

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B

COMPITINO 3 FILA B — SOLUZIONI

PROF. MARCO ABATE

30 marzo 2007

1. PARTE I

**Esercizio 1.1.** Stabilire (giustificando la risposta) se la funzione  $f(x) = 2x^3 + x$  è crescente o meno.

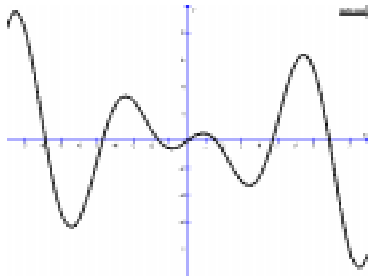
La funzione è definita su tutto  $\mathbb{R}$  e qui derivabile. Quindi se ha derivata prima maggiore di zero ovunque è crescente. Calcolando la derivata, si ottiene

$$f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Quindi la funzione è crescente.

**Esercizio 1.2.** Stabilire (giustificando la risposta) quale delle seguenti funzioni può avere un grafico come quello in figura:

- (1)  $x \cos x$ ;
- (2)  $x^2 \cos x$ ;
- (3)  $x \sin x$ ;
- (4)  $x^2 \sin x$ .



Per risolvere questo esercizio sono possibili molte vie differenti. Ne presentiamo una. Il grafico rappresentato in figura è simmetrico rispetto all'origine, ovvero la funzione rappresentata è dispari ( $f(-x) = -f(x)$ , per ogni  $x$  nel dominio). Solo le funzioni (1) e (4) sono dispari, mentre (2) e (3), essendo pari, vanno escluse<sup>1</sup>.

Resta ora da stabilire quale fra  $f_1(x) = x \cos x$  e  $f_4(x) = x^2 \sin x$  è la funzione rappresentata. Calcolando le derivate prime, si ottiene:

$$f_1'(x) = \cos x - x \sin x,$$

$$f_4'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Nell'origine il grafico ha tangente non orizzontale; quindi la funzione cercata deve avere derivata non nulla in 0. Siccome  $f_1'(0) = 1$  e  $f_4'(0) = 0$ , si conclude che la funzione rappresentata è la (1),  $x \cos x$ .

<sup>1</sup>Ricordiamo che  $x$  e  $\sin x$  sono funzioni dispari, mentre  $x^2$  e  $\cos x$  sono funzioni pari. Il prodotto di due funzioni con la stessa parità è pari, quello di due funzioni una pari e una dispari è dispari.

**Esercizio 1.3.** Calcolare il seguente integrale definito:

$$(1) \quad \int_0^1 (3x^2 - 1)dx$$

Ricordando che per le proprietà degli integrali

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b f'(x)dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a),$$

e che

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1},$$

si ottiene

$$\int_0^1 (3x^2 - 1)dx = \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 1dx = x^3|_0^1 - x|_0^1 = 1^3 - 0^3 - (1 - 0) = 0.$$

## 2. PARTE II

**Esercizio 2.1.** Ipotesi biologiche sulla crescita di una popolazione di batteri suggeriscono che il numero  $N(x)$  di individui nella popolazione al tempo  $x$  segua un andamento dato da:

$$(2) \quad N(x) = \frac{e^{2x}}{2x + 1}.$$

Studia la funzione  $N(x)$  (anche per  $x < 0$ ) disegnandone il grafico.

*Dominio.* L'unica cosa da escludere è che si annulli il denominatore. Pertanto  $2x + 1 \neq 0$ , ovvero  $x \neq -\frac{1}{2}$ . Il dominio della funzione è  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ .

*Segno.* Il numeratore è sempre positivo. Il segno di  $N(x)$  è dato pertanto dal segno del denominatore. Ora,  $2x + 1 > 0$  se e solo se  $x > -\frac{1}{2}$ . In  $(-\infty, -\frac{1}{2})$   $N(x)$  è negativa, in  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$  è positiva.

*Limiti.* I limiti da calcolare sono a  $-\infty, -\frac{1}{2}^-, -\frac{1}{2}^+, +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{2x + 1} = \left[ \frac{e^{-\infty}}{-\infty + 1} \right] = \left[ \frac{0^+}{-\infty} \right] = 0^-;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^\pm} \frac{e^{2x}}{2x + 1} = \left[ \frac{e^{-1^\pm}}{-1^\pm + 1} \right] = \left[ \frac{2}{e \cdot 0^\pm} \right] = \pm\infty.$$

Quindi la funzione ha un asintoto verticale per  $x = -\frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x + 1} = +\infty,$$

perchè sappiamo che l'esponenziale diverge all'infinito più velocemente di qualsiasi polinomio.

*Crescenza.* Per studiare la crescita della funzione, studiamo il segno della derivata prima.

$$N'(x) = \frac{2e^{2x}(2x + 1) - e^{2x} \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{4xe^{2x}}{(x + 1)^2}.$$

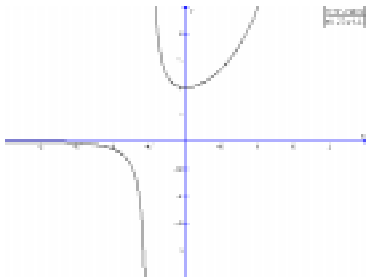
I fattori  $4, e^{2x}$  e  $(2x + 1)^2$  sono sempre positivi in  $D$ . Pertanto il segno di  $N'(x)$  è dato dal segno di  $x$ . Quindi  $N(x)$  è decrescente in  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  e in  $(-\frac{1}{2}, 0]$ ; è crescente in  $[0, \infty)$ . Il punto  $0$  è un punto di minimo locale per la funzione,  $N(0) = 1$ .

*Concavità.* Per studiare la concavità della funzione, studiamo il segno della derivata seconda.

$$N''(x) = \frac{(4e^{2x} + 8xe^{2x})(2x + 1)^2 - 4xe^{2x}(4(2x + 1))}{(2x + 1)^4} = \frac{4e^{2x}(1 + 4x^2)}{(2x + 1)^3}.$$

I fattori  $4$ ,  $e^{4x}$  e  $1 + 4x^2$  sono sempre positivi, pertanto il segno di  $N''(x)$  è dato dal segno di  $(2x + 1)^3$ , ovvero di  $2x + 1$ . Quindi  $N(x)$  è concava in  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  e convessa in  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ .

Il grafico della funzione è rappresentato in figura.



**Esercizio 2.2.** Trova la funzione lineare e quella quadratica che meglio approssimano nel punto  $x = 0$  la seguente funzione:

$$f(x) = x \sin(x).$$

Le migliori approssimazioni sono date dai polinomi di Taylor di primo e secondo grado. Calcolando le derivate prime e seconde di  $f$  si ha:

$$f'(x) = \sin x + x \cos x, \quad f''(x) = 2 \cos x - x \sin x.$$

Pertanto  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 2$ , per cui la migliore approssimazione lineare è:

$$P_{1,f}(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0,$$

e la migliore approssimazione quadratica è

$$P_{2,f}(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 = x^2.$$

**Esercizio 2.3.** Considera una variabile aleatoria  $X$  con funzione di distribuzione

$$P\{X \leq t\} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ 1 & \text{se } t \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Trova:

- (1) la densità di probabilità  $f_X$ ;
- (2) la media (valor medio, valore atteso)  $E(X)$  di  $X$ ;
- (3) la varianza  $\text{Var}(X)$  di  $X$ .

(1) Densità di probabilità e funzione di distribuzione sono legate tra loro dalle seguenti relazioni:

$$P\{X \leq t\} = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx; \quad f_X = \frac{dP\{X \leq t\}}{dt}$$

Pertanto,

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{se } t > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

(2) Il valor medio di una variabile aleatoria è dato da

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Pertanto,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{4} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{8}.$$

(3) La varianza di una variabile aleatoria è data da

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 dx \\ &= \frac{\left(x - \frac{5}{8}\right)^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\left(x - \frac{5}{8}\right)^3}{6} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{592}{3072} = \frac{37}{192}. \end{aligned}$$