici, si dice che esiste una *corrispondenza biunivoca* (o una *bigezione*) fra l'insieme $\mathbb{Q}$ e l'insieme $\mathbb{N}$.

Come certo ricorderai, ogni numero razionale si può esprimere come numero decimale periodico, e ogni numero decimale periodico corrisponde a un ben determinato numero razionale. Per esempio[1],

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.333333\ldots\ , \qquad -\frac{227}{105} = -2.1\overline{619047} = -2.16190476190476\ldots$$

L'insieme di tutti i numeri decimali, periodici e no, è l'insieme dei *numeri reali,* e verrà indicato con $\mathbb{R}$. Non ci interessa dare qui una definizione formalmente precisa dei numeri reali; è molto importante però che tu abbia ben presente tre cose.

(a) *Numeri come $\sqrt{2}$, π o il numero di Nepero e sono tutti numeri reali.* Questo vuol dire che si possono scrivere come numeri decimali, con una parte decimale che può essere composta da infinite cifre. Più precisamente, $\sqrt{2}$, π, e (e molti altri) sono numeri *irrazionali,* cioè sono numeri reali che non si possono esprimere come frazione. In particolare, la loro parte decimale non è mai periodica.

Curiosità 1.2 Come si fa a vedere che $\sqrt{2}$ è irrazionale? Bisogna verificare che nessun numero razionale al quadrato fa esattamente due. Supponiamo che non sia così, e che p/q sia un numero razionale (ridotto ai minimi termini) che al quadrato fa 2, cioè tale che $(p/q)^2 = 2$. Questo è equivalente a dire che

$$p^2 = 2q^2\ .$$

In particolare, p^2 è pari. Ma l'unico modo in cui un quadrato può essere pari è se la base è pari; quindi anche p è pari, e possiamo scrivere $p = 2n$. Ma allora $4n^2 = p^2 = 2q^2$, per cui

$$q^2 = 2n^2\ .$$

Ma questo vuol dire che anche q è pari, per cui p/q non è ridotta ai minimi termini, contro quanto avevamo supposto all'inizio. Quindi supporre che esista un numero razionale che elevato al quadrato faccia 2 conduce necessariamente a una contraddizione. In altre parole, un tale numero razionale non può esistere, e $\sqrt{2}$ è irrazionale. In maniera analoga puoi provare a verificare che anche $\sqrt{3}$ è irrazionale e, se te la senti, puoi cercare di scoprire per quali numeri naturali n la radice quadrata $\sqrt{n}$ è irrazionale.

Curiosità 1.3 Un dettaglio sottile ma non irrilevante: così come abbiamo fatto vedere che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 2, dovremmo far vedere che invece *esiste* un numero reale il cui quadrato sia 2. Senza questa informazione, $\sqrt{2}$ sarebbe soltanto un simbolo tipografico, una speranza fatta segno, e non un numero reale in carne ed ossa. Per fortuna, esistono delle procedure (che forse avrai studiato alle scuole medie, e che sono usate dalle calcolatrici) per costruire esplicitamente un numero reale il cui quadrato sia uguale a 2, risolvendo al meglio questo dilemma. Si ottiene

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots\ ,$$

dove i puntini indicano cifre decimali che non si ripetono mai in modo periodico, e che quindi non siamo in grado di predirre conoscendo solo le precedenti.

[1] In questi appunti useremo sempre il punto decimale, e non la virgola decimale.

(b) *Qualunque espressione decimale finita di un numero irrazionale è soltanto un'approssimazione.* Gli esseri umani (e i computer) sono esseri finiti; non siamo in grado di trattare un numero infinito di cifre contemporaneamente. Questo non ci crea nessun problema con i numeri razionali, che possiamo esprimere come rapporto di due numeri interi, e quindi di quantità finite. Invece, questo ci crea un problema serio con i numeri reali, che possiamo esprimere solo tramite una successione *infinita* di cifre decimali. Come se ne viene fuori? Risposta: *approssimando.* Invece di considerare l'intera successione di cifre decimali, ci fermiamo a un certo punto. La cosa fondamentale da tener presente è che in questo modo non otteniamo il numero reale di partenza, ma solo una sua *approssimazione:* abbiamo introdotto un *errore.* Per esempio, π *non* è uguale ($=$) a 3.14, ma è *circa* ($\simeq$) 3.14; il *vero* valore di π differisce da 3.14 per un errore che inizia con 0.00..., e quindi sarà compreso fra 0 e 9 millesimi. Anche una scrittura come

$$\pi \simeq 3.14159265358979$$

continua a essere approssimata, sia pure con un errore molto più piccolo. Nella maggior parte dei casi, un'approssimazione di questo livello è più che sufficiente (le misure che si fanno sono spesso soggette a errori molto maggiori...); basta ricordarsi che si sta lavorando con un valore approssimato, e non con il valore esatto. Ne riparleremo nelle Sezioni 1.4 e 1.6.

(c) *I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: a ogni numero reale corrisponde uno e un sol punto della retta, e viceversa.* Il procedimento con cui si mettono in corrispondenza numeri reali e punti di una retta corrisponde alla creazione di una *scala di misura;* per questo motivo conviene ricordarlo in dettaglio.

Il primo passo per costruire questa corrispondenza consiste nella scelta dell'*origine,* il punto della retta (della scala di misura) a cui associare lo zero, il punto di partenza per le misure successive. È una scelta del tutto *arbitraria;* qualsiasi punto della retta va bene. Questa arbitrarietà è un vantaggio: permette di scegliere l'origine nel modo più adatto al problema che si deve affrontare.

Esempio 1.1 Supponiamo di dover misurare altezze, di montagne o di fosse oceaniche. La scelta convenzionale dell'origine è il livello del mare: dichiariamo (arbitrariamente, ma in maniera funzionale al tipo di misura che ci interessa) che il livello del mare è ad altezza zero. Se invece vogliamo misurare l'altezza di uno specifico grattacielo, o la profondità di una specifica caverna, probabilmente ci conviene mettere l'origine alla base del grattacielo o all'entrata della caverna (anche se si trova a tremila metri d'altezza sul livello del mare).

Esempio 1.2 Per misurare la temperatura sono in uso comune tre scale di misura: i gradi Celsius (o centigradi) ℃, i gradi Fahrenheit ℉, e i gradi Kelvin °K. Queste tre scale hanno origini diverse. Lo 0 dei gradi Celsius corrisponde alla temperatura del punto di congelamento dell'acqua alla pressione atmosferica standard[2]. Lo 0 dei gradi Kelvin corrisponde allo zero assoluto, la temperatura che rappresenta la completa assenza di calore. Infine, ci sono varie versioni su come Fahrenheit stabilì l'origine della sua scala delle temperature: come punto di congelamento di una particolare miscela di acqua e sale, o come la temperatura minima da lui misurata nel rigido inverno del 1708 nella città di Danzica. L'origine della scala Fahrenheit attualmente in uso è invece scelta in modo che 0°C corrisponda a 32°F.

Il secondo passo nella costruzione della corrispondenza consiste nella scelta dell'*unità di misura:* il punto della retta a cui associare il numero reale 1. Il segmento fra il punto corrispondente a 0 e quello corrispondente a 1 serve da *campione* a cui rapportare tutte le altre misure che faremo con la scala che stiamo costruendo — o, in un altro linguaggio, a cui rapportare le altre associazioni fra punti della retta e numeri reali. Di nuovo, la scelta dell'unità di misura è del tutto arbitraria, e dipende dal tipo di misure che dobbiamo effettuare.

ESEMPIO 1.3 Se il nostro obiettivo è misurare l'altezza di montagne o grattacieli, il metro è una unità di misura ragionevole; se invece dobbiamo misurare l'altezza di formiche o cellule, forse è il caso di ricorrere a unità di misura più piccole, quali i millimetri o i micron. Tra parentesi, la definizione attuale di metro è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto assoluto in 1/299 792 458 di secondo (di conseguenza, la velocità della luce nel vuoto è *esattamente* uguale a 299 792 458 metri al secondo, e non "circa uguale" come succedeva con l'originaria definizione di metro, che era 1/10 000 000 della distanza fra l'equatore e il polo Nord misurata lungo il parallelo passante per Parigi).

ESEMPIO 1.4 La definizione originale di 1°C è 1/100 della differenza di temperatura fra il punto di ebollizione e il punto di congelamento dell'acqua alla pressione atmosferica standard. Invece, 1°K corrisponde a 1/273.16 della differenza fra la temperatura del punto triplo dell'acqua (vedi la Nota 2) e lo zero assoluto[3]. Infine, 1°F corrisponde a 1/32 della differenza fra il punto di congelamento dell'acqua alla pressione atmosferica standard e 0°F.

Vale la pena di notare che nella scelta dell'unità di misura è implicita anche una scelta di *orientazione:* dobbiamo decidere in quale delle due semirette determinate dall'origine mettere i numeri positivi, se a destra o a sinistra. Usualmente si mette la semiretta positiva a destra; ma in alcuni casi può convenire la scelta opposta.

---

[2] Più precisamente, questa era la definizione fino al 1954. La definizione corrente è fatta in modo che 0.01℃ corrisponda alla temperatura del punto triplo dell'acqua, quella particolare combinazione di temperatura e pressione in cui ghiaccio, acqua e vapore acque coesistono in ugual misura.

[3] La definizione attuale di grado Celsius è scelta in modo che lo zero assoluto corrisponda esattamente a -273.15°C, per cui la scala Celsius e la scala Kelvin differiscono solo per la posizione dell'origine e non per l'unità di misura.

Esempio 1.5 Dopo aver posto l'origine delle altezze sul livello del mare, se dobbiamo misurare l'altezza di montagne ci conviene stabilire che la semiretta positiva è quella che punta verso l'alto, in modo da poter dire che il Monte Bianco misura 4792 metri (ghiaccio escluso), e non -4792 metri. Ma se invece ci interessa misurare la profondità delle fosse oceaniche ci conviene scegliere come semiretta positiva quella che punta verso il basso. Per esempio, la fossa delle Marianne è profonda 10911 metri rispetto al livello del mare.

Una volta scelta l'unità di misura, possiamo cominciare a misurare. Riportando il segmento unità di misura più volte sulla sua stessa semiretta otteniamo i punti che devono essere associati ai numeri naturali: a 2 volte l'unità di misura viene associato il numero 2, a 27 volte l'unità di misura viene associato il numero 27, e così via. Ripetendo la stessa operazione sull'altra semiretta otteniamo i numeri interi negativi -1, -2, e così via.

Per ottenere i numeri razionali basta suddividere il segmento unità di misura. Per trovare il punto a cui associare il numero razionale p/q, con q positivo, basta suddividere l'unità di misura in q parti uguali, e riportare il segmento ottenuto p volte partendo dall'origine e procedendo nel verso positivo se p è positivo (o $-p$ volte procedendo nel verso negativo se p è negativo).

In questo modo abbiamo associato a ogni numero razionale uno e un solo punto della retta; ma rimangono dei punti della retta a cui non abbiamo ancora associato alcun numero. Per esempio, il teorema di Pitagora ci dice che la diagonale di un quadrato di lato unitario è un segmento di lunghezza $\sqrt{2}$. Siccome, come abbiamo visto, $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, se mettiamo un estremo della diagonale nell'origine, l'altro estremo corrisponde a un punto della retta a cui non è associato alcun numero razionale.

I numeri reali servono esattamente a riempire questi buchi: usando le espansioni decimali infinite riusciamo a coprire tutti i punti della retta. Per questo motivo i numeri reali sono lo strumento ideale per effettuare e registrare misurazioni.

Curiosità 1.4 S'intende che noi non abbiamo dimostrato che i numeri reali sono tanti quanti i punti della retta; l'abbiamo soltanto affermato. Del resto, non avendo dato una definizione precisa né di cos'è un numero reale né di cos'è un punto di una retta, non si poteva pretendere di più. Inoltre, per le applicazioni è essenzialmente irrilevante conoscere i dettagli di queste definizioni; vale però la pena sottolineare che non sono semplici o immediate, tanto che sono state completamente chiarite solo nella seconda metà del diciannovesimo secolo.

Curiosità 1.5 Una delle conseguenze della costruzione dei numeri reali come numeri decimali infiniti è che mentre i numeri razionali sono tanti quanti i numeri naturali, i numeri reali sono sostanzialmente di più: non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra i numeri naturali (o interi o razionali) e i numeri reali. Sono talmente tanti di più che se si prende un punto a caso sulla retta si è praticamente certi di beccare un numero irrazionale (ed è possibile dare un significato matematicamente preciso a questa frase).

Curiosità 1.6 Esistono anche i *numeri complessi,* che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti del piano.

Quando devi studiare un problema specifico, la scelta di un'unità di misura adeguata è fondamentale. Ovviamente nel corso dei millenni l'uomo ha sviluppato un enorme quantitativo di differenti unità di misura. Per una corretta e chiara comunicazione scientifica tra persone di diverse culture si sono quindi dovute stabilire alcune unità di misura standard, uguali per tutti. Le *unità fondamentali* (dimensionate) sono sette:

– il *metro m*, per la lunghezza;
– il *grammo g*, per la massa;
– il *secondo s*, per il tempo;
– l'*Ampère A*, per l'intensità di corrente elettrica;
– il *grado Kelvin* °K, per la temperatura;
– la *candela cd,* per l'intensità luminosa;
– la *mole mol,* per la quantità di materia.

Partendo da queste sette unità fondamentali, e dall'unità adimensionale

– il *radiante rad,* per gli angoli (di cui riparleremo fra qualche capitolo),

è possibile ottenere tutte le altre.

Come già osservato prima (Esempio 1.3), a volte è più utile esprimere le misure usando un opportuno multiplo o sottomultiplo delle unità di misura standard. Come sai, dato che abbiamo 10 dita, contiamo in base 10, ovvero il nostro sistema di numerazione si basa su 10 cifre $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ che acquistano diverso valore a seconda della loro posizione. Per questo motivo si usano (quasi) sempre le potenze di 10 per esprimere multipli e sottomultipli delle unità fondamentali.

I multipli sono:

	10	100	1000	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Prefisso	deca	etto	kilo	mega	giga	tera	peta	exa	zetta	yotta
Simbolo	da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y

I sottomultipli sono:

	0.1	0.01	0.001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}
Prefisso	deci	centi	milli	micro	nano	pico	femto	atto	zepto	yocto
Simbolo	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y

Il fatto che vengano usate comunemente le sette unità fondamentali e i loro multipli secondo le tabelle qua sopra non vuol dire che riusciamo ad avere una visione intuitiva di cosa questi siano. Per essere più precisi, spesso non abbiamo una nozione intuitiva chiara di quanto grande sia un numero grande.

Esempio 1.6 Pensa a cos'è un secondo... È intuitivo, vero? Lo sai benissimo cos'è un secondo! Poco più di un battito del cuore... E un kilosecondo? È circa un "quarto d'ora accademico", o per essere esatti, 16 minuti e 40 secondi. Un megasecondo, cioè un milione di secondi? Poco più di 11 giorni e mezzo! (11 giorni, 13 ore, 46 minuti e 40 secondi, per la precisione). Invece, sai cos'è successo "solo" un gigasecondo fa, un miliardo di secondi fa? Tu non eri ancora nato, era in corso la lotta per la conquista dello spazio fra Stati Uniti e Unione Sovietica, e la missione "Soyuz 17" aveva da poco lasciato la Terra... era il 1975, 31 anni, 259 gioni, 1 ora, 46 minuti e 40 secondi fa. Circa un terasecondo fa l'uomo di

Cro-Magnon (*Homo Sapiens Sapiens*) conquistava l'Europa (1 Ts sono circa 31700 anni). Due petasecondi (circa 63 milioni di anni) fa si estinguevano i dinosauri, forse a causa di un meteorite. Mezzo exasecondo (circa $15,5$ miliardi di anni) fa il Big Bang dava origine al nostro Universo dando il via a una folle corsa che ci avrebbe portati ai dinosauri, all'uomo di Cro-Magnon, alle conquiste spaziali e al corso di Matematica e Statistica per Biologi. Uno zettasecondo fa nessuno ha idea di cosa ci fosse (ammesso che ci fosse qualcosa). Le potenze di dieci (o in questo caso di mille) sono davvero potenti: in pochi piccoli passi ci hanno portato da un battito del cuore all'età dell'Universo!

Osservazione 1.1 Per tradizione ogni giorno usiamo anche unità di misura che hanno multipli e sottomultipli non basati sul 10 e le sue potenze. Un esempio è dato dal tempo:

- un minuto sono 60 secondi;
- un'ora sono 60 minuti (3600 s);
- un giorno sono 24 ore (86400 s);
- un anno sono 365 o 366 giorni (circa 365.24 in media);

per non parlare delle settimane (7 giorni), dei mesi (tra 28 e 31 giorni) dei lustri (5 anni) e chi più ne ha più ne metta. Anche per gli angoli, sebbene l'unità di misura ufficiale sia il radiante (1 rad corrisponde a $1/(2\pi)$ di angolo giro), sono spesso usate anche le unità di misura derivate dai babilonesi e dagli assiri, su base 60:

- un grado $^\circ$ è $1/360$ di angolo giro;
- un minuto $'$ è $1/60$ di grado;
- un secondo $''$ è $1/60$ di minuto.

1.2 Operazioni

In questa sezione ricordiamo velocemente alcune delle proprietà elementari della somma e del prodotto fra numeri reali:

(i)
$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

(proprietà associativa della somma);

(ii)
$$a+0 = 0+a = a$$

(esistenza dell'elemento neutro per la somma);

(iii)
$$a+(-a) = (-a)+a = 0$$

(esistenza dell'opposto);

(iv)
$$a+b = b+a$$

(proprietà commutativa della somma);

(v) $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

(proprietà distributive della somma rispetto al prodotto);

(vi) $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(proprietà associativa del prodotto);

(vii) $$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

(esistenza dell'elemento neutro per il prodotto);

(viii) $$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

(esistenza dell'inverso);

(ix) $$a \cdot b = b \cdot a$$

(proprietà commutativa del prodotto).

Da queste proprietà si deducono quelle delle potenze. Ricordo che se a è un numero reale non nullo e n è un numero naturale positivo, allora

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} .$$

La proprietà associativa del prodotto ci dice che $a^n \cdot a^m$ non è altro che il prodotto di a per se stesso $n + m$ volte, per cui

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} . \tag{1.1}$$

Ora, se n è più grande di m, effettuare il quoziente a^n/a^m equivale a cancellare m dei fattori presenti nel prodotto a^n. Rimangono $n - m$ fattori, per cui

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} . \tag{1.2}$$

Se invece n è più piccolo di m, effettuando il quoziente a^n/a^m possiamo cancellare tutti gli n fattori a denominatore, e ci restano $m - n$ fattori a denominatore. Quindi in questo caso $a^n/a^m = 1/a^{m-n}$. Questo suggerisce di introdurre le *potenze negative:* se poniamo per definizione

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} ,$$

allora (1.2) rimane vera anche quando n è più piccolo di m.

Rimane il caso $n = m$. Ora, $a^n/a^n = 1$; quindi se poniamo per definizione

$$a^0 = 1$$

allora *le* (1.1) *e* (1.2) *sono vere per ogni numero reale non nullo a e ogni coppia di numeri interi, positivi, negativi o nulli, m ed n.*

Facciamo un altro piccolo passo. Se moltiplichiamo una potenza a^n per se stessa otteniamo $(a^n)^2 = a^n \cdot a^n = a^{n+n} = a^{2n}$. Più in generale, la (1.1) implica

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{1.3}$$

per ogni numero reale non nullo a e ogni coppia di numeri interi m ed n.

Il nostro prossimo obiettivo è dare un senso all'espressione $a^{p/q}$, dove a è un numero reale *positivo* e p/q è un numero razionale qualsiasi, *in modo che le proprietà* (1.1)–(1.3) *rimangano valide.* In particolare, richiediamo che

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} \qquad \text{e} \qquad a^{p/q} = (a^{1/q})^p ,$$

per cui se scopriamo come definire $a^{1/q}$ siamo in grado di calcolare $a^{p/q}$ per qualsiasi numero razionale p/q. Ma perché (1.3) valga si deve avere

$$(a^{1/q})^q = a^{q/q} = a^1 = a .$$

Quindi l'unica possibilità che abbiamo è dire che $a^{1/q}$ *è l'unica radice reale q-esima positiva di a.* In questo modo abbiamo definito la potenza a^r di base a ed esponente r per ogni numero reale positivo a e ogni numero razionale r. Quando parleremo di logaritmi, faremo vedere come dare un senso alla scrittura a^x per ogni numero reale positivo a e ogni numero reale x.

Esempio 1.7 Per esempio, $2^{1/2} = \sqrt{2}$, $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$, e

$$8^{5/6} = (8^{1/3})^{5/2} = 2^{5/2} = 2^2 \cdot 2^{1/2} = 4\sqrt{2} .$$

Osservazione 1.2 Per noi la radice q-esima di un numero positivo è sempre un numero positivo. Anche quando q è pari, cioè quando esistono sia una radice positiva sia una negativa. Se vogliamo considerare la radice negativa, indicheremo esplicitamente il segno. Per esempio, le radici quarte di 7 sono $\sqrt[4]{7}$ e $-\sqrt[4]{7}$, e le soluzioni dell'equazione $x^2 = 150$ sono $x = \pm\sqrt{150}$. In particolare, $\sqrt{x^2} = |x|$, e non è uguale a x.

Osservazione 1.3 Abbiamo definito le potenze frazionarie solo dei numeri reali positivi, e non di quelli negativi, perché talvolta i numeri negativi non hanno radici reali. Per esempio, non esiste nessun numero reale il cui quadrato sia -1, per cui non siamo in grado di definire $(-1)^{1/2}$ rispettando la regola (1.3).

Curiosità 1.7 A dire il vero, bisognerebbe far vedere che effettivamente la radice q-esima reale di un numero reale positivo esiste sempre. Questo si può fare una volta definito con precisione il concetto di numero reale; confronta la Curiosità 1.3.

Concludiamo ricordando che, se a e b sono due numeri reali, sappiamo stabilire qual è il più grande e qual è il più piccolo. Scriveremo $a \leq b$ (oppure $b \geq a$) se a è *minore o uguale* a b (se b è *maggiore o uguale* ad a), che è vero anche quando $a = b$. Se invece vogliamo dire che a è strettamente *minore* di b (ovvero che b è strettamente *maggiore* di a) scriveremo $a < b$ (rispettivamente, $a > b$). Infine, indicheremo con $\max\{a, b\}$ il *massimo* (cioè il più grande) fra a e b, e con $\min\{a, b\}$ il *minimo* (cioè il più piccolo) fra a e b.

1.3 Notazione scientifica e ordini di grandezza

Ogni numero reale positivo x può essere scritto in *notazione scientifica*, cioè nella forma

$$x = a \cdot 10^b \,,$$

dove $1 \leq a < 10$ e b è un numero intero, che può essere positivo o negativo. Il numero a si chiama *mantissa*, e il numero b *esponente* od *ordine di grandezza* di x.

Esempio 1.8 Il numero di Avogadro (molecole in una mole di materia) è

$$6.022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} = 602\,200\,000\,000\,000\,000\,000\,000\ \mathrm{mol}^{-1} \,.$$

Esempio 1.9 Il diametro della capside di un virus herpes simplex è di circa

$$105\ \mathrm{nm} = 105 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m} = 1.05 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 0.000000105\ \mathrm{m} \,.$$

Attenzione! $105 \cdot 10^{-9}$ non è in notazione scientifica, secondo la definizione data, perché la mantissa 105 è maggiore di 10. Il diametro della capside di un virus herpes simplex in notazione scientifica è $1.05 \cdot 10^{-7}$ m.

Osservazione 1.4 Un numero della forma $a \cdot 10^k$ è rappresentato in notazione usuale da un numero maggiore o uguale a 1 con $k + 1$ cifre prima della virgola se $k \geq 0$, e da un numero minore di uno con $k - 1$ zeri dopo la virgola se $k < 0$. Viceversa, un numero maggiore o uguale a 1 rappresentato in notazione usuale con $k + 1$ cifre prima della virgola in notazione scientifica ha esponente k e mantissa ottenuta spostando verso sinistra la virgola in modo da lasciare una sola cifra prima della virgola. Infine, un numero minore di uno con $k - 1$ zeri dopo la virgola in notazione scientifica ha esponente $-k$ e mantissa ottenuta spostando verso destra la virgola fino ad avere esattamente una cifra non nulla prima della virgola. Possiamo rappresentare il tutto con un diagramma, dove a rappresenta una cifra non nulla:

$$a\underbrace{\underline{\qquad\quad}}_{k\ \text{cifre}}.\underline{\qquad\quad} = a.\underbrace{\underline{\qquad\quad}}_{k\ \text{cifre}}\underline{\qquad\quad} \cdot 10^k \,;$$

$$0.\underbrace{\underline{0\ldots\ldots0}}_{k-1\ \text{zeri}}a\underline{\qquad\quad} = a.\underline{\qquad\quad} \cdot 10^{-k} \,.$$

Qual è l'utilità della notazione scientifica? Ha più di un vantaggio:

– per numeri molto grandi (o molto piccoli) si evita di scrivere molti zeri (e si evitano errori, nei lavori scientifici e agli esami) rendendoli di più facile comprensione[4];
– identifica l'*ordine di grandezza*;
– aiuta a identificare le *cifre significative*.

Delle cifre significative riparleremo nella prossima sezione; qui ci concentriamo un attimo sull'ordine di grandezza. Due quantità, misurate nella stessa unità di misura, hanno lo stesso *ordine di grandezza* se scritte in notazione scientifica hanno lo stesso esponente.

Esempio 1.10 Una mucca (massa circa 350 kg $= 3.5 \cdot 10^5$ g) e un toro (massa circa 500 kg $= 5 \cdot 10^5 g$) hanno una massa dello stesso ordine di grandezza.

Osservazione 1.5 Attenzione! "Essere dello stesso ordine di grandezza" è una nozione che dipende dall'unità di misura scelta. Per esempio, se per la massa al posto del grammo scegliamo come unità di misura il "toro medio" tm, allora un toro pesa circa $1 \cdot 10^0$ tm, e una mucca circa $7 \cdot 10^{-1}$ tm, per cui in questa (singolare) unità di misura una mucca e un toro *non* hanno masse dello stesso ordine di grandezza.

La nozione di ordine di grandezza è comoda ma non terribilmente precisa. La cosa diventa evidente quando si confrontano quantità con ordini di grandezza diversi.

La *differenza di ordini di grandezza* fra due quantità è la differenza degli esponenti delle quantità scritte in notazione scientifica rispetto alla stessa unità di misura.

Esempio 1.11 La distanza Terra-Sole $d_{TS} \simeq 1.5 \cdot 10^8$ km e il raggio terrestre $R_T \simeq 6.3 \cdot 10^3$ km differiscono per 5 ordini di grandezza.

Osservazione 1.6 Per parlare di differenza di ordini di grandezza è *fondamentale* che le due quantità siano misurate rispetto alla stessa unità di misura!

Cerchiamo di capire esattamente che informazioni dà la differenza di ordini di grandezza. Se abbiamo due grandezze $x_1 = a_1 \cdot 10^{b_1}$ e $x_2 = a_2 \cdot 10^{b_2}$, la differenza di ordini di grandezza è $d = b_1 - b_2$, mentre il rapporto tra x_1 e x_2 è

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1 \cdot 10^{b_1}}{a_2 \cdot 10^{b_2}} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{10^{b_1}}{10^{b_2}} = \frac{a_1}{a_2} \cdot 10^d \,.$$

[4] Anche se non di più facile interpretazione intuitiva da parte del nostro cervello... come abbiamo già notato prima con i terasecondi e compagnia, abbiamo molta difficoltà a interpretare numeri troppo grandi — o piccoli — che sfuggono alla nostra percezione quotidiana.

Siccome $1 \leq a_1, a_2 < 10$ si ha $1/10 < a_1/a_2 < 10$, e quindi

$$10^{d-1} < \frac{x_1}{x_2} < 10^{d+1}.$$

In altre parole, dire che x_1 ed x_2 differiscono per d ordini di grandezza equivale a dire che il rapporto x_1/x_2 è maggiore di 10^{d-1} e minore di 10^{d+1}, che è un'informazione significativa ma non terribilmente precisa.

Esempio 1.12 La differenza di ordine di grandezza di età fra un anziano di $99 = 9.9 \cdot 10^1$ anni e un bambino di $1 = 1 \cdot 10^0$ anno è la stessa che c'è tra un bambino di $10 = 1 \cdot 10^1$ anni e uno di $9 = 9 \cdot 10^0$ anni.

Curiosità 1.8 Una definizione più precisa e rigorosa di differenza di ordini di grandezza deve basarsi sul rapporto delle grandezze, e non soltanto sulla differenza degli esponenti. Per esempio, potremmo definire *differenza precisa di ordini di grandezza* tra due quantità x_1 e x_2 quel numero intero e tale che

$$10^{e-0.5} \leq \frac{x_1}{x_2} < 10^{e+0.5} ,$$

e diremo che x_1 e x_2 sono dello stesso *ordine di grandezza preciso* se $e = 0$. Con questa definizione una mucca e un toro hanno una massa dello stesso ordine di grandezza preciso, anche misurate rispetto al toro medio. Il bambino di 9 e quello di 10 anni hanno un'età dello stesso ordine di grandezza preciso, mentre l'età dell'anziano e del bambino che ha appena iniziato a camminare differiscono di due ordini di grandezza precisi.

Vediamo ora come si fanno le operazioni in notazione scientifica. Vogliamo sommare o sottrarre due numeri espressi in notazione scientifica (i nostri soliti $x_1 = a_1 \cdot 10^{b_1}$ e $x_2 = a_2 \cdot 10^{b_2}$). Il procedimento è il seguente:

– si portano allo stesso esponente, moltiplicando e dividendo x_2 per 10^{b_1}:

$$x_2 = a_2 \cdot 10^{b_2} = a_2 \cdot (10^{b_2} \cdot 10^{-b_1}) \cdot 10^{b_1} = \left(a_2 \cdot 10^{b_2-b_1}\right) \cdot 10^{b_1} \ ;$$

– si sommano o sottraggono le mantisse mantenendo lo stesso esponente:

$$x_1 \pm x_2 = \left(a_1 \pm a_2 \cdot 10^{b_2-b_1}\right) \cdot 10^{b_1} \ ;$$

– si determina l'ordine di grandezza del risultato e lo si scrive nuovamente in notazione scientifica, come indicato nell'Osservazione 1.2.

Esempio 1.13 Vogliamo calcolare la massa del virus herpes simplex, sapendo che il nucleo ha massa $2 \cdot 10^{-16}$ g, la capside nuda vuota (un rivestimento proteico del nucleo) ha massa $5 \cdot 10^{-16}$ g, e l'inviluppo (un ulteriore rivestimento) $1.3 \cdot 10^{-15}$ g. Dobbiamo sommare questi tre valori. I primi due termini hanno già lo stesso esponente. Riportiamo il terzo addendo allo stesso esponente:

$$1.3 \cdot 10^{-15} \text{ g} = 1.3 \cdot (10^{-15} \cdot 10^{16}) \cdot 10^{-16} = 13 \cdot 10^{-16} \text{ g}.$$

Sommando le mantisse otteniamo una massa totale di $20 \cdot 10^{-16}$ g. Infine, riportando il risultato in notazione scientifica otteniamo $2 \cdot 10^{-15}$ g.

Esercizio 1.1 *Sapendo che un atomo di idrogeno ha massa di circa* $1.7 \cdot 10^{-27}$ g *e uno di ossigeno ha massa di circa* $2.65 \cdot 10^{-26}$ g, *calcola la massa di una molecola d'acqua* H_2O *(composta da un atomo di ossigeno e due di idrogeno).*

Grazie alle proprietà delle potenze, è particolarmente semplice effettuare moltiplicazioni e divisioni in notazione scientifica. Per trovare il prodotto (o il rapporto) di $x_1 = a_1 \cdot 10^{b_1}$ e $x_2 = a_2 \cdot 10^{b_2}$

- si moltiplicano (o dividono) le mantisse;
- si sommano (o sottraggono) gli esponenti;
- si scrive il risultato in notazione scientifica.

Esempio 1.14 Vogliamo ottenere una stima di quanto sangue umano c'è al mondo. La popolazione umana è di circa sei miliardi di persone, ovvero $6 \cdot 10^9$. Ogni persona ha mediamente 5.6 litri di sangue, ovvero circa

$$5.6 \ \ \mathrm{dm}^3 = 5.6 \cdot (10^{-1} \ \mathrm{m})^3 = 5.6 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{m}^3 \ .$$

Per ottenere il volume totale del sangue umano al mondo moltiplichiamo le mantisse $6 \cdot 5.6 = 33.6$; sommiamo gli esponenti $9 + (-3) = 6$; portiamo il risultato in notazione scientifica $33.6 \cdot 10^6 \ \mathrm{m}^3 = 3.36 \cdot 10^7 \ \mathrm{m}^3$. Pertanto nel mondo ci sono (circa) $3.36 \cdot 10^7 \ \mathrm{m}^3$ di sangue umano.

Esercizio 1.2 *Sapendo che la Torre di Pisa è approssimativamente un cilindro di altezza* 56 m *e raggio di base* 8 m, *quante Torri di Pisa servirebbero per contenere tutto il sangue umano presente al mondo?*

1.4 Approssimazioni

Come abbiamo visto, i numeri reali si rappresentano con successioni infinite di cifre decimali; questo ha come conseguenza il fatto che in pratica i calcoli con i numeri reali sono necessariamente approssimati. Ci sono tipicamente due metodi per eseguire queste approssimazioni: per *troncamento*, o per *arrotondamento*.

Il *troncamento* consiste semplicemente nel dimenticarsi le successive cifre decimali.

Esempio 1.15 Se tronchiamo $\pi = 3.14159265358979\ldots$ (la presenza dei puntini segnala che stiamo lavorando con il valore esatto del numero reale π, anche se non siamo in grado di scriverlo tutto) alla quarta cifra decimale otteniamo $\pi \simeq 3.1415$; se lo tronchiamo alla ottava cifra decimale otteniamo $\pi \simeq 3.14159265$.

Osservazione 1.7 È importante tenere ben distinto il concetto e il simbolo di “uguale” “=” dal concetto e simbolo di “circa” “$\simeq$”. Per intenderci, π è *circa* 3.1415, e *non* è uguale a 3.1415.

Curiosità 1.9 Dire che tronchiamo un numero alla k-esima cifra decimale vuol dire che scartiamo le cifre decimali dalla $(k+1)$-esima in poi. L'errore che introduciamo può quindi variare da 0 (se tutte le cifre decimali scartate erano uguali a 0) a 10^{-k} (se tutte le cifre decimali scartate erano uguali a 9).

Chiaramente, il troncamento introduce un errore che può anche essere significativo, se la prima cifra decimale scartata è vicina a 9.

ESEMPIO 1.16 Siccome $\pi = 3.14159\ldots$, il valore 3.1416 è un'approssimazione a quattro cifre decimali di π migliore di quella ottenuta per troncamento.

Per questo motivo, di solito si preferisce procedere per *arrotondamento.* Se la prima cifra decimale scartata è 0, 1, 2, 3 o 4, si approssima per difetto, come nel troncamento. Se invece la prima cifra decimale scartata è 5, 6, 7, 8 o 9, si approssima per eccesso, aumentando di 1 il valore dell'ultima cifra decimale lasciata[5].

ESEMPIO 1.17 L'arrotondamento di π alla quarta cifra decimale è $\pi \simeq 3.1416$, mentre l'arrotondamento di π all'ottava cifra decimale è $\pi \simeq 3.14159265$.

Osservazione 1.8 Nel resto di questi appunti il simbolo $\simeq$ indicherà sempre un'arrotondamento, e mai un troncamento.

CURIOSITÀ 1.10 Supponiamo di voler arrotondare alla k-esima cifra decimale. Se la prima cifra decimale scartata è fra 0 e 4, l'errore che introduciamo arrotondando varia da 0 (se tutte le cifre decimali scartate erano uguali a 0) a un massimo di $5 \cdot 10^{-(k+1)}$ (se le cifre decimali scartate erano un 4 seguito da infiniti 9). Analogamente, se la prima cifra decimale è scartata è fra 5 e 9, l'errore che introduciamo arrotondando varia da 0 (se tutte le cifre decimali scartate erano uguali a 9) a un massimo di $5 \cdot 10^{-(k+1)}$ (se le cifre decimali scartate erano un 5 seguito da infiniti 0). Quindi in ogni caso l'errore che si effettua arrotondando è minore o uguale a quello che si effettua troncando, e l'errore massimo per arrotondamento è di $5 \cdot 10^{-(k+1)}$, la metà dell'errore massimo per troncamento.

Anche le misure sono necessariamente approssimate. Gli strumenti di misura hanno una precisione finita, e ciascuna misura è soggetta a errori (si spera casuali); quindi il valore della misura è noto a meno di un errore (che si spera piccolo). Nella pratica sperimentale, è *fondamentale* tenere traccia di questi errori; quando si riporta il risultato di una misura, bisogna indicare non soltanto il valore ottenuto, ma anche una stima dell'errore effettuato.

ESEMPIO 1.18 Misure ripetute della lunghezza dell'assone di un dato neurone di un ratto forniscono i seguenti risultati: 73 μm, 71 μm, 75 μm, 74 μm. I valori ottenuti sono quindi tutti compresi nell'intervallo che va da 71μm a 75 μm. Rispetto al punto centrale di questo intervallo (73 μm), i valori ottenuti variano di al più 2 μm (la metà della lunghezza dell'intervallo) per eccesso o per difetto. Dunque possiamo riassumere le nostre misurazioni dicendo che la lunghezza dell'assone di questo neurone è $73 \pm 2\,\mu$m o, in notazione scientifica, $(7.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-5}$ m.

[5] Quando la prima cifra decimale scartata è 5, a volte può convenire approssimare per difetto. Per esempio, se stiamo effettuando approssimazioni sul risultato di misure, allora può convenire bilanciare l'errore commesso approssimando il 5 per eccesso con alcune approssimazioni per difetto, in modo che considerando nell'insieme tutte le misure gli errori si compensino.

Osservazione 1.9 Oltre a quella appena descritta, esistono varie altre tecniche per estrarre da una serie di misure un valore stimato e un errore; ne riparleremo nei capitoli dedicati alla Statistica.

La notazione introdotta nel precedente esempio è quella standard usata per indicare dei valori noti solo con una certa approssimazione. Per la precisione, la scrittura

$$x = v \pm e$$

significa che il *valore vero* x della misura è contenuto nell'intervallo centrato nel *valore stimato* v e di lunghezza il doppio dell'*errore assoluto* e. In altre parole, $x = v \pm e$ è equivalente alla doppia disuguaglianza

$$v - e \leq x \leq v + e \ .$$

Esempio 1.19 Nell'esempio precedente, il valore stimato della lunghezza dell'assone è $v = 7.3 \cdot 10^{-5}$ m, con un errore assoluto $e = 0.2 \cdot 10^{-5}$ m, per cui il valore vero x è contenuto nell'intervallo di estremi $v-e = 7.1 \cdot 10^{-5}$ m e $v+e = 7.5 \cdot 10^{-5}$ m.

Esempio 1.20 La scrittura $\pi = 3.14 \pm 0.002$ significa che il valore effettivo di π è compreso fra $3.14 - 0.002 = 3.138$ e $3.14 + 0.002 = 3.142$, cioè $3.138 \leq \pi \leq 3.142$.

Osservazione 1.10 Indicheremo spesso con $[a, b]$ l'intervallo *chiuso* della retta reale di estremi a e b (supponendo, s'intende, che $a \leq b$). In altre parole, il numero reale x appartiene ad $[a, b]$ se e solo se $a \leq x \leq b$. In modo analogo, indicheremo con (a, b) l'intervallo *aperto* della retta reale costituito dai numeri x tali che $a < x < b$; in altre parole, togliendo gli estremi all'intervallo chiuso $[a, b]$ otteniamo l'intervallo aperto (a, b). Togliendo solo uno dei due estremi otteniamo gli *intervalli semiaperti:* $(a, b]$ è l'insieme dei numeri x tali che $a < x \leq b$, mentre $[a, b)$ è l'insieme dei numeri x tali che $a \leq x < b$.

Osservazione 1.11 Spesso (ma non sempre! Bisogna verificare caso per caso cosa viene inteso da ciascun singolo autore) si usa la notazione scientifica per evidenziare le *cifre significative* di una misura. La convenzione più comune è che *tutte le cifre di un numero in notazione scientifica sono significative* (cioè non modificate dall'errore) *tranne l'ultima, che è puramente indicativa.*

Esempio 1.21 Se scriviamo la lunghezza dell'assone del neurone del ratto come $x \simeq 7.3 \cdot 10^{-5}$ m intendiamo dire che siamo certi che la lunghezza vera dell'assone è almeno $7 \cdot 10^{-5}$ m ed è certamente inferiore a $8 \cdot 10^{-5}$ m, per cui la cifra 7 è sicura (significativa); inoltre la cifra indicativa 3 segnala che il valore vero è probabilmente più vicino a $7.1 \cdot 10^{-5}$ m di quanto lo sia a $7.9 \cdot 10^{-5}$ m.

Osservazione 1.12 Le convenzioni sulle cifre significative si prestano troppo facilmente ad ambiguità ed equivoci; è molto meglio (e deontologicamente più corretto) presentare sempre i risultati indicando valore stimato ed errore assoluto.

1.5 Uguaglianze e disuguaglianze

Capita spesso di dover effettuare ulteriori operazioni sul valore di una misura. Per esempio, se vogliamo trovare il volume di una fibra muscolare, che possiamo assumere cilindrica, conviene misurarne la lunghezza l e lo spessore d, e poi ricavare il volume V con la formula $V = \pi(d/2)^2 l$ (ricorda che dire che la fibra ha spessore d vuol dire che è un cilindro di raggio $d/2$). Ora, sia la lunghezza che lo spessore sono stati misurati con un certo errore, per cui anche il valore del volume sarà soggetto a un qualche errore. Ma quanto? Come facciamo a ricavare l'errore sul volume conoscendo l'errore sulla lunghezza e sullo spessore (e sull'approssimazione di π che vogliamo usare)?

Obiettivo della prossima sezione è esattamente studiare la *propagazione degli errori,* cioè capire come variano gli errori agendo con operazioni aritmetiche. Ora, abbiamo visto che una scrittura del tipo $x = v \pm e$ è equivalente alla doppia disuguaglianza $v - e \leq x \leq v + e$. Quindi per studiare la propagazione degli errori dobbiamo studiare come si comportano le disuguaglianze rispetto alle quattro operazioni.

Cominciamo ricordando come si comportano le uguaglianze. Se due numeri sono uguali, ed effettuiamo la stessa operazione su entrambi, chiaramente otteniamo due risultati uguali. In particolare

$$a = b \quad \text{implica} \quad \begin{cases} a + c = b + c & \text{per ogni } c, \\ a - c = b - c & \text{per ogni } c, \\ -a = -b, & \\ ac = bc & \text{per ogni } c, \\ a/c = b/c & \text{per ogni } c \text{ diverso da } 0, \\ 1/a = 1/b & \text{se } a,\, b \neq 0. \end{cases}$$

Osservazione 1.13 *ATTENZIONE: mai dividere per zero!* Il che vuol dire che se effettuiamo una divisione per una quantità letterale, dobbiamo imporre che i valori attribuiti alle lettere non annullino la quantità.

Passiamo ora alle disuguaglianze. Se un numero è minore di un altro, e sommiamo o sottraiamo a entrambi la stessa quantità, chiaramente il primo risultato rimane minore del secondo. In altre parole,

$$a \leq b \quad \text{implica} \quad \begin{cases} a + c \leq b + c & \text{per ogni } c, \\ a - c \leq b - c & \text{per ogni } c. \end{cases}$$

Osservazione 1.14 Chiaramente, sia qui sia nel seguito, valgono risultati analoghi per le disuguaglianze col minore stretto ($a < b$) e per le disuguaglianze col maggiore ($a \geq b$ e $a > b$).

Osservazione 1.15 In questa sezione otterremo sempre gli stessi risultati per la somma e per la differenza. Questo non deve stupire: sottrarre un numero c è la stessa cosa di sommare il numero $-c$.

Il comportamento delle disuguaglianze rispetto al prodotto o alla divisione è un poco più complicato. Non ci sono problemi con i numeri positivi: se un numero è minore di un altro, e moltiplichiamo o dividiamo entrambi per la stessa quantità positiva, il primo risultato rimane minore del secondo:

$$a \le b \quad \text{implica} \quad \begin{cases} ac \le bc & \text{per ogni } c > 0, \\ a/c \le b/c & \text{per ogni } c > 0. \end{cases}$$

Se invece moltiplichiamo per -1, la disuguaglianza *s'inverte:*

$$a \le b \quad \text{implica} \quad -a \ge -b.$$

Osservazione 1.16 Un modo per capire il perché di questa differenza fra numeri positivi e negativi è considerare la retta reale. Un numero positivo più è distante dall'origine più è grande; invece, un numero negativo più è distante dall'origine più è piccolo. Siccome la moltiplicazione per -1 scambia numeri positivi e negativi ma lascia invariata la distanza dall'origine, deve necessariamente invertire l'ordine.

Prima di proseguire vale la pena ricordare il concetto di valore assoluto. Il *valore assoluto* (o *modulo*) $|x|$ di un numero reale x è la sua distanza dall'origine:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

In particolare, $x = -|x|$ *per ogni numero negativo* $x < 0$.

Curiosità 1.11 Più in generale si ha $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$ per ogni numero reale x, dove

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x \ge 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Torniamo ora alla nostra disuguaglianza $a \le b$. Moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per un numero negativo $c < 0$ equivale a moltiplicarli prima per -1 e poi per il numero positivo $|c|$ (o per il numero positivo $1/|c|$). Siccome la moltiplicazione per -1 inverte il senso della disuguaglianza mentre la moltiplicazione per un numero positivo lo conserva, otteniamo

$$a \le b \quad \text{implica} \quad \begin{cases} ac \ge bc & \text{per ogni } c < 0, \\ a/c \ge b/c & \text{per ogni } c < 0. \end{cases}$$

Infine vediamo cosa succede per l'inverso. Supponiamo di avere $a \le b$, e consideriamo prima il caso in cui siano entrambi positivi. Allora moltiplicando entrambi i membri per $1/b > 0$ otteniamo $a/b \le 1$; moltiplicando quest'ultima disuguaglianza per $1/a > 0$ otteniamo $1/b \le 1/a$. Se invece sia a sia b sono negativi, moltiplicando entrambi i membri per $1/b < 0$ invertiamo la disuguaglianza ottenendo $a/b \ge 1$. Ma moltiplicandola per $1/a < 0$ la invertiamo ancora, per cui alla fine otteniamo di nuovo $1/b \le 1/a$. Infine, se a è negativo e b è positivo abbiamo che $1/a$ è ancora negativo e $1/b$ è ancora positivo, per cui $1/a < 1/b$. Riassumendo:

$$a \le b \quad \text{implica} \begin{cases} 1/a \ge 1/b & \text{se } 0 < a \le b \text{ o } a \le b < 0, \\ 1/a < 0 < 1/b & \text{se } a < 0 < b. \end{cases}$$

Per studiare la propagazione degli errori dobbiamo combinare fra loro due (o più) misure ciascuna col proprio errore, per cui dobbiamo combinare fra loro due (o più) disuguaglianze. Supponiamo allora di avere le due disuguaglianze $a_1 \le a_2$ e $b_1 \le b_2$; vogliamo provare a sommarle, sottrarle, moltiplicarle e (quando possibile) dividerle.

La somma è facile. Sommando b_1 a entrambi i membri di $a_1 \le a_2$ otteniamo $a_1 + b_1 \le a_2 + b_1$; sommando a_2 a entrambi i membri di $b_1 \le b_2$ otteniamo $a_2 + b_1 \le a_2 + b_2$. Combinando il tutto otteniamo

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 \end{cases} \qquad \text{implica} \qquad a_1 + b_1 \le a_2 + b_2 \; . \tag{1.4}$$

Del resto, se a una cosa più piccola sommiamo una cosa più piccola è naturale ottenere una cosa più piccola...

Anche la differenza è facile. Moltiplicando $b_1 \le b_2$ per -1 otteniamo $-b_2 \le -b_1$; quindi sommando questa disuguaglianza ad $a_1 \le a_2$ otteniamo

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 \end{cases} \qquad \text{implica} \qquad a_1 - b_2 \le a_2 - b_1 \; . \tag{1.5}$$

Osservazione 1.17 Attenzione: da $a_1 \le a_2$ e $b_1 \le b_2$ non possiamo dedurre nulla sulle dimensioni relative di $a_1 - b_1$ e $a_2 - b_2$. A volte è più grande $a_1 - b_1$, a volte $a_2 - b_2$. Per esempio, se $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 0$ e $b_2 = 1$ otteniamo $a_1 - b_1 = 1 < 2 = a_2 - b_2$. Ma se $b_2 = 4$ troviamo $a_1 - b_1 = 1 > -1 = a_2 - b_2$. L'unica disuguaglianza che è vera in entrambi i casi è $a_1 - b_2 \le a_2 - b_1$, come avrai cura di verificare.

Passiamo al prodotto. Come prevedibile, avremo risultati diversi a seconda dei segni dei numeri coinvolti. Cominciamo col caso più semplice: supponiamo di avere $a_1 \le a_2$ e $b_1 \le b_2$, con a_1, a_2, b_1 e b_2 positivi. Allora ragionando come fatto per la somma (moltiplicando invece che sommando) otteniamo

$$\begin{cases} 0 < a_1 \le a_2 \\ 0 < b_1 \le b_2 \end{cases} \qquad \text{implica} \qquad a_1 b_1 \le a_2 b_2 \; . \tag{1.6}$$

Siccome $0 < b_1 \le b_2$ implica $0 < 1/b_2 \le 1/b_1$, otteniamo anche

$$\begin{cases} 0 < a_1 \le a_2 \\ 0 < b_1 \le b_2 \end{cases} \qquad \text{implica} \qquad \frac{a_1}{b_2} \le \frac{a_2}{b_1} \; . \tag{1.7}$$

Se invece b_1 e b_2 sono negativi, da $b_1 \le b_2 < 0$ moltiplicando per -1 otteniamo $0 < |b_2| \le |b_1|$. Quindi $a_1|b_2| \le a_2|b_1|$, e moltiplicando di nuovo per -1 ricaviamo

$$\begin{cases} 0 < a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 < 0 \end{cases} \qquad \text{implica} \qquad a_1 b_2 \ge a_2 b_1 \; .$$

Analogamente, da $b_1 \le b_2 < 0$ ricaviamo $1/b_2 \le 1/b_1 < 0$, e quindi

$$\begin{cases} 0 < a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 < 0 \end{cases} \qquad \text{implica} \qquad \frac{a_1}{b_1} \ge \frac{a_2}{b_2} \; .$$

Se invece a_1 e a_2 sono negativi, in maniera analoga (esercizio per te) otteniamo

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 < 0 \\ 0 < b_1 \le b_2 \end{cases} \quad \text{implica} \quad \begin{cases} a_1 b_2 \le a_2 b_1 \;, \\ a_1/b_1 \le a_2/b_2 \;, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 < 0 \\ b_1 \le b_2 < 0 \end{cases} \quad \text{implica} \quad \begin{cases} a_1 b_1 \ge a_2 b_2 \;, \\ a_1/b_2 \ge a_2/b_1 \;. \end{cases}$$

Osservazione 1.18 Mentre le formule che abbiamo ottenuto per i numeri positivi sono facili e coincidono con quanto uno si aspetta, quelle con i numeri negativi sono più intricate. La buona notizia è che *non è necessario impararle a memoria.* Al contrario, è (quasi...) meglio non saperle a memoria: è molto più utile (e importante) saperle ricavare. Infatti, tutte queste formule si ricavano semplicemente partendo dal fatto che ogni numero negativo è ottenuto moltiplicando per -1 un numero positivo, e dal fatto che la moltiplicazione per -1 inverte il verso delle disuguaglianze. Tenendo presenti questi due fatti (e tenendo chiusi gli appunti!) domani prova a ricavare *da solo* queste formule; vedrai che, con un po' d'allenamento, sarà molto più semplice (e infinitamente più utile) che impararle a memoria.

Se b_1 e b_2 sono di segni opposti e a_1 e a_2 sono positivi, allora semplicemente guardando i segni otteniamo

$$\begin{cases} 0 < a_1 \le a_2 \\ b_1 < 0 < b_2 \end{cases} \quad \text{implica} \quad \begin{cases} a_1 b_1 < 0 < a_2 b_2 \;, \quad a_2 b_1 < 0 < a_1 b_2 \;, \\ \frac{a_1}{b_1} < 0 < \frac{a_2}{b_2} \;, \quad \frac{a_2}{b_1} < 0 < \frac{a_1}{b_2} \;. \end{cases}$$

Analogamente, se a_1 e a_2 sono entrambi negativi guardando i segni otteniamo

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 < 0 \\ b_1 < 0 < b_2 \end{cases} \quad \text{implica} \quad \begin{cases} a_1 b_2 < 0 < a_2 b_1 \;, \quad a_2 b_2 < 0 < a_1 b_1 \;, \\ \frac{a_1}{b_2} < 0 < \frac{a_2}{b_1} \;, \quad \frac{a_2}{b_2} < 0 < \frac{a_1}{b_1} \;. \end{cases}$$

Infine, se anche a_1 e a_2 sono di segni opposti può succedere di tutto; non ci sono disuguaglianze sempre valide.

Esempio 1.22 Prendiamo $a_1 = -1 < 0 < 1 = a_2$ e $b_1 = -2 < 0 < b_2 = 1$. In questo caso $a_2 b_1 < a_1 b_2$ e $a_2 b_2 < a_1 b_1$. Ma basta prendere $b_1 = -1/2$ per ottenere $a_1 b_2 < a_2 b_1$ e $a_1 b_1 < a_2 b_2$, cioè le disuguaglianze opposte.

1.6 Propagazione degli errori

Siamo finalmente in grado di studiare la propagazione degli errori, come promesso. Supponiamo di aver fatto due misure x e y, e di aver ottenuto v_1 come valore stimato per x con errore assoluto e_1, mentre per y abbiamo ottenuto v_2 come valore stimato e e_2 come errore assoluto; in formule, $x = v_1 \pm e_1$ e $y = v_2 \pm e_2$. Vogliamo trovare quanto valgono i valori stimati e gli errori di $x + y$, $x - y$, xy e x/y.

Come abbiamo visto, le scritture $x = v_1 \pm e_1$ e $y = v_2 \pm e_2$ equivalgono alle disuguaglianze

$$v_1 - e_1 \le x \le v_1 + e_1 \qquad \text{e} \qquad v_2 - e_2 \le y \le v_2 + e_2 \;. \tag{1.8}$$

La formula (1.4) sulla somma delle disuguaglianze (applicata sia alle disuguaglianze di sinistra che a quelle di destra) ci dice quindi che

$$(v_1 + v_2) - (e_1 + e_2) \le x + y \le (v_1 + v_2) + (e_1 + e_2) \;.$$

In altre parole, *il valore stimato* v_{somma} *della somma è la somma dei valori stimati,* e *l'errore assoluto* e_{somma} *della somma è la somma degli errori assoluti:*

$$v_{\text{somma}} = v_1 + v_2 \;, \qquad e_{\text{somma}} = e_1 + e_2 \;.$$

Esempio 1.23 Torniamo al neurone di ratto introdotto nell'Esempio 1.18. Una serie di misurazioni della larghezza d del soma (la parte iniziale, contenente il nucleo) del neurone ha fornito il valore $d = (6 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$ m, cioè un valore stimato $v_1 = 6 \cdot 10^{-6}$ m con un errore assoluto $e_1 = 0.1 \cdot 10^{-6}$ m. Le misure dell'assone di questo neurone ci avevano fornito una lunghezza $l = (7.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-5}$ m, cioè un valore stimato $v_2 = 7.3 \cdot 10^{-5}$ m e un errore assoluto $e_2 = 0.2 \cdot 10^{-5}$ m. Vogliamo trovare la lunghezza dell'intero neurone. Trascurando i dendriti (brevi protuberanze filiformi del soma), la lunghezza L del neurone è ottenuta sommando la larghezza del soma con la lunghezza dell'assone. Otteniamo quindi un valore stimato $v_1 + v_2 = 6 \cdot 10^{-6} + 7.3 \cdot 10^{-5}$ m$= 7.9 \cdot 10^{-5}$ m e un errore assoluto $e_1 + e_2 = 0.1 \cdot 10^{-6} + 0.2 \cdot 10^{-5}$ m $= 0.21 \cdot 10^{-5}$ m. Quindi la lunghezza totale del neurone è $L = (7.9 \pm 0.21) \cdot 10^{-5}$ m.

Per vedere cosa succede con la sottrazione, notiamo che moltiplicando per -1 le disuguaglianze di y otteniamo $-v_2 - e_2 \le y \le -v_2 + e_2$; sommandole a quelle di x troviamo

$$(v_1 - v_2) - (e_1 + e_2) \le x - y \le (v_1 - v_2) + (e_1 + e_2) \;.$$

In altre parole, *il valore stimato della differenza* v_{diff} *è la differenza dei valori stimati,* ma *l'errore assoluto* e_{diff} *della differenza è la somma degli errori assoluti:*

$$v_{\text{diff}} = v_1 - v_2 \;, \qquad e_{\text{diff}} = e_1 + e_2 \;.$$

Esempio 1.24 Stamattina ti sei svegliato con la luna a rovescio, e decidi di sottrarre la larghezza del soma alla lunghezza dell'assone, invece di sommarla. Il valore stimato della differenza D è $v_2 - v_1 = 7.3 \cdot 10^{-5} - 6 \cdot 10^{-6}$ m $= 6.7 \cdot 10^{-5}$ m, mentre l'errore assoluto è lo stesso di prima $e_1 + e_2 = 0.21 \cdot 10^{-5}$ m, per cui otteniamo $D = (6.7 \pm 0.21) \cdot 10^{-5}$ m.

Passiamo al prodotto. Per semplificarci la vita (e perché è la situazione di gran lunga più comune nella pratica sperimentale) supporremo di avere sempre solo misure positive, in modo da poter tranquillamente moltiplicare le disuguaglianze senza che queste cambino verso. La regola (1.6) applicata a (1.8) ci dà

$$(v_1 - e_1)(v_2 - e_2) \leq xy \leq (v_1 + e_1)(v_2 + e_2)$$

che possiamo riscrivere come

$$(v_1v_2 + e_1e_2) - (v_1e_2 + v_2e_1) \leq xy \leq (v_1v_2 + e_1e_2) + (v_1e_2 + e_1v_2) \ .$$

Ops. Il valore stimato del prodotto v_{prod} non è uguale al prodotto dei valori stimati v_1v_2, ma bisogna aggiungervi anche il prodotto e_1e_2 degli errori assoluti; e l'errore assoluto e_{prod} del prodotto non solo si guarda bene dall'essere uguale al prodotto degli errori assoluti, ma mescola valori stimati e errori assoluti:

$$v_{\text{prod}} = v_1v_2 + e_1e_2 \ , \qquad e_{\text{prod}} = v_1e_2 + e_1v_2 \ .$$

Davvero non si può fare di meglio? Vediamo un attimo cosa succede nel nostro neurone di ratto.

Esempio 1.25 Stavolta vogliamo calcolare l'area A del soma del neurone, supponendo (per semplicità) che il soma sia un disco di diametro $d = (6 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$ m, e applicando l'usuale formula $A = \pi r^2$, dove $r = d/2$ è il raggio del soma. Prima di tutto, siccome $1/2$ è un numero che conosciamo con precisione perfetta ed errore assoluto nullo (cioè $v_2 = 1/2$ ed $e_2 = 0$), i conti appena fatti ci dicono che il valore stimato di $r = (1/2)d$ è $v = (1/2)v_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ m, con errore assoluto $e = (1/2)e_1 = 0.05 \cdot 10^{-6}$ m, per cui $r = (3 \pm 0.05) \cdot 10^{-6}$ m. Per calcolare $r^2 = r \cdot r$ usiamo le formule appena ricavate ottenendo

$$v \cdot v + e \cdot e = 9.0025 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \quad \text{e} \quad v \cdot e + e \cdot v = 0.3 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \ ;$$

quindi $r^2 = (9.0025 \pm 0.3) \cdot 10^{-12}$ m^2. Usando il valore $\pi = 3.14 \pm 0.002$ discusso nell'Esempio 1.20 in maniera analoga a sopra per calcolare $A = \pi r^2$ otteniamo

$$A = (28.26845 \pm 0.960005) \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \ .$$

Ora, la precisione di cinque cifre decimali nel valore stimato dell'area in presenza di un errore assoluto che interviene già sulla prima cifra decimale è chiaramente ridicola; le cifre decimali dalla terza in poi non contengono alcuna informazione significativa. Aumentando lievemente l'errore assoluto in modo da essere certi di non escludere alcun valore per quanto improbabile, possiamo usare $A = (28.26 \pm 0.962) \cdot 10^{-12}$ m^2 come valore dell'area altrettanto significativo di quello ottenuto applicato pedissequamente le regole. Ma se ora moltiplichiamo i valori stimati di r e di π otteniamo proprio $3.14 \cdot v \cdot v = 28.26 \cdot 10^{-12}$ m^2; quindi sembrerebbe che in questo caso il valore stimato del prodotto coincida col prodotto dei valori stimati. Che è successo?

Il punto è che se gli errori assoluti sono "piccoli" (come si spera siano) allora il termine e_1e_2 sarà molto più piccolo sia del termine v_1v_2 sia dell'errore assoluto del prodotto, per cui il valore stimato del prodotto sarà *approssimativamente* uguale al prodotto dei valori stimati.

Ma cosa vuol dire "piccolo"? Certo non ci riferiamo a una piccolezza assoluta; un errore di 10^{-6} m è minuscolo se stiamo misurando grattacieli, enorme se stiamo misurando molecole. Quello che conta è che l'errore assoluto e sia "piccolo" rispetto al valore stimato v, cioè che sia "piccolo" l'*errore relativo* e/v.

Quanto piccolo dipende dal problema in esame, ma di solito è sufficiente richiedere che l'errore relativo sia minore di un decimo, $e/v < 10^{-1}$. Infatti, in tal caso abbiamo

$$v_1v_2 \le v_1v_2 + e_1e_2 = \left(1 + \frac{e_1}{v_1}\frac{e_2}{v_2}\right) v_1v_2 < v_1v_2 + 10^{-2}v_1v_2 \ ,$$

per cui la differenza fra il valore stimato del prodotto e il prodotto dei valori stimati è in notazione scientifica avvertibile (perché?) solo alla seconda cifra decimale (e lo sarebbe alla quarta se gli errori relativi fossero minori di 10^{-2}, e così via). Inoltre, l'errore assoluto del prodotto è dato da

$$e_{\mathrm{prod}} = v_1e_2 + e_1v_2 = v_1v_2\left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2}\right) \ ; \tag{1.9}$$

quindi se gli errori relativi sono dell'ordine di 10^{-1} l'errore assoluto agisce al livello della prima cifra decimale in notazione scientifica (della seconda se gli errori relativi fossero minori di 10^{-2}, e così via), mangiandosi qualsiasi correzione possa essere introdotta dal termine e_1e_2.

Riassumendo possiamo quindi dire che *se gli errori relativi sono piccoli* (diciamo minori di 10^{-1}) *allora il valore stimato del prodotto è approssimativamente uguale al prodotto dei valori stimati.* Inoltre, *l'errore assoluto del prodotto è uguale al prodotto dei valori stimati moltiplicato per la somma degli errori relativi:*

$$v_{\mathrm{prod}} \simeq v_1v_2 \ , \qquad e_{\mathrm{prod}} = v_1v_2\left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2}\right) \ .$$

Esempio 1.26 Nel caso del nostro neurone, l'errore relativo sulla larghezza del soma è $e_1/v_1 = 0.01\overline{6} \simeq 1.67 \cdot 10^{-2}$, mentre l'errore relativo sul valore di π è di circa $6.4 \cdot 10^{-4}$. In entrambi i casi l'errore relativo è decisamente inferiore a 10^{-1}, ed effettivamente abbiamo visto che in questo caso il prodotto dei valori stimati fonisce un'ottima approssimazione del valore stimato del prodotto. Infine, usando la formula (1.9) per il calcolo dell'errore assoluto otteniamo che l'errore assoluto dell'area è di circa $0.962 \cdot 10^{-12}$ m^2, in accordo con quanto visto nell'Esempio 1.25.

E come si calcola l'errore relativo del prodotto? La formula esatta è

$$\frac{e_{\mathrm{prod}}}{v_{\mathrm{prod}}} = \frac{v_1e_2 + e_1v_2}{v_1v_2 + e_1e_2} = \left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2}\right)\frac{1}{1 + (e_1e_2/v_1v_2)} \ ,$$

dove l'ultima uguaglianza è ricavata dividendo numeratore e denominatore per $v_1 v_2$. Ora, se entrambi gli errori relativi sono piccoli, diciamo minori di 10^{-1}, otteniamo che $1 + (e_1 e_2 / v_1 v_2) < 1 + 10^{-2}$, per cui

$$0.\overline{9900} = \frac{1}{1 + 10^{-2}} < \frac{1}{1 + (e_1 e_2 / v_1 v_2)} < 1 \; .$$

In altre parole, $\frac{1}{1+(e_1 e_2/v_1 v_2)}$ differisce da 1 per talmente poco, meno di $1/100$, che nel calcolo dell'errore relativo possiamo approssimarlo con 1. In altre parole, *se gli errori relativi sono piccoli* (diciamo minori di 10^{-1}) *allora l'errore relativo del prodotto è approssimativamente uguale alla somma degli errori relativi:*

$$\frac{e_{\text{prod}}}{v_{\text{prod}}} \simeq \frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2} \; .$$

Esempio 1.27 L'errore relativo dell'area del soma calcolato con i valori esatti ottenuti nell'Esempio 1.25 è $0.96005/28.26845 \simeq 0.03396$; la somma degli errori relativi è circa $0.01666 + 0.01666 + 0.00064 = 0.03396$.

Il prodotto è sistemato; passiamo all'inverso. Da $v_1 - e_1 \le x \le v_1 + e_1$ otteniamo

$$\frac{1}{v_1 + e_1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{v_1 - e_1} \; .$$

Come si ricavano valore stimato ed errore assoluto dell'inverso da questa disuguaglianza? Basta osservare che il valore stimato dev'essere il punto medio dell'intervallo, e l'errore assoluto dev'essere la metà della lunghezza dell'intervallo. Quindi il valore stimato v_{inv} dell'inverso è dato da

$$\begin{aligned} v_{\text{inv}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1 + e_1} + \frac{1}{v_1 - e_1}\right) = \frac{v_1 - e_1 + v_1 + e_1}{2(v_1 + e_1)(v_1 - e_1)} = \frac{v_1}{v_1^2 - e_1^2} \\ &= \frac{1}{v_1} \frac{1}{1 - (e_1/v_1)^2} \; . \end{aligned}$$

Questo è il valore stimato esatto. Ma, come prima, se l'errore relativo e_1/v_1 è piccolo allora il fattore $\frac{1}{1-(e_1/v_1)^2}$ è molto vicino a 1; quindi *se l'errore relativo è piccolo* (diciamo minore di 10^{-1}) *allora il valore stimato* v_{inv} *dell'inverso è approssimativamente uguale all'inverso del valore stimato:*

$$v_{\text{inv}} \simeq \frac{1}{v_1} \; .$$

Curiosità 1.12 Quando parleremo delle derivate e dello sviluppo di Taylor, vedremo che per $|x| < 1$ vale un'espansione di questo genere:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

Questo vuol dire che, quando $|x|$ è piccolo, se 1 è una buona approssimazione di $1/(1+x)$ allora $1 - x$ è un'approssimazione migliore, $1 - x + x^2$ una ancora migliore, e così via.

L'errore assoluto e_{inv} dell'inverso è, come detto, metà della lunghezza dell'intervallo, per cui è dato da

$$\begin{aligned} e_{\text{inv}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1 - e_1} - \frac{1}{v_1 + e_1}\right) = \frac{v_1 + e_1 - (v_1 - e_1)}{2(v_1 - e_1)(v_1 + e_1)} = \frac{e_1}{v_1^2 - e_1^2} \\ &= \frac{1}{v_1}\frac{e_1}{v_1}\frac{1}{1 - (e_1/v_1)^2} \ . \end{aligned}$$

Confrontando con la formula precedente vediamo che *l'errore assoluto dell'inverso è uguale al valore stimato dell'inverso moltiplicato per l'errore relativo:*

$$e_{\text{inv}} = v_{\text{inv}}\frac{e_1}{v_1} \ .$$

Siccome l'errore relativo è il quoziente fra l'errore assoluto e il valore stimato otteniamo anche che *l'errore relativo dell'inverso è uguale all'errore relativo originale:*

$$\frac{e_{\text{inv}}}{v_{\text{inv}}} = \frac{e_1}{v_1} \ .$$

Siccome il quoziente si ottiene moltiplicando il numeratore per l'inverso del denominatore, da quanto visto ricaviamo le regole della propagazione degli errori anche per il quoziente: *se gli errori relativi sono piccoli* (diciamo minori di 10^{-1}) *allora il valore stimato* v_{quoz} *del quoziente è approssimativamente uguale al quoziente dei valori stimati.* Inoltre, *l'errore assoluto* e_{quoz} *del quoziente è approssimativamente uguale al quoziente dei valori stimati moltiplicato per la somma degli errori relativi,* e *l'errore relativo è approssimativamente uguale alla somma degli errori relativi:*

$$v_{\text{quoz}} \simeq \frac{v_1}{v_2} \ , \qquad e_{\text{quoz}} \simeq \frac{v_1}{v_2}\left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2}\right) \ , \qquad \frac{e_{\text{quoz}}}{v_{\text{quoz}}} \simeq \frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2} \ .$$

Esempio 1.28 Vogliamo calcolare la velocità media tenuta dai primatisti mondiali sui 100 metri (a ottobre 2006 sono Asafe Powell, giamaicano, e Justin Gatlin, statunitense). Supponendo che la lunghezza della pista sia precisa al centimetro, possiamo valutarla con $l = 100 \pm 0.01$ m. Il record mondiale è $t = 9.77 \pm 0.005$ s, in quanto la federazione mondiale arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale. Gli errori relativi sono rispettivamente $0.01/100 = 10^{-4}$ per la lunghezza, e $0.005/9.77 \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ per il tempo. In entrambi i casi si tratta di errori relativi decisamente piccoli, per cui possiamo permetterci di usare le formule approssimate per la propagazione degli errori. Quindi la velocità media stimata è approssimativamente $100/9.77$ m/s $\simeq 10.235$ m/s, con un errore assoluto approssimativamente uguale a $10.235 \cdot 6 \cdot 10^{-4}$ m/s $\simeq 6.14 \cdot 10^{-3}$ m/s. Dunque otteniamo una velocità media di 10.235 ± 0.00614 m/s, che corrisponde (perché?) a 36.846 ± 0.022104 chilometri all'ora.

Curiosità 1.13 Facendo i conti con precisione, si vede che l'errore relativo del quoziente è esattamente uguale all'errore relativo del prodotto, ed è dato dalla formula

$$\frac{e_{\mathrm{quoz}}}{v_{\mathrm{quoz}}} = \left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2}\right)\frac{1}{1+(e_1e_2/v_1v_2)} \ .$$

Invece il valore stimato del quoziente è dato da

$$v_{\mathrm{quoz}} = \frac{v_1}{v_2}\left(1 + \frac{e_1e_2}{v_1v_2}\right)\frac{1}{1-(e_2/v_2)^2} \ ,$$

e l'errore assoluto del quoziente è dato da

$$e_{\mathrm{quoz}} = \frac{v_1}{v_2}\left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2}\right)\frac{1}{1-(e_2/v_2)^2} \ .$$

1.7 Percentuali

L'errore relativo introdotto nella sezione precedente misura quale frazione del valore stimato è data dall'errore assoluto. Nella pratica sperimentale (e non solo), l'errore relativo è spesso espresso come *percentuale* del valore stimato. Più in generale, le percentuali vengono usate ogni volta che si vogliono confrontare due quantità dello stesso tipo, segnalando che una delle due è una certa frazione dell'altra. Infatti, una percentuale non è altro che una frazione con denominatore uguale a 100 (e numeratore non necessariamente intero):

$$y \textit{ è il } p\% \textit{ di } x \qquad \textit{se e solo se} \qquad \frac{y}{x} = \frac{p}{100} \qquad \textit{se e solo se} \qquad y = \frac{p}{100}\,x \ .$$

In particolare, prendere una percentuale $p\%$ di una quantità x equivale a *moltiplicare* x per $p/100$; il calcolo di una percentuale è sempre una moltiplicazione, e una percentuale è sempre la percentuale di qualcosa. Ricordando questi due fatti diventa facile manipolare le percentuali.

Esempio 1.29 La frase "Una soluzione contiene il 7% di solfato di rame" vuol dire che, indicato con x il peso della soluzione in grammi, allora la soluzione contiene $y = 7x/100$ grammi di solfato di rame. Per esempio, se $x = 75$ g allora $y = 525/100$ g $= 5.25$ g.

Osservazione 1.19 Come regola pratica, date le quantità x e y, per trovare quale percentuale p di x è la quantità y basta moltiplicare per 100 il quoziente y/x, in quanto $p = 100(y/x)$.

Esempio 1.30 *Un mio collega ha un reddito lordo di* 65000 *euro lordi annui, e quest'anno ha pagato 26650 euro di tasse (essendo un dipendente statale non ha evaso neanche un centesimo). Qual è la sua aliquota IRPEF?* Per rispondere basta calcolare 100(26650/65000), e si trova l'aliquota del 41%.

ESEMPIO 1.31 *La popolazione italiana al 1/1/2005 era di* 58 462 375 *abitanti, di cui* 28 376 804 *maschi e* 30 085 571 *femmine. Qual è la percentuale di maschi e femmine sulla popolazione totale?* La percentuale di maschietti è data da $100(28\,376\,804/58\,462\,375) \simeq 48.54\%$, mentre la percentuale di femminucce è data da $100(30\,085\,571/58\,462\,375) \simeq 51.46\%$. *Attenzione:* i valori 48.54 e 51.46 sono delle approssimazioni, calcolati con arrotondamenti ma tenendo presente che la somma *deve* dare 100%.

Osservazione 1.20 Oltre al percento %, si usa talvolta anche il "permille" ‰; funziona esattamente come il percento, sostituendo 1000 a 100 in tutti i conti.

ESEMPIO 1.32 *Sempre al 1/1/2005, in Italia c'erano 9091 ultracentenari. Che percentuale sono della popolazione totale?* In questo caso conviene usare il permille, ottenendo $1000(9091/58\,462\,375) \simeq 0.16‰$.

Una frase che si usa spesso è "la quantità x è aumentata del $p\%$". Questo vuol dire che il valore finale y è ottenuto sommando a x il $p\%$ di x; in altre parole,

$$y = x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x \ .$$

Quindi "aumentare di una percentuale $p\%$" vuol dire *moltiplicare* per $1 + (p/100)$.

ESEMPIO 1.33 *Il peso di un vitello di 56* kg *è aumentato in un mese del 20%. Quanto pesa ora il vitello?* Per quanto appena detto, il peso attuale del vitello è $(1 + 20/100) \cdot 56$ kg $= 67.2$ kg.

ESEMPIO 1.34 *Un cugino del vitello precedente nello stesso mese è cresciuto da 60* kg *a 66* kg. *Qual è l'aumento percentuale?* La parola "percentuale" qui si riferisce al peso iniziale (ricordati: una percentuale è sempre la percentuale di *qualcosa;* determinare cos'è questo qualcosa è fondamentale per non sbagliare). Il vitello è ingrassato di $66 - 60$ kg $= 6$ kg; quindi l'aumento percentuale è $100(6/60) = 10\%$.

Il fatto che un aumento percentuale corrisponde a effettuare una moltiplicazione ha come conseguenza il fatto che due aumenti percentuali consecutivi *non si sommano.* Se una quantità x è aumentata prima del $p\%$ e poi del $q\%$, il suo valore finale è

$$y = \left(1 + \frac{q}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)x = \left(1 + \frac{p + q + (pq/100)}{100}\right)x \neq \left(1 + \frac{p+q}{100}\right)x \ ,$$

per cui l'aumento finale è del $p + q + (pq/100)$ per cento.

ESEMPIO 1.35 *Se il vitello dell'esempio precedente nel mese successivo ingrassa di un altro* 10%, *quanto pesa? Qual è l'aumento percentuale rispetto all'inizio?* Se gli aumenti percentuali si sommassero, l'aumento percentuale rispetto all'inizio sarebbe del $10 + 10 = 20\%$, per cui il vitello dopo due mesi peserebbe

$(1 + 20/100)60$ kg $= 72$ kg. Ma questo conto è *sbagliato*. Infatti, l'aumento percentuale nel secondo mese va calcolato sul peso raggiunto alla fine del primo mese; quindi il peso finale è $(1 + 10/100)66$ kg $= 72.6$ kg. In due mesi il vitello è dunque ingrassato di 12.6 kg, per cui l'aumento percentuale rispetto all'inizio è $100(12.6/60) = 21\%$. Nota che $21 = 10 + 10 + (10 \cdot 10/100)$, in accordo con quanto visto sopra.

In maniera analoga, "diminuire di una percentuale $q\%$" vuol dire *moltiplicare* per $1 - (q/100)$, che è equivalente ad aumentare del $-q\%$.

Osservazione 1.21 In particolare, un aumento del 50% seguito da una diminuzione del 50% non riporta al punto di partenza! Infatti

$$\left(1 - \frac{50}{100}\right)\left(1 + \frac{50}{100}\right)x = \left(1 - \frac{50 \cdot 50/100}{100}\right)x = \frac{75}{100}x\ ,$$

per cui un aumento del 50% seguito da una diminuzione del 50% ci porta al 75% del valore di partenza.

Osservazione 1.22 Siccome la moltiplicazione è commutativa, aumentare (o diminuire) prima del $p\%$ e poi del $q\%$ è la stessa cosa dell'aumentare (o diminuire) prima del $q\%$ e poi del $p\%$.

Esempio 1.36 *Una popolazione di cavie è infettata con una malattia che provoca la morte del 4% delle cavie la prima settimana, e del 6% dei sopravvissuti la seconda settimana. Quale percentuale delle cavie è ancora viva dopo due settimane? E se fossero morte il 6% la prima settimana e il 4% la seconda?* Indichiamo con x il numero totale di cavie. Dopo la prima settimana sono morte $(4/100)x$ cavie, per cui ne sono sopravvissute $(96/100)x$. La seconda settimana ne muoiono altre $(6/100)(96/100)x = (5.76/100)x$. Quindi in totale è morto il $4 + 5.76 = 9.76\%$ delle cavie, per cui ne è sopravvissuto il $100 - 9.76 = 90.24\%$. Nel secondo caso, dopo la prima settimana sono morte $(6/100)x$ cavie, per cui ne sono sopravvissute $(94/100)x$. La seconda settimana ne muoiono $(4/100)(94/100)x = (3.76/100)x$. Quindi in totale è morto il $6 + 3.76 = 9.76\%$ delle cavie, per cui anche stavolta ne è sopravvissuto il $100 - 9.76 = 90.24\%$.

Concludiamo con un esempio che sottolinea come sia importante precisare di cosa si vuole calcolare la percentuale.

Esempio 1.37 *Due popolazioni di cavie, composte entrambe dallo stesso numero di animali, vengono infettate da una stessa malattia. Una delle due popolazioni viene trattata con un medicinale sperimentale. Dopo una settimana, il 6% della popolazione trattata è morto, contro l'8% della popolazione non trattata. Qual è il miglioramento percentuale dovuto al medicinale?* La domanda è ambigua: non è definito il concetto di "miglioramento percentuale", né precisato qual è la quantità rispetto a cui si vuole calcolare la percentuale. Se "miglioramento percentuale" vuol dire "percentuale del numero di morti in meno rispetto alla popolazione" allora il miglioramento percentuale è $8 - 6 = 2\%$. Se invece "miglioramento percentuale" vuol dire "percentuale del numero di morti in meno rispetto al numero totale di morti della popolazione non trattata" allora il miglioramento percentuale è $100(2/100)/(8/100) = 25\%$. Lascio a te decidere quale delle due interpretazioni è più significativa, e quale delle due interpretazioni verrebbe usata da un pubblicitario che deve promuovere la medicina...

1.8 Teoria intuitiva degli insiemi

In Matematica e in tutte le scienze capita molto frequentemente di dover considerare insiemi (classi, collezioni, famiglie, agglomerati...) di oggetti; di conseguenza, sono state creati una terminologia e delle notazioni (cioè nomi e simboli) per facilitarne l'uso.

Se A è un insieme, scriveremo $a \in A$ per indicare che l'elemento a appartiene all'insieme A, e $a \notin A$ per indicare che a non appartiene ad A. Se B è un altro insieme i cui elementi appartengono tutti anche ad A, diremo che B è un *sottoinsieme* di A (o che è *contenuto* in A), e scriveremo $B \subseteq A$ (oppure $A \supseteq B$, che si legge "A contiene B"). Se inoltre B è effettivamente diverso da A — cioè A contiene degli elementi che non appartengono a B — diremo che B è un *sottoinsieme proprio* di A, e scriveremo $B \subset A$ (o $A \supset B$). Tra parentesi, due insiemi A e B sono *uguali*, e scriveremo $A = B$, se e solo se hanno esattamente gli stessi elementi. L'*insieme vuoto*, cioè l'insieme privo di elementi, sarà indicato con $\varnothing$.

ESEMPIO 1.38 Sia F l'insieme di tutti i felini. Il mio gatto Grog è un felino, per cui appartiene a F; in simboli, Grog $\in F$. Invece, il cane Snoopy dei miei vicini non è un felino, per cui Snoopy $\notin F$. Tutti i gatti sono dei felini, per cui se indichiamo con G l'insieme dei gatti abbiamo $G \subseteq F$ e $F \supseteq G$. Ma l'insieme dei felini è strettamente più grande dell'insieme dei gatti; per esempio, i giaguari non sono gatti. Quindi più precisamente possiamo scrivere $G \subset F$ e $F \supset G$. Oltre a Grog, a casa mia abita anche una gatta di nome Daga, e nessun altro felino. Quindi l'insieme M dei felini che abitano a casa mia coincide con l'insieme composto da Grog e Daga; in simboli, $M = \{\text{Grog, Daga}\}$. A meno di sconvolgenti scoperte zoologiche, non esistono felini volanti; quindi l'insieme V dei felini volanti è uguale all'insieme vuoto (entrambi gli insiemi non hanno elementi), cioè $V = \varnothing$.

Osservazione 1.23 Attenzione a distinguere gli elementi dagli insiemi composti da un solo elemento. L'insieme $\{\text{Grog}\}$ è una cosa diversa dal gatto Grog; l'insieme non miagola, il gatto sì. La distinzione si riflette anche nelle notazioni: mentre Grog $\in F$, in quanto Grog è un elemento dell'insieme F di tutti i felini, dobbiamo scrivere $\{\text{Grog}\} \subset F$, in quanto $\{\text{Grog}\}$ è un sottoinsieme (e non un elemento) dell'insieme di tutti i felini.

CURIOSITÀ 1.14 Se vuoi farti venire un mal di testa, considera l'insieme U di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi (per esempio, l'insieme dei felini non è un felino, per cui non è un elemento di se stesso), e chiediti se U è un elemento di se stesso oppure no. Questo esempio mostra come l'apparentemente semplice teoria degli insiemi può avere degli aspetti estremamente delicati, con cui i matematici stanno lottando da un paio di secoli.

Una situazione che capiterà spesso sarà quella di dover considerare "il sottoinsieme B degli elementi dell'insieme A che godono della proprietà tale". In simboli, questa definizione sarà abbreviata in[6]

$$B = \{a \in A \mid a \text{ gode della proprietà tale}\} .$$

Esempio 1.39 Il sottoinsieme B dei numeri naturali multipli di 3 può essere rappresentato da

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è divisibile per } 3\} ,$$

o anche da

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\} .$$

Come sicuramente saprai già, ci sono alcune operazioni naturali che si possono eseguire sugli insiemi. Siano A e B due insiemi qualunque. Allora

- l'*intersezione* $A \cap B$ di A e B è l'insieme contenente solo gli elementi che stanno sia in A sia in B; se $A \cap B = \varnothing$, diremo che gli insiemi A e B sono *disgiunti*.
- l'*unione* $A \cup B$ di A e B è l'insieme che contiene tutti gli elementi di A assieme a tutti gli elementi di B;
- la *differenza* $A \setminus B$ di A e B è l'insieme che contiene esattamente quegli elementi di A che non stanno in B;
- il *prodotto cartesiano* $A \times B$ di A e B è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) dove a è un qualunque elemento di A e b è un qualunque elemento di B.

Esempio 1.40 Sia A l'insieme dei numeri naturali pari minori di 8, e B l'insieme dei numeri naturali minori di 3, cioè

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari e } n < 8\} = \{0, 2, 4, 6\} ,$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 3\} = \{0, 1, 2\} .$$

Allora

$$A \cap B = \{0, 2\} , \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6\} , \quad A \setminus B = \{4, 6\} , \quad B \setminus A = \{1\} ,$$
$$A \times B = \{(0,0),(0,1),(0,2),(2,0),(2,1),(2,2),(4,0),(4,1),(4,2),(6,0),(6,1),(6,2)\},$$
$$B \times A = \{(0,0),(0,2),(0,4),(0,6),(1,0),(1,2),(1,4),(1,6),(2,0),(2,2),(2,4),(2,6)\}.$$

Se poi C è l'insieme dei numeri naturali dispari minori di 5 allora $C = \{1, 3\}$ e $A \cap C = \varnothing$, cioè A e C sono disgiunti.

[6] Alcuni testi si usano i due punti : al posto della barra $|$.

Osservazione 1.24 Quando descriviamo un insieme elencandone gli elementi, ogni elemento va considerato una volta sola. Per esempio, $\{1, 2, 3, 2\}$ e $\{1, 2, 3\}$ sono lo stesso insieme: $\{1, 2, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$. Un insieme è completamente determinato dai suoi elementi.

ESEMPIO 1.41 Indichiamo con G_A (rispettivamente, G_B, G_{AB}, G_0) l'insieme dei pazienti di un certo ospedale con gruppo sanguigno di tipo A (rispettivamente, B, AB e 0), e con R_+ (rispettivamente, R_-) l'insieme dei pazienti dello stesso ospedale il cui sangue contiene il fattore Rh (rispettivamente, in cui il fattore Rh è assente). Allora $G_A \cup R_-$ è l'insieme dei pazienti con gruppo sanguigno di tipo A *oppure* con sangue privo di fattore Rh (o entrambe le cose), $G_B \cap R_-$ è l'insieme dei pazienti con gruppo sanguigno di tipo B *e* privi di fattore Rh, e $G_{AB} \setminus R_-$ è l'insieme dei pazienti con gruppo sanguigno di tipo AB e che *non* sono privi del fattore Rh, per cui $G_{AB} \setminus R_- = G_{AB} \cap R_+$. Quest'ultima uguaglianza segue (perché?) dal fatto che ogni paziente o ha il fattore Rh o non ce l'ha ($R_+ \cup R_-$ è l'insieme di tutti i pazienti dell'ospedale), e che un paziente non può contemporeanamente avere e non avere il fattore Rh ($R_+ \cap R_- = \varnothing$, cioè R_+ ed R_- sono disgiunti).

Osservazione 1.25 In Matematica, la frase "questo *e* quello" è vera se e solo se sono veri sia questo sia quello; la frase "questo *o* quello" è invece vera se e solo se sono veri questo oppure quello o entrambi. Possiamo dire che l'insieme dei casi in cui è vero "questo e quello" è l'*intersezione* dell'insieme dei casi in cui è vero questo con l'insieme dei casi in cui è vero quello; mentre l'insieme dei casi in cui è vero "questo o quello" è l'*unione* dell'insieme dei casi in cui è vero questo con l'insieme dei casi in cui è vero quello.

CURIOSITÀ 1.15 Più raramente viene usata anche la frase "*o* questo *o* quello", che è vera se e solo se è vero questo oppure è vero quello ma non sono entrambi veri. Corrisponde all'operazione insiemistica di *differenza simmetrica:* la differenza simmetrica di A e B è $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

CURIOSITÀ 1.16 Le operazioni di unione e intersezione sugli insiemi godono di proprietà algebriche in parte simili e in parte diverse rispetto alle proprietà algebriche della somma e prodotto fra numeri. Per esempio, valgono le proprietà associative e commutative:

$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C\ , \quad A\cup B = B\cup A\ , \quad A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C\ , \quad A\cap B = B\cap A\ .$$

Mentre solo la somma ha la proprietà distributiva rispetto al prodotto, e non il prodotto rispetto alla somma, per unione e intersezione valgono entrambe le proprietà distributive:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\ , \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\ .$$

L'insieme vuoto gioca in un certo senso il ruolo di elemento neutro per l'unione:

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A\ , \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing\ .$$

Del tutto nuove sono invece le proprietà di idempotenza:

$$A \cup A = A\ , \qquad A \cap A = A\ .$$

1.9 Logica elementare

Fare della matematica vuol dire giungere a determinate conclusioni facendo certi ragionamenti[7]. Capita dunque spesso di usare frasi come “implica”, “per ogni” o simili; per risparmiare tempo sono stati inventati dei simboli che le rappresentano.

Invece di “implica” a volte scriveremo “$\Longrightarrow$”, mentre “è equivalente a” sarà talvolta sostituito da “$\Longleftrightarrow$”. Può succedere che “tale che” sia sostituito da due punti “:” o da una barra verticale “|”. Invece di “per ogni” a volte scriveremo “$\forall$”, e al posto di “esiste” a volte scriveremo “$\exists$”.

Esempio 1.42 Se P è l’insieme dei numeri pari, e $\mathbb{N}$ l’insieme dei numeri naturali, la frase “per ogni numero pari a esiste un numero naturale m tale che $a = 2m$” diventa

$$\forall a \in P \quad \exists\, m \in \mathbb{N}\colon\ a = 2m\ .$$

Osservazione 1.26 Non si possono scambiare impunemente le frasi “per ogni” ed “esiste”, o i simboli $\forall$ ed $\exists$. La frase “ogni cellula ha un nucleo” vuol dire “per ogni cellula esiste un nucleo”, che è ben diverso dal dire “esiste un nucleo unico per ogni cellula”, lo stesso nucleo per tutte. Con le notazioni dell’esempio precedente, la formula

$$\forall a \in P \quad \exists\, m \in \mathbb{N}\colon\ a = 2m$$

significa una cosa ben diversa dalla formula

$$\exists\, m \in \mathbb{N} :\ \forall a \in P\ a = 2m\ .$$

La prima formula vuol dire “per ogni numero pari a esiste un numero naturale m (che dipende da a) tale che $a = 2m$”, che è ovviamente vero. La seconda formula invece vuol dire che “esiste un numero naturale m (uno solo, ben determinato) tale che per ogni numero pari a si ha $a = 2m$”, ovvero ogni numero pari è il doppio del nostro m, lo stesso qualunque sia il numero pari considerato, affermazione chiaramente falsa.

Capiterà più volte in seguito di dover negare una frase che comincia con “per ogni” o con “esiste”. La negazione esatta di “per ogni a succede questo” è “non per ogni a succede questo”, ovvero “esiste un a per cui non succede questo”, che è ben diverso dal dire “per ogni a non succede questo”. Analogamente, la negazione esatta di “esiste un b per cui succede questo” è “non esiste un b per cui succede questo”, cioè “per ogni b non succede questo”.

Esempio 1.43 Vogliamo negare la frase “tutti i gatti sono verdi” (che è un modo più corretto grammaticalmente di dire “per ogni gatto succede che il gatto è verde”). Come abbiamo appena osservato, la negazione esatta è “non tutti i gatti sono verdi”, ovvero “esiste almeno un gatto che non è verde”. La frase “nessun gatto è

---

[7] Lo studio della struttura di questi ragionamenti è compito della Logica Matematica.

verde” (cioè “non esiste un gatto verde”) pur essendo vera *non* è la negazione del nostro enunciato originale “tutti i gatti sono verdi”; è un’affermazione molto più forte, e molto più difficile da verificare (per far vedere che “tutti i gatti sono verdi” è falsa basta trovare *un solo* gatto non verde; per far vedere che “nessun gatto è verde” è vera devi controllare il colore di tutti i gatti sulla terra).

Esempio 1.44 *Qual è la negazione della frase “esiste vita sugli altri pianeti del sistema solare”?* La risposta esatta è “non esiste vita sugli altri pianeti del sistema solare”, cioè “tutti gli altri pianeti del sistema solare sono privi di vita”. L’affermazione “esiste un pianeta del sistema solare privo di vita” non esclude che ci sia un altro pianeta su cui esista la vita, per cui non è la risposta esatta.

Come forse già sai, una parte notevole della Matematica consiste nel decidere se certe affermazioni sono vere o false. In alcuni casi, per stabilirlo basta un esempio; in altri, invece, anche diecimila esempi sono inutili, ed è necessario un ragionamento che copra in una volta sola tutti i casi possibili (in altre parole, è necessaria una *dimostrazione*). Orbene, un tipico problema dello studente novizio è esattamente capire quando è necessaria una dimostrazione, e quando invece è sufficiente un esempio.

L’idea di fondo è che la dimostrazione è legata al “per ogni”, mentre l’esempio all’“esiste”. Per vedere se l’affermazione “per ogni a succede questo” è vera, devi *dimostrarlo* con un ragionamento valido per ogni valore di a. Invece, per vedere se l’affermazione “esiste un b per cui succede questo” è vera ti basta trovare un singolo esempio (un singolo valore di b) in cui questo sia verificato.

Esempio 1.45 Supponiamo di voler vedere se l’affermazione “ogni *marine* americano possiede una divisa verde” è vera. In questo caso gli esempi sono inutili: anche dopo aver controllato gli indumenti di migliaia di *marine* non potremmo ancora escludere l’esistenza di un *marine* senza divise verdi. Ci serve un ragionamento generale; possiamo per esempio dire che il regolamento militare prescrive senza eccezioni che ogni *marine* abbia una divisa verde, e così *dimostrare* la verità della nostra affermazione senza bisogno di esempi.

Esempio 1.46 Adesso vogliamo invece stabilire la verità dell’affermazione “talvolta piove di domenica”. In questo caso basta un esempio; è sufficiente una domenica di pioggia per verificare che l’affermazione è corretta.

Riassumendo: quando ti viene chiesto di decidere se l’affermazione “per ogni a succede questo” è vera o falsa, tu hai due possibilità: se ritieni che sia vera, devi dimostrarlo per qualunque valore di a; se invece ritieni che sia falsa (cioè che sia vero che “esiste un a per cui questo non succede”), ti basta trovare un esempio in cui è falsa. Analogamente, per far vedere che l’affermazione “esiste un b per cui succede questo” è vera basta trovare un esempio, cioè un b specifico per cui “questo” succede; se invece ritieni sia falsa, devi dimostrare che per ogni valore di b “questo” non accade.

Un’altra frase che compare spesso in matematica è “se succede $\mathcal{A}$ allora capita anche $\mathcal{B}$", che si abbrevia[8] in "$\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$" o addirittura in "$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$". È importante rendersi conto che una frase del genere non dice nulla su $\mathcal{B}$ quando $\mathcal{A}$ non si verifica.

Esempio 1.47 Anche se la frase "se si gioca di martedì allora il Pontedera è in testa alla classifica del campionato di serie A" fosse vera, non sapremmo nulla sulla effettiva posizione in classifica del Pontedera, in quanto le partite si giocano la domenica.

In particolare, la frase "se succede $\mathcal{A}$ allora capita anche $\mathcal{B}$" è falsa se e solo se contemporaneamente $\mathcal{A}$ è vera e $\mathcal{B}$ è falsa (si gioca di martedì e il Pontedera non è in testa alla classifica). Dunque la negazione di "$\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$" è "$\mathcal{A}$ non implica $\mathcal{B}$", cioè "capita che $\mathcal{A}$ sia vera e $\mathcal{B}$ sia falsa".

Esempio 1.48 Vogliamo vedere se è vero o falso che la presenza di un certo gene a (affermazione $\mathcal{A}$) provoca la malattia M (affermazione $\mathcal{B}$). Se esiste anche *una sola* persona con il gene a e senza la malattia M allora siamo *sicuri* che il gene non provoca la malattia (è falso che $\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$, in quanto capita che $\mathcal{A}$ sia vera e $\mathcal{B}$ falsa). L'esistenza di migliaia di persone con il gene a e la malattia M invece *non* basta a *dimostrare* che la presenza del gene a implichi la malattia M; lo rende solo probabile. Ma attenzione: ci sono anche migliaia di persone che hanno il gene a e gli occhi castani (o migliaia di persone che hanno il gene a e hanno un'auto rossa) senza che questo significhi che la presenza del gene a influisce sul colore degli occhi (o sulle preferenze nella scelta del colore dell'auto). Per verificare con certezza assoluta che il gene a provoca la malattia M occorre un ragionamento generale; per esempio, ricostruire il meccanismo fisiologico che dalla presenza del gene a porta ai malfunzionamenti che sfociano nella malattia M.

Infine, è *fondamentale* rendersi conto che la presenza o meno della malattia M in persone che *non* hanno il gene a non ci dice *alcunché* sulla relazione fra il gene e la malattia. L'esistenza di persone sane senza il gene non vuol dire che persone con il gene si debbano necessariamente ammalare; e l'esistenza di persone malate senza il gene vuol dire soltanto che la malattia *può* essere causata *anche* da altri fattori, ma non esclude che possa essere causata anche dal gene a da solo.

Concludiamo con un'ultima osservazione. La frase tanto amata dai matematici "$\mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{B}$" significa "$\mathcal{A}$ è equivalente a $\mathcal{B}$", cioè "$\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$ e al contempo $\mathcal{B}$ implica $\mathcal{A}$". In altre parole ancora, $\mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{B}$ significa che ogni qual volta $\mathcal{A}$ è vera allora anche $\mathcal{B}$ è vera, e viceversa.

[8] Si dice anche che $\mathcal{A}$ è *condizione sufficiente* perché accada $\mathcal{B}$, e che $\mathcal{B}$ è *condizione necessaria* perché succeda $\mathcal{A}$.

Complementi

1C.1 L'alfabeto greco

Se provieni dal liceo classico, conoscerai di certo l'alfabeto greco; ma se provieni da qualunque altra scuola potrebbe esserti molto meno noto (per non dire del tutto sconosciuto). In Matematica l'uso delle lettere greche è praticamente continuo; quindi è consigliabile saperle scrivere e riconoscere. Per aiutarti, qui di seguito troverai l'elenco alfabetico delle lettere greche maiuscole e minuscole, con relativo nome.

A	α	alfa	I	ι	iota	R	ρ, ϱ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ, ς	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Υ	υ	upsilon
E	ϵ, ε	epsilon	N	ν	nu	Φ	ϕ, φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ, ϑ	theta	Π	π, ϖ	pi	Ω	ω	omega