Capitolo 2

Teoria locale delle superfici

2.1 Definizione di superficie

Vogliamo ora studiare le superfici nello spazio. Di nuovo, si pone il problema della definizione. Per le proprietà locali possiamo usare un approccio simile a quello delle curve e limitarci a considerare delle applicazioni C^∞ da aperti nel piano a valori nello spazio; per le proprietà globali invece conviene procedere come per le linee.

L'ovvia generalizzazione del concetto di curva è quello di superficie immersa:

Definizione 2.1.1: Una *superficie immersa* (o *parametrizzata*) nello spazio è un'applicazione $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, tale che il differenziale $d\varphi_x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ abbia rango massimo (cioè 2) in ogni punto $x \in U$.

Osservazione 2.1.1. Il differenziale $d\varphi_x$ è rappresentato dalla matrice jacobiana

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^2}(x) \\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}(x) \\ \frac{\partial\varphi^3}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial\varphi^3}{\partial x^2}(x) \end{vmatrix},$$

dove $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$.

In questa definizione l'enfasi è sulla mappa. Non stiamo richiedendo né che sia un omemomorfismo con l'immagine né che sia globalmente iniettiva; entrambe queste proprietà sono vere localmente, però. Per dimostrarlo, ci serve un lemma.

Lemma 2.1.1: *Sia $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ una superficie immersa, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto. Allora per ogni $x_0 \in U$ esistono un intorno aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ di $(x_0, 0) \in U \times \mathbb{R}$, un intorno aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $\varphi(x_0)$, e un diffeomorfismo $G\colon \Omega \to W$ tale che $G(x, 0) = \varphi(x)$ per ogni $(x, 0) \in \Omega \cap (U \times \{0\})$.*

Dimostrazione: Per definizione di superficie immersa, il differenziale di $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ in x_0 ha rango 2; quindi la matrice Jacobiana di φ calcolata in x_0 ha un minore 2×2 con determinante non nullo. A meno di riordinare le coordinate possiamo supporre che il minore sia quello ottenuto scartando la terza riga, cioè

$$\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j=1,2} \neq 0.$$

Sia $G\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$G(x^1, x^2, t) = \varphi(x^1, x^2) + (0, 0, t)$$

(se per trovare il minore con determinante non nullo avessimo scartato la prima o la seconda riga allora G sarebbe stata definita sommando a φ nel primo caso $(t, 0, 0)$, e $(0, t, 0)$ nel secondo caso). Chiaramente, $G(x, 0) = \varphi(x)$ per ogni $x \in U$, e

$$\det(dG_{(x_0,O)}) = \det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j=1,2} \neq 0;$$

il teorema della funzione inversa ci fornisce quindi un intorno $\Omega \subseteq U \times \mathbb{R}$ di (x_0, O) e un intorno $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $\varphi(x_0)$ con $W \cap S \subseteq \varphi(U)$ tale che $G|_\Omega$ sia un diffeomorfismo fra Ω e W, come voluto. $\square$

In particolare abbiamo

Corollario 2.1.2: *Sia $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie immersa. Allora ogni $x_0 \in U$ ha un intorno $U_1 \subseteq U$ tale che $\varphi|_{U_1}: U_1 \to \mathbb{R}^3$ sia un omeomorfismo con l'immagine.*

Dimostrazione: Sia $G: \Omega \to W$ il diffeomorfismo fornito dal lemma precedente, $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione sulle prime due coordinate, e $U_1 = \pi\big(\Omega \cap (U \times \{0\})\big)$. Allora $\varphi|_{U_1} = G|_{U_1 \times \{O\}}$ è un omeomomorfismo con l'immagine, come richiesto. □

Osservazione 2.1.2. Potremmo definire il concetto di superfici immerse equivalenti come fatto per le curve, tramite un cambiamento di parametro. Sfortunatamente, però, non esiste una parametrizzazione canonica analoga alla parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. Il motivo, in parole povere, è il seguente: un diffeomorfismo fra due intervalli di $\mathbb{R}$ che conserva le lunghezze (e l'orientazione) è necessariamente una traslazione, mentre esistono infiniti diffeomorfismi non lineari fra aperti di $\mathbb{R}^2$ che conservano le aree (e l'orientazione). Infatti, per conservare le lunghezze e l'orientazione un diffeomorfismo h fra intervalli deve soddisfare (perché?) $h' \equiv 1$, mentre per conservare le aree e l'orientazione un diffeomorfismo H fra aperti del piano deve soddisfare (perché?) $\det \mathrm{Jac}(H) \equiv 1$, che è una condizione molto meno stringente. Per esempio, tutti i diffeomorfismi della forma $H(x,y) = \big(x + f(y), y\big)$, dove f è una qualsiasi funzione differenziabile di una variabile, conservano aree e orientazione.

Più interessante, e importante anche per l'estensione a dimensione più alta, è la generalizzazione del concetto di linea.

Definizione 2.1.2: Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una *superficie (regolare)* nello spazio se per ogni $p \in S$ esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e un'applicazione $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che:

(a) $\varphi(U) \subseteq S$ è un intorno aperto di p in S (ovvero, equivalentemente, esiste un intorno aperto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(U) = V \cap S$);
(b) φ è un omeomorfismo con l'immagine;
(c) il differenziale $d\varphi_x$ ha rango massimo per ogni $x \in U$.

L'applicazione φ è detta *parametrizzazione locale* in p; se $O \in U$ e $\varphi(O) = p$ diremo che la parametrizzazione locale è *centrata* in p. L'inversa $\varphi^{-1}: \varphi(U) \to U$ è detta *carta locale* in p; l'intorno $\varphi(U)$ di p in S è detto *intorno coordinato*, e le coordinate $\big(x^1(p), x^2(p)\big) = \varphi^{-1}(p)$ sono dette *coordinate locali* di p.

Osservazione 2.1.3. Se $\varphi: U \to S$ è una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $\chi: U_1 \to U$ è un diffeomorfismo, dove U_1 è un altro aperto di $\mathbb{R}^2$, allora $\tilde\varphi = \varphi \circ \chi$ è ancora una parametrizzazione locale di S (perché?). In particolare, se $p = \varphi(x_0) \in S$ e χ è la traslazione $\chi(x) = x + x_0$, allora $\tilde\varphi = \varphi \circ \chi$ è una parametrizzazione locale di S centrata in p.

Osservazione 2.1.4. Se $\varphi: U \to S$ è una parametrizzazione locale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $W \subset U$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$, allora anche $\varphi|_W$ è una parametrizzazione locale di S (perché?). In particolare, possiamo trovare parametrizzazioni locali con dominio piccolo quanto ci pare.

Osservazione 2.1.5. Richiedendo che le parametrizzazioni locali siano di classe C^r con $r \geq 1$ si definisce il concetto di *superficie regolare di classe C^r*. Molto di quanto faremo è valido anche per superfici di classe C^r con r sufficientemente grande (di solito $r = 4$ è sufficiente), ma alcune cose (quali la caratterizzazione dei vettori tangenti come derivazioni) richiederanno regolarità C^∞.

Esercizio 2.1.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $S_1 \subseteq S$ un aperto di S. Dimostra che anche S_1 è una superficie.

Definizione 2.1.3: Un *atlante* di un insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una famiglia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha: U_\alpha \to S$ tali che $S = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Dunque una superficie (regolare) è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ fatto localmente come un aperto del piano. Come vedremo, la filosofia che regola lo studio delle superfici è usare le parametrizzazioni locali per trasferire concetti, proprietà e dimostrazioni dagli aperti del piano ad aperti sulle superfici, e viceversa.

Osservazione 2.1.6. Non esiste nulla di analogo al Teorema 1.1.9; le superfici regolari in generale non ammettono una parametrizzazione globale, anche quando non sono compatte.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 2.1.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $f \in C^\infty(U)$. Allora il *grafico* $\Gamma_f = \big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x \in U\big\}$ di f è una superficie regolare, con atlante costituito da una sola parametrizzazione locale, la $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ data da $\varphi(x) = \big(x, f(x)\big)$. Infatti, la condizione (a) della definizione di superficie è chiaramente soddisfatta. La $\pi\colon \Gamma_f \to U$ data dalla proiezione sulle prime due coordinate $\pi\big(x^1, x^2, f(x)\big) = (x^1, x^2)$ è l'inversa (continua) di φ, per cui anche la condizione (b) è soddisfatta. Infine,

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x^2}(x) \end{vmatrix}$$

ha rango massimo in ogni punto, e ci siamo.

Osservazione 2.1.7. Un grafico ha quindi un atlante costituito da un solo elemento. Più in generale, l'immagine di una superficie immersa che sia un omeomorfismo con l'immagine è una superficie regolare coperta da un solo intorno coordinato.

Esempio 2.1.2. Vogliamo far vedere che la sfera

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$$

è una superficie regolare trovandone un'atlante. Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ il disco unitario aperto nel piano, e definiamo $\varphi_1, \ldots, \varphi_6\colon U \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),\\
\varphi_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}),\\
\varphi_3(x, y) &= (x, \sqrt{1 - x^2 - y^2}, y),\\
\varphi_4(x, y) &= (x, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y),\\
\varphi_5(x, y) &= (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y),\\
\varphi_6(x, y) &= (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y).
\end{aligned}$$

Ragionando come nell'esempio precedente è facile vedere che le φ_j sono tutte parametrizzazioni locali di S^2, e che $S^2 = \varphi_1(U) \cup \cdots \cup \varphi_6(U)$. Nota che omettendone anche una sola non si copre tutta la sfera.

Esempio 2.1.3. Descriviamo un altro atlante sulla sfera. Posto $U = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$, sia $\varphi_1\colon U \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi_1(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta);$$

vogliamo dimostrare che φ_1 è una parametrizzazione locale della sfera. Il parametro θ è usualmente chiamato *colatitudine* (la *latitudine* è $\pi/2 - \theta$), mentre ϕ è la *longitudine*. Prima di tutto,

$$\varphi_1(U) = S^2 \setminus \{(x, y, z) \mid y = 0, x \geq 0\}$$

è un aperto di S^2, per cui la condizione (a) è soddisfatta. Poi,

$$\mathrm{Jac}(\varphi_1)(\theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix},$$

e si verifica subito che questa matrice ha sempre rango 2 (in quanto $\sin\theta \neq 0$ quando $(\theta, \phi) \in U$), per cui la condizione (c) è soddisfatta. Inoltre, se $(x, y, z) \in \varphi_1(U)$, ricaviamo subito $\theta = \arccos(z)$; essendo $\sin\theta \neq 0$ troviamo pure $(\cos\phi, \sin\phi)$ in termini di x, y e z, e quindi anche ϕ è univocamente determinato, cioè la φ_1 è globalmente iniettiva. Per concludere dovremmo far vedere che è un omeomorfismo con l'immagine (cioè che φ_1^{-1} è continua); ma vedremo fra poco (Proposizione 2.1.6) che questo è una conseguenza delle altre condizioni, per cui lasciamo la verifica per esercizio (ma vedi anche il prossimo esempio). Infine, sia $\varphi_2\colon U \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi_2(\theta,\phi) = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta, -\sin\theta\sin\phi).$$

Ragionando come prima si vede che anche φ_2 è una parametrizzazione locale, con

$$\varphi_2(U) = S^2 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x \le 0\},$$

per cui $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ è un'atlante di S^2.

Esempio 2.1.4. (*Superfici di rotazione*) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva piana regolare semplice non chiusa di sostegno C, e supponiamo anche che σ sia un omeomorfismo con l'immagine. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando C attorno a un asse ℓ contenuto nel piano di C ma che non interseca C; vogliamo far vedere che S è una superficie regolare, detta *superficie di rotazione* (o di *rivoluzione*), di *generatrice* C e *asse di rotazione* ℓ. Possiamo supporre che la curva C sia contenuta nel piano xz e che l'asse sia l'asse z; quindi possiamo scrivere $\sigma(t) = \big(f(t), 0, g(t)\big)$ con $f(t) > 0$ per ogni $t \in I$. Definiamo allora $\varphi_1\colon I \times (0, 2\pi) \in \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi_1(t,\theta) = \big(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)\big),$$

e $\varphi_2\colon I \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3$ con la stessa formula. Fissato $t_0 \in I$, le curve $\theta \mapsto \varphi_1(t_0,\theta)$ sono dette *paralleli* di S; fissato $\theta_0 \in \mathbb{R}$, le curve $t \mapsto \varphi_1(t,\theta_0)$ sono dette *meridiani* di S. È chiaro che S è l'unione delle immagini di φ_1 e φ_2; ci basta allora dimostrare che φ_1 e φ_2 sono parametrizzazioni locali per ottenere che S è una superficie. Dimostriamolo per φ_1; il caso di φ_2 è assolutamente analogo. Che l'immagine di φ_1 sia un aperto di S è ovvio. Essendo $f(t) > 0$ per ogni $t \in I$, si verifica subito che il differenziale di φ_1 ha sempre rango massimo (esercizio). Rimane da verificare che φ_1 è un omeomorfismo con l'immagine. Cominciamo con far vedere che è invertibile. Da $\varphi_1(t,\theta) = (x,y,z)$ ricaviamo $g(t) = z$ e $f(t) = \sqrt{x^2+y^2}$; essendo σ iniettiva, da questo ricaviamo un unico $t \in I$, e quindi un unico $\theta \in (0,2\pi)$ tale che $x = f(t)\cos\theta$ e $y = f(t)\sin\theta$; quindi φ_1 è invertibile. Inoltre, essendo σ un omeomorfismo con l'immagine, t dipende in modo continuo da z e $\sqrt{x^2+y^2}$; se dimostriamo che anche θ dipende in modo continuo da (x,y,z) abbiamo che φ_1^{-1} è continua. Ora, se $\theta \ne \pi$ abbiamo

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y/f(t)}{1+x/f(t)} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

per cui

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

dipende in modo continuo da (x,y,z). Se invece θ appartiene a un piccolo intervallo centrato in π, in modo analogo si trova che

$$\theta = 2\,\mathrm{arccotan}\left(\frac{y}{-x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

e anche in questo caso ci siamo.

Esercizio 2.1.2. Dimostra che l'insieme ottenuto ruotando il sostegno C di una curva piana regolare semplice *chiusa* attorno a un asse ℓ contenuto nel piano di C ma che non interseca C è ancora una superficie regolare.

Esercizio 2.1.3. Sia $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare semplice chiusa il cui sostegno C sia contenuto nel piano xz e sia simmetrico rispetto all'asse z (cioè $(x,0,z) \in C$ se e solo se $(-x,0,z) \in C$). Dimostra che l'insieme ottenuto ruotando C attorno all'asse z è una superficie regolare. In particolare, questo dimostra di nuovo che la sfera è una superficie regolare.

Vediamo ora un modo generale per ottenere superfici regolari. Cominciamo con una definizione:

Definizione 2.1.4: Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e $F: V \to \mathbb{R}^m$ di classe C^∞. Diremo che $p \in V$ è un *punto critico* di F se $dF_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non è surgettivo. Indicheremo con $\mathrm{Crit}(F)$ l'insieme dei punti critici di F. Se $p \in V$ è un punto critico, $F(p) \in \mathbb{R}^m$ sarà detto *valore critico.* Un $y \in F(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ che non è un valore critico è detto *valore regolare.*

Esercizio 2.1.4. Dimostra che l'insieme dei punti critici di un'applicazione F di classe C^∞ è un chiuso del dominio di F.

Osservazione 2.1.8. Se $f: V \to \mathbb{R}$ è una funzione C^∞ definita su un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$, e $p \in V$, allora $df_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non è surgettivo se e solo se è l'applicazione nulla. In altri termini, $p \in V$ è un punto critico di f se e solo se il gradiente di f si annulla in p.

Un risultato che non possiamo dimostrare in questo corso, e che non utilizzeremo, ma che vale la pena di citare esplicitamente è il famoso

Teorema 2.1.3: (Sard) *Sia $F: V \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^∞. Allora l'insieme dei valori critici ha misura nulla in $\mathbb{R}^m$.*

In altri termini, quasi ogni punto del codominio è un valore regolare, fatto che spiega l'ampia applicabilità del seguente risultato:

Proposizione 2.1.4: *Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, e $f \in C^\infty(V)$. Se $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f, allora l'insieme di livello $f^{-1}(a) = \{p \in V \mid f(p) = a\}$ è una superficie regolare.*

Dimostrazione: Sia $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$. Essendo a un valore regolare di f, il gradiente di f non si annulla in p_0 per cui, a meno di permutare le coordinate, possiamo supporre che $\partial f/\partial z(p_0) \neq 0$. Sia allora $F: V \to \mathbb{R}^3$ data da $F(x, y, z) = \big(x, y, f(x, y, z)\big)$; chiaramente,

$$\det \mathrm{Jac}(F)(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0.$$

Possiamo quindi applicare il teorema della funzione inversa e trovare intorni $\tilde{V} \subseteq V$ di p_0 e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di $F(p_0)$ tali che $F|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \to W$ sia un diffeomorfismo. Posto $G = (g^1, g^2, g^3) = F^{-1}$ abbiamo

$$(u, v, w) = F \circ G(u, v, w) = \big(g^1(u, v, w), g^2(u, v, w), f\big(G(u, v, w)\big)\big)$$

per cui $g_1(u, v, w) = u$, $g_2(u, v, w) = v$, e

$$\forall (u, v, w) \in W \qquad f\big(u, v, g^3(u, v, w)\big) = w; \tag{2.1.1}$$

in particolare $\big(u, v, g^3(u, v, w)\big) \in \tilde{V}$ per ogni $(u, v, w) \in W$. Poniamo $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v, a) \in W\}$; è chiaramente un aperto di $\mathbb{R}^2$ e possiamo definire $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ con $\varphi(u, v) = \big(u, v, g^3(u, v, a)\big)$. La (2.1.1) ci dice che $\varphi(U) = f^{-1}(a) \cap \tilde{V}$, e quindi φ è una parametrizzazione locale di $f^{-1}(a)$ in p_0. □

Esercizio 2.1.5. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e $f \in C^\infty(V)$. Dimostra che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(a) \setminus \mathrm{Crit}(f)$, se non è vuoto, è una superficie regolare.

Definizione 2.1.5: Una superficie della forma $f^{-1}(a)$, dove $f \in C^\infty(V)$ per qualche aperto V di $\mathbb{R}^3$, e $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare, è detta *superficie di livello* per f.

Esempio 2.1.5. L'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

è una superficie. Infatti è l'insieme $f^{-1}(1)$ dove $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Siccome $\mathrm{grad}(f) = \big(2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2\big)$, l'unico punto critico di f è l'origine e l'unico valore critico di f è 0.

Esercizio 2.1.6. Dimostra usando la proposizione precedente che il toro di equazione

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2$$

ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza di raggio $r < a$ e centro $(a, 0, 0)$ contenuta nel piano xz, è una superficie regolare.

Concludiamo questo paragrafo con due risultati generali.

Proposizione 2.1.5: *Ogni superficie regolare è localmente un grafico. In altre parole, se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare e $p \in S$, allora esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \to S$ in p che ha una delle seguenti tre forme:*

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \big(x, y, f(x, y)\big), & \textit{oppure} \\ \big(x, f(x, y), y\big), & \textit{oppure} \\ \big(f(x, y), x, y\big), \end{cases}$$

per un'opportuna $f \in C^\infty(U)$. In particolare, esiste sempre un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $S \subset \Omega$ sia chiusa in Ω.

Dimostrazione: Sia $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3): U_1 \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione locale centrata in p. A meno di permutare le coordinate possiamo supporre che

$$\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2)}{\partial(x^1, x^2)}(O) \neq 0;$$

quindi posto $F = (\varphi^1, \varphi^2)$ possiamo trovare un intorno $V \subseteq U_1$ di O e un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ di $F(O)$ tali che $F|_V: V \to U$ sia un diffeomorfismo. Sia $F^{-1}: U \to V$ l'inversa, e poniamo $f = \varphi^3 \circ F^{-1}: U \to \mathbb{R}$. Notiamo che $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_U$; quindi

$$\varphi \circ F^{-1}(u, v) = \big(u, v, f(u, v)\big),$$

cioè $\varphi \circ F^{-1}$ è una parametrizzazione locale in p della forma voluta.

Infine, per ogni $p \in S$ sia $V_p \subset \mathbb{R}^3$ aperto tale che $p \in V_p \cap S$ sia localmente un grafico. Allora $V_p \cap S$ è chiuso in V_p, e S è chiusa (perché?) in $\Omega = \bigcup_{p \in S} V_p$. □

Esempio 2.1.6. Il cono a una falda $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ non è una superficie regolare. Se lo fosse, dovrebbe essere il grafico di una funzione C^∞ nell'intorno di $(0, 0, 0)$. Siccome le proiezioni sui piani xz e yz non sono iniettive, dovrebbe essere un grafico sul piano xy; ma allora dovrebbe essere il grafico della funzione $\sqrt{x^2 + y^2}$, che non è di classe C^∞.

Esercizio 2.1.7. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme tale che per ogni $p \in S$ esista un intorno aperto W di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $W \cap S$ sia un grafico su uno dei tre piani coordinati. Dimostra che allora S è una superficie regolare.

E infine ecco il risultato promesso nell'Esempio 2.1.3:

Proposizione 2.1.6: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie immersa tale che $\varphi(U) \subseteq S$. Allora:*

(i) *$\varphi(U)$ è aperto in S;*
(ii) *se φ è globalmente iniettiva, allora per ogni $p \in \varphi(U)$ esistono un intorno $W \subset \mathbb{R}^3$ di p in $\mathbb{R}^3$ con $W \cap S \subseteq \varphi(U)$ e una $\Phi: W \to \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tali che $\Phi(W) \subseteq U$ e $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$. In particolare, $\varphi^{-1}: \varphi(U) \to U$ è continua, per cui φ è una parametrizzazione locale di S.*

Dimostrazione: Sia $p = \varphi(x_0, y_0) \in \varphi(U)$. Essendo S una superficie, possiamo trovare un intorno W_0 di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $W_0 \cap S$ sia un grafico; per fissare le idee diciamo che $W_0 \cap S$ è il grafico sul piano xy di una funzione f. Sia $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione sul piano xy, $U_0 = \varphi^{-1}(W_0) \subseteq U$ e $h = \pi \circ \varphi: U_0 \to \mathbb{R}^2$. Se $(x, y) \in U_0$ abbiamo $\varphi^3(x, y) = f\big(\varphi^1(x, y), \varphi^2(x, y)\big)$, per cui la terza riga della matrice jacobiana di φ in (x, y) è combinazione lineare delle prime due. Siccome abbiamo supposto che il differenziale di φ abbia sempre rango 2, ne segue che le prime due righe della matrice jacobiana di φ devono essere linearmente indipendenti, e quindi $dh_{(x,y)}$ è invertibile. Il teorema della funzione inversa ci fornisce allora un intorno $U_1 \subseteq U_0$

di (x_0, y_0) e un intorno $V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ di $h(x_0, y_0) = \pi(p)$ tale che $h|_{U_1}: U_1 \to V_1$ sia un diffeomorfismo. In particolare, $\varphi(U_1) = (\pi|_S)^{-1}(V_1)$ è aperto in S, per cui $\varphi(U)$ è un intorno di p in S. Essendo p generico, $\varphi(U)$ è aperto in S, e (i) è dimostrata.

Supponiamo ora che φ sia globalmente iniettiva, per cui $\varphi^{-1}: \varphi(U) \to U$ è definita. Essendo $\varphi(U)$ aperto in S, a meno di restringere W_0 possiamo supporre che $W_0 \cap S \subseteq \varphi(U)$. Poniamo $W = W_0 \cap \pi^{-1}(V_1)$ e $\Phi = h^{-1} \circ \pi$; per dimostrare (ii) ci rimane solo da far vedere che $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$.

Sia $q \in W \cap S$. Essendo $q \in W_1 \cap \pi^{-1}(V_1)$, si deve poter scrivere $q = \big(u, v, f(u, v)\big)$ con $(u, v) \in V_1$; d'altra parte, essendo $q \in \varphi(U)$, deve esistere un unico $(x, y) \in U$ tale che $q = \varphi(x, y)$. Ma allora $(u, v) = h(x, y)$, per cui $(x, y) = h^{-1}(u, v) \in U_1$ e $\varphi^{-1}(q) = (x, y) = h^{-1} \circ \pi(q) = \Phi(q)$, come richiesto. □

In altre parole, se sappiamo già che S è una superficie, per verificare se un'applicazione $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ da un aperto U di $\mathbb{R}^2$ a valori in S è una parametrizzazione locale basta controllare che φ sia globalmente iniettiva e che $d\varphi_x$ abbia rango 2 per ogni $x \in U$.

Osservazione 2.1.9. La proposizione precedente e il Lemma 2.1.1 potrebbero far sospettare che possa essere vero un enunciato del tipo "*Sia $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie immersa globalmente iniettiva, e poniamo $S = \varphi(U)$. Allora per ogni $p \in \varphi(U)$ esiste un intorno $W \subset \mathbb{R}^3$ di p in $\mathbb{R}^3$ e una $\Phi: W \to \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tali che $\Phi(W) \subseteq U$ e $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$. In particolare, $\varphi^{-1}: \varphi(U) \to U$ è continua, e S è una superficie regolare.*" Abbiamo anche una "dimostrazione" di questo enunciato: "Siccome, per ipotesi, φ è una superficie immersa, possiamo applicare il Lemma 2.1.1. Sia $p = \varphi(x_0) \in \varphi(U)$, e $G: \Omega \to W$ il diffeomorfismo fornito dal Lemma 2.1.1; a meno di restringere Ω, possiamo anche supporre che $\Omega = U_1 \times (-\delta, \delta)$, dove $\delta > 0$ e $U_1 \subseteq U$ è un opportuno intorno di x_0. Allora $\Phi = \pi \circ G^{-1}$, dove $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è la proiezione sulle prime due coordinate, è come desiderato. Infatti, per ogni $q \in W \cap \varphi(U)$ il punto $G^{-1}(q) = (y, t) \in \Omega$ è l'unico che soddisfa $G(y, t) = q$. Ma $G\big(\varphi^{-1}(q), 0\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(q)\big) = q$, per cui $G^{-1}(q) = \big(\varphi^{-1}(q), 0\big)$, e ci siamo." Invece, *questo enunciato è falso e questa dimostrazione è sbagliata.* L'errore (sottile) nella dimostrazione è che (un minuto di pausa: prima di continuare a leggere cerca di trovare da solo l'errore. Ecco, continua a pensarci... ancora non ci sei? Torna indietro e leggi accuratamente, riflettendo su ogni passaggio, soprattutto verso la fine... trovato l'errore? Ottimo; adesso puoi proseguire con la lettura) se $q \in W \cap \varphi(U)$ *non è detto* che $\varphi^{-1}(q)$ appartenga a U_1, per cui $\big(\varphi^{-1}(q), 0\big)$ non appartiene al dominio di G, e quindi non possiamo né dire che $G\big(\varphi^{-1}(q), 0\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(q)\big) = q$ né dedurre che $G^{-1}(q) = \big(\varphi^{-1}(q), 0\big)$. Ovviamente, il fatto che la dimostrazione sia sbagliata non implica necessariamente che l'enunciato sia falso. Ma l'enunciato è falso, e difatti l'Esempio 2.1.7 conterrà un controesempio. Riassumendo, si può dedurre la continuità dell'inversa di una superficie immersa φ globalmente iniettiva *solo se si sa già che l'immagine di φ è contenuta in una superficie regolare;* altrimenti potrebbe non essere vero.

Esempio 2.1.7. Sia $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{per } -\infty < t \leq 0, \\ \text{curva regolare} & \text{per } 0 \leq t \leq 1, \\ (0, e^{-t}) & \text{per } 1 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

dove la "curva regolare" collega in modo C^∞ e iniettivo gli altri due pezzi, e definiamo $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(t, u) = \big(\sigma(t), u\big).$$

La φ è chiaramente una superficie immersa globalmente iniettiva, ma non è un omeomorfismo con l'immagine, e $S = \varphi(U)$ non è una superficie regolare. Non è un omeomorfismo con l'immagine in quanto $\varphi\big([0, +\infty) \times [-1, 1]\big)$ è compatto mentre $[0, +\infty) \times [-1, 1]$ non lo è. La φ^{-1} non è continua in quanto φ non è aperta: $\varphi\big((-1, 1) \times (-1, 1)\big)$ non è aperto in S. E S non è una superficie regolare, in quanto nell'intorno del punto $(0, 0, 0) \in S$ non è un grafico su nessuno dei tre piani coordinati.

2.2 Funzioni differenziabili

Le parametrizzazioni locali sono gli strumenti che permettono di concretizzare l'idea che una superficie è localmente fatta come un aperto del piano; vediamo come usarle per dire quando una funzione definita su una superficie è differenziabile. L'idea è la seguente:

Definizione 2.2.1: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Una funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$ è di *classe* C^∞ (o *differenziabile*) in p se esiste una parametrizzazione locale $\varphi\colon U \to S$ in p tale che $f \circ \varphi\colon U \to \mathbb{R}$ sia di classe C^∞ in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. Diremo che f è di *classe* C^∞ se lo è in ogni punto. Lo spazio delle funzioni C^∞ su S sarà indicato con $C^\infty(S)$.

Osservazione 2.2.1. Una funzione differenziabile $f\colon S \to \mathbb{R}$ è automaticamente continua. Infatti sia $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto e $p \in f^{-1}(I)$. Per ipotesi esiste una parametrizzazione locale $\varphi\colon U \to S$ in p tale che $f \circ \varphi$ sia di classe C^∞ (e quindi in particolare continua) in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. Allora $(f \circ \varphi)^{-1}(I) = \varphi^{-1}\big(f^{-1}(I)\big)$ è un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. Ma φ è un omeomorfismo con l'immagine; quindi $f^{-1}(I)$ dev'essere un intorno di $\varphi\big(\varphi^{-1}(p)\big) = p$. Siccome p era arbitrario, ne segue che $f^{-1}(I)$ è aperto in S, e quindi che f è continua.

Il problema con questa definizione è che potrebbe dipendere dalla parametrizzazione locale scelta: a priori, potrebbe esistere un'altra parametrizzazione locale ψ in p tale che $f \circ \psi$ *non* sia differenziabile in $\psi^{-1}(p)$. Per fortuna, il seguente teorema implica che questo non può capitare.

Teorema 2.2.1: *Sia S una superficie, e $\varphi\colon U \to S$, $\psi\colon V \to S$ due parametrizzazioni locali tali che si abbia $\Omega = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \varnothing$. Allora l'applicazione $h = \varphi^{-1} \circ \psi\colon \psi^{-1}(\Omega) \to \varphi^{-1}(\Omega)$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione: L'applicazione h è un omeomorfismo, in quanto composizione di omeomorfismi; dobbiamo dimostrare che lei e la sua inversa sono di classe C^∞.

Sia $x_0 \in \psi^{-1}(\Omega)$, $y_0 = h(x_0) \in \varphi^{-1}(\Omega)$ e $p = \psi(x_0) = \varphi(y_0) \in \Omega$. La Proposizione 2.1.6 ci fornisce un intorno W di $p \in \mathbb{R}^3$ e un'applicazione $\Phi\colon W \to \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tale che $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}$. Ora, la continuità di ψ ci assicura che esiste un intorno $V_1 \subset \psi^{-1}(\Omega)$ di x_0 tale che $\psi(V_1) \subset W$. Ma allora $h|_{V_1} = \Phi \circ \psi|_{V_1}$, e quindi h è di classe C^∞ in x_0. Essendo x_0 generico, h è di classe C^∞ dappertutto.

Analogamente si dimostra che h^{-1} è di classe C^∞, per cui h è un diffeomorfismo. □

Corollario 2.2.2: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $f\colon S \to \mathbb{R}$ una funzione, e $p \in S$. Se esiste una parametrizzazione locale $\varphi\colon U \to S$ in p tale che $f \circ \varphi$ sia di classe C^∞ in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$, allora $f \circ \psi$ è di classe C^∞ in un intorno di $\psi^{-1}(p)$ per ogni parametrizzazione locale $\psi\colon V \to S$ di S in p.*

Dimostrazione: Infatti possiamo scrivere

$$f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi),$$

e il teorema precedente ci assicura che $f \circ \psi$ è di classe C^∞ in un intorno di $\psi^{-1}(p)$ se e solo se $f \circ \varphi$ è di classe C^∞ in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$. □

Quindi la definizione di funzione differenziabile su una superficie non dipende dalle parametrizzazioni locali; per testare se una funzione è differenziabile possiamo usare una qualsiasi parametrizzazione locale.

Lo stesso approccio ci permette di definire il concetto di applicazione differenziabile fra due superfici:

Definizione 2.2.2: Se S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono due superfici, diremo che una applicazione $F\colon S_1 \to S_2$ è di *classe* C^∞ (o *differenziabile*) se per ogni $p \in S_1$ esistono una parametrizzazione locale $\varphi_1\colon U_1 \to S_1$ in p e una parametrizzazione locale $\varphi_2\colon U_2 \to S_2$ in $F(p)$ tali che $\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ sia di classe C^∞ (dove definita). Se inoltre F è invertibile con inversa di classe C^∞, diremo che F è un *diffeomorfismo*, e che S_1 e S_2 sono *diffeomorfe*.

Esercizio 2.2.1. Dimostra che un'applicazione differenziabile fra superfici è necessariamente continua.

Esercizio 2.2.2. Sia $F\colon S_1 \to S_2$ un'applicazione fra superfici, e $p \in S_1$. Dimostra che se esistono una parametrizzazione locale $\varphi_1\colon U_1 \to S_1$ in p e una parametrizzazione locale $\varphi_2\colon U_2 \to S_2$ in $F(p)$ tali che $\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ sia di classe C^∞ in un intorno di $\varphi_1^{-1}(p)$, allora $\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1$ è di classe C^∞ in un intorno di $\psi_1^{-1}(p)$ per ogni parametrizzazione locale $\psi_1\colon V_1 \to S_1$ di S in p e ogni parametrizzazione locale $\psi_2\colon V_2 \to S_2$ di S in $F(p)$.

Esercizio 2.2.3. Definisci in maniera analoga i concetti di applicazione C^∞ da un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in una superficie, e di applicazione C^∞ da una superficie a valori in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^m$.

La composizione di applicazioni C^∞ è ancora di classe C^∞:

Proposizione 2.2.3: *Se $F: S_1 \to S_2$ e $G: S_2 \to S_3$ sono applicazioni di classe C^∞ fra superfici, allora anche la composizione $G \circ F: S_1 \to S_3$ è di classe C^∞.*

Dimostrazione: Dato $p \in S_1$, scegliamo una parametrizzazione locale $\varphi_1: U_1 \to S_1$ di S_1 in p, una parametrizzazione locale $\varphi_2: U_2 \to S_2$ di S_2 in $F(p)$, e una parametrizzazione locale $\varphi_3: U_3 \to S_3$ di S_3 in $G\big(F(p)\big)$. Allora

$$\varphi_3^{-1} \circ (G \circ F) \circ \varphi_1 = (\varphi_3^{-1} \circ G \circ \varphi_2) \circ (\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)$$

è di classe C^∞ dove definita, grazie all'Esercizio 2.2.2. □

Esempio 2.2.1. Una parametrizzazione locale $\varphi: U \to \varphi(U) \subset S$ è un diffeomorfismo fra U e $\varphi(U)$. Infatti prima di tutto è per definizione invertibile. Poi, per testare la differenziabilità sua e dell'inversa possiamo usare l'identità come parametrizzazione locale di U e lei stessa come parametrizzazione locale di S, per cui dobbiamo solo verificare che $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{id}$ e $\mathrm{id} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ siano di classe C^∞, che è ovvio.

Esempio 2.2.2. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $F: U \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione C^∞ la cui immagine è contenuta in una superficie S, allora F è di classe C^∞ anche come applicazione a valori in S. Infatti, sia ψ una parametrizzazione locale in un punto $p \in F(U)$; la Proposizione 2.1.6 ci dice che esiste una funzione Ψ di classe C^∞ definita in un intorno di p tale che $\psi^{-1} \circ F = \Psi \circ F$, e quest'ultima composizione è di classe C^∞.

Esempio 2.2.3. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, allora l'inclusione $\iota: S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ è di classe C^∞: infatti dire che ι è differenziabile è esattamente equivalente a dire (perché?) che le parametrizzazioni locali sono di classe C^∞ considerate come applicazioni a valori in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 2.2.4. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto di $\mathbb{R}^3$ contenente la superficie S, e $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$, allora la restrizione $f = \tilde{f}|_S$ è di classe C^∞ su S. Infatti $f \circ \varphi = \tilde{f} \circ \varphi$ è di classe C^∞ per ogni parametrizzazione locale φ.

In realtà, l'esempio precedente fornisce tutte le funzioni C^∞ su una superficie S:

Teorema 2.2.4: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto tale che $S \subset \Omega$ sia chiusa in Ω. Allora una funzione $f: S \to \mathbb{R}$ è di classe C^∞ su S se e solo se esiste una $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\tilde{f}|_S \equiv f$.*

Per dimostrare questo risultato vediamone prima una versione locale:

Proposizione 2.2.5: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora una $f: S \to \mathbb{R}$ è di classe C^∞ in p se e solo se esistono un intorno aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di p e una funzione $\tilde{f} \in C^\infty(W)$ tali che $\tilde{f}|_{W \cap S} \equiv f|_{W \cap S}$.*

Dimostrazione: In una direzione è l'Esempio 2.2.4. Viceversa, supponiamo che f sia di classe C^∞ in p, e sia $\varphi: U \to S$ una parametrizzazione locale centrata in p. La Proposizione 2.1.6 ci fornisce un intorno W di p in $\mathbb{R}^3$ e un'applicazione $\Phi: W \to \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tali che $\Phi(W) \subseteq U$ e $\Phi_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$. Allora la funzione $\tilde{f} = (f \circ \varphi) \circ \Phi \in C^\infty(W)$ è come voluto. □

Per proseguire ci servono un paio di definizioni e un lemma.

Definizione 2.2.3: Diremo che un ricoprimento $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di uno spazio topologico X è *localmente finito* se ogni $p \in X$ ha un intorno $U \subseteq X$ tale che $U \cap U_\alpha \neq \varnothing$ solo per un numero finito di indici α. Un ricoprimento $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ è un *raffinamento* di $\mathfrak{U}$ se per ogni $\beta \in B$ esiste un $\alpha \in A$ tale che $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

Lemma 2.2.6: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di Ω. Allora esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ di Ω tale che:*

(i) *$\mathfrak{V}$ è un raffinamento di $\mathfrak{U}$;*
(ii) *per ogni $\beta \in B$ esistono $p_\beta \in \Omega$ e $r_\beta > 0$ tali che $V_\beta = B(p_\beta, 3r_\beta)$;*
(iii) *posto $W_\beta = B(p_\beta, r_\beta)$, anche $\mathfrak{W} = \{W_\beta\}_{\beta \in B}$ è un ricoprimento di Ω.*

Dimostrazione: L'aperto Ω è localmente compatto e a base numerabile; quindi possiamo trovare una base numerabile $\{P_j\}$ composta da aperti a chiusura compatta. Definiamo ora per induzione una famiglia $\{K_j\}$

crescente di compatti. Poniamo $K_1 = \overline{P_1}$. Se K_j è definito, sia $r \geq j$ il minimo intero per cui $K_j \subset \bigcup_{i=1}^r P_i$, e poniamo

$$K_{j+1} = \overline{P_1} \cup \cdots \cup \overline{P_r}.$$

In questo modo abbiamo $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ e $\Omega = \bigcup_j K_j$.

Ora, per ogni $p \in (\mathring{K}_{j+2} \setminus K_{j-1}) \cap U_\alpha$ scegliamo una pallina $V_{\alpha,j,p} = B(p, 3r_{\alpha,j,p})$ centrata in p e tale che $B(p, 3r_{\alpha,j,p}) \subset (\mathring{K}_{j+2} \setminus K_{j-1}) \cap U_\alpha$. Poniamo $W_{\alpha,j,p} = B(p, r_{\alpha,j,p})$. Ora, al variare di α e p gli aperti $W_{\alpha,j,p}$ formano un ricoprimento aperto di $K_{j+1} \setminus \mathring{K}_j$, che è compatto; quindi possiamo estrarne un sottoricoprimento finito $\{W_{j,r}\}$. Unendo questi ricoprimenti al variare di j otteniamo un ricoprimento aperto numerabile $\{W_\beta\}$ di Ω; se indichiamo con V_β la pallina corrispondente a W_β, per concludere dobbiamo solo dimostrare che il ricoprimento aperto $\{V_\beta\}$ è localmente finito. Ma infatti per ogni $p \in \Omega$ possiamo trovare un indice j tale che $p \in \mathring{K}_j$, e per costruzione solo un numero finito dei V_β intersecano $\mathring{K}_j$. □

Definizione 2.2.4: Una *partizione dell'unità* su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è una famiglia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che

(a) $\rho_\alpha \geq 0$ su Ω;
(b) $\{\mathrm{supp}(\rho_\alpha)\}$ è un ricoprimento localmente finito di Ω, dove $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) = \overline{\{p \in \Omega \mid \rho_\alpha(p) \neq 0\}}$;
(c) $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$.

Diremo poi che la partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ è *subordinata* al ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se si ha $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ per ogni indice $\alpha \in A$.

Osservazione 2.2.2. La proprietà (b) della definizione di partizione dell'unità implica che nell'intorno di ciascun punto di Ω solo un numero finito di elementi della partizione dell'unità sono diversi da zero; quindi la somma nella proprietà (c) è ben definita, in quanto in ciascun punto di Ω solo un numero finito di addendi sono non nulli. Inoltre, siccome Ω è a base numerabile, sempre la proprietà (b) implica (perché?) che $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \neq \varnothing$ solo per una quantità al più numerabile di indici α. In particolare, se la partizione dell'unità è subordinata a un ricoprimento composto da una quantità più che numerabile di aperti, allora $\rho_\alpha \equiv 0$ per tutti gli indici tranne al più una quantità numerabile. Questo non deve stupire, in quanto in uno spazio topologico a base numerabile da ogni ricoprimento aperto si può sempre estrarre un sottoricoprimento numerabile (proprietà di Lindelöf).

Teorema 2.2.7: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora ogni ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di Ω ammette una partizione dell'unità subordinata a esso.*

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ il raffinamento dato dal Lemma 2.2.6, e $g_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ data dal Corollario 1.1.7; in particolare, $\{\mathrm{supp}(g_\beta)\}$ è un ricoprimento localmente finito di Ω che raffina $\mathfrak{U}$. Quindi prendendo

$$\tilde{\rho}_\beta = \frac{g_\beta}{\sum_{\beta' \in B} g_{\beta'}}$$

otteniamo una partizione dell'unità $\{\tilde{\rho}_\beta\}_{\beta \in B}$ tale che per ogni $\beta \in B$ esiste un $\alpha(\beta) \in A$ per cui si ha $\mathrm{supp}(\tilde{\rho}_\beta) \subset U_{\alpha(\beta)}$. Ma allora ponendo

$$\rho_\alpha = \sum_{\substack{\beta \in B \\ \alpha(\beta) = \alpha}} \tilde{\rho}_\beta$$

si verifica subito (esercizio) che $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\mathfrak{U}$, come voluto. □

Siamo pronti per la

Dimostrazione del Teorema 2.2.4: In una direzione è l'Esempio 2.2.4. Viceversa, sia $f \in C^\infty(S)$. La Proposizione 2.2.5 ci dice che per ogni $p \in S$ possiamo trovare un intorno aperto $U_p \subseteq \Omega$ di p e una funzione $f_p \in C^\infty(U_p)$ tali che $f_p|_{U_p \cap S} \equiv f|_{U_p \cap S}$. Sia inoltre $f_{\Omega \setminus S} \in C^\infty(\Omega \setminus S)$ la funzione identicamente nulla. Allora $\mathfrak{U} = \{U_p\}_{p \in S} \cup \{\Omega \setminus S\}$ è un ricoprimento aperto di Ω; per il Teorema 2.2.7 esiste una partizione dell'unità $\{\rho_p\}_{p \in S} \cup \{\rho_{\Omega \setminus S}\}$ subordinata a $\mathfrak{U}$. In particolare, per ogni $p \in S$ se estendiamo $\rho_p f_p$ a zero fuori dal supporto di ρ_p otteniamo (perché?) una funzione C^∞ in tutto Ω. Poniamo allora

$$\tilde{f} = \sum_{p \in S} \rho_p f_p. \tag{2.2.1}$$

Siccome nell'intorno di un qualsiasi punto di Ω solo un numero finito di addendi in (2.2.1) è non nullo, si vede subito che $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$. Infine, siccome le f_α sono tutte estensioni della stessa f e $\{\rho_\alpha\}$ è una partizione dell'unità, segue subito che $\tilde{f}|_S \equiv f$, e ci siamo. □

2.3 Piano tangente

Vogliamo definire il concetto di vettore tangente a una superficie in un punto. Il modo geometricamente più semplice è il seguente:

Definizione 2.3.1: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme, e $p \in S$. Un *vettore tangente* a S in p è un vettore della forma $\sigma'(0)$, dove $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^1 il cui sostegno è contenuto in S e tale che $\sigma(0) = p$. L'insieme di tutti i possibili vettori tangenti a S in p è il *cono tangente* T_pS a S in p.

Osservazione 2.3.1. Un *cono* (di vertice l'origine) in uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme $C \subseteq V$ tale che $av \in C$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $v \in C$. Non è difficile verificare che il cono tangente a un insieme è effettivamente un cono in questo senso. Infatti, prima di tutto il vettore nullo è il vettore tangente a una curva costante, per cui $O \in T_pS$ per ogni $p \in S$. Poi, se $a \in \mathbb{R}^*$ e $O \neq v \in T_pS$, scelta una curva $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, allora la curva $\sigma_a\colon(-\varepsilon/|a|, \varepsilon/|a|) \to S$ data da $\sigma_a(t) = \sigma(at)$ è tale che $\sigma_a(0) = p$ e $\sigma_a'(0) = av$, cioè $av \in T_pS$ come richiesto.

Esempio 2.3.1. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ è l'unione di due rette per l'origine, si verifica subito (esercizio) che $T_OS = S$.

Il vantaggio di questa definizione di vettore tangente è l'evidente significato geometrico. Se S è una superficie, però, l'intuizione geometrica ci suggerisce che T_pS dovrebbe essere un piano, e non semplicemente un cono. Sfortunatamente, questo non è evidente dalla definizione: la somma di due curve in S non è necessariamente una curva in S, per cui il modo "ovvio" di dimostrare che la somma di due vettori tangenti è un vettore tangente non funziona. D'altra parte, l'esempio precedente mostra che se S non è una superficie il cono tangente non ha nessun motivo per essere un piano; e quindi per ottenere un risultato del genere dobbiamo sfruttare a fondo la definizione di superficie — ovvero tirare in ballo le parametrizzazioni locali.

Cominciamo col vedere cosa succede nel caso più semplice, quello degli aperti nel piano:

Esempio 2.3.2. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $p \in U$. Ogni curva contenuta in U è piana, per cui i vettori tangenti a U in p sono necessariamente contenuti in $\mathbb{R}^2$. Viceversa, se $v \in \mathbb{R}^2$ allora la curva $\sigma(t) = p + tv$ ha sostegno contenuto in U per $|t|$ abbastanza piccolo, e ha vettore tangente v. Quindi abbiamo dimostrato che $T_pU = \mathbb{R}^2$.

Seguendo la solita filosofia che le parametrizzazioni locali ci permettono di trasportare nozioni dagli aperti del piano alle superfici otteniamo allora la seguente:

Proposizione 2.3.1: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$, e $\varphi\colon U \to S$ una parametrizzazione locale in p con $\varphi(x_o) = p$. Allora $d\varphi_{x_o}$ è un isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e T_pS. In particolare, $T_pS = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$ è sempre uno spazio vettoriale di dimensione 2, e $d\varphi_{x_o}(\mathbb{R}^2)$ non dipende da φ ma solo da S e p.*

Dimostrazione: Dato $v \in \mathbb{R}^2$, possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che $x_o + tv \in U$ per ogni $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$; quindi la curva $\sigma_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ data da $\sigma_v(t) = \varphi(x_o + tv)$ è ben definita, $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = d\varphi_{x_o}(v)$, per cui $d\varphi_{x_o}(\mathbb{R}^2) \subseteq T_pS$.

Viceversa, sia $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ una curva con $\sigma(0) = p$; a meno di diminuire ε, possiamo supporre che il sostegno di σ sia contenuto in $\varphi(U)$. Grazie alla Proposizione 2.1.6.(ii) la composizione $\sigma_o = \varphi^{-1} \circ \sigma$ è una curva di classe C^∞ in U tale che $\sigma_o(0) = x_o$; poniamo $v = \sigma_o'(0) \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$d\varphi_{x_o}(v) = \frac{d(\varphi \circ \sigma_o)}{dt}(0) = \sigma'(0),$$

per cui $T_pS \subseteq d\varphi_{x_o}(\mathbb{R}^2)$. Quindi $d\varphi_{x_o}\colon \mathbb{R}^2 \to T_pS$ è surgettiva; essendo anche iniettiva, in quanto $d\varphi_{x_o}$ ha rango massimo, è un isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e T_pS. □

Definizione 2.3.2: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Lo spazio vettoriale $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ è detto *piano tangente* a S in p.

Osservazione 2.3.2. Attenzione: come l'abbiamo definito noi, il piano tangente è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, e quindi passa per l'origine indipendentemente da quale sia il punto $p \in S$. Quando si disegna il piano tangente come un piano appoggiato alla superficie, non si sta disegnando T_pS ma il suo traslato $p + T_pS$, che è un piano affine passante per p.

Osservazione 2.3.3. In un senso molto preciso che non abbiamo il tempo di illustrare qui, il piano tangente è il piano *che meglio approssima* la superficie nel punto p.

Osservazione 2.3.4. Dalla definizione risulta evidente che se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, $p \in S$ e $U \subseteq S$ è un aperto di S contenente p, allora $T_pU = T_pS$. In particolare, se $S = \mathbb{R}^2$ allora $T_pU = T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ per ogni aperto U del piano e ogni $p \in U$.

Questa definizione di piano tangente ha un problema: dipende strettamente dal fatto che S è contenuta in $\mathbb{R}^3$, mentre sarebbe piacevole avere un concetto di vettore tangente intrinseco a S, indipendente dall'immersione nello spazio euclideo. In altre parole, ci piacerebbe avere una definizione di T_pS come spazio vettoriale astratto, dipendente solo da S e da p, e non come sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, visto che stiamo parlando di "geometria differenziale", prima o poi dovremo trovare il modo di fare derivate su una superficie.

Possiamo risolvere entrambi questi problemi in un colpo solo, in un modo che risulta essenziale per la generalizzazione di vettore tangente a più di due dimensioni (e piuttosto utile anche per noi). L'idea cruciale è contenuta nel seguente

Esempio 2.3.3. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e $p \in U$. Allora a ogni vettore tangente $v \in T_pU = \mathbb{R}^2$ possiamo associare una derivata parziale:

$$v = (v^1, v^2) \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p = v^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + v^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p ,$$

e tutte le derivate parziali sono di questo tipo. Quindi in un certo senso possiamo identificare T_pU con l'insieme delle derivate parziali.

Il nostro obiettivo quindi è indentificare, anche nel caso delle superfici, i vettori tangenti con il tipo giusto di derivata parziale. Per far ciò, prima di tutto dobbiamo chiarire che oggetti vogliamo derivare. L'osservazione di base è che per derivare una funzione in un punto basta conoscere il comportamento della funzione in un intorno qualsiasi del punto; se il nostro obiettivo è solo calcolare la derivata in p, due funzioni che coincidono in un intorno di p sono per noi equivalenti. Questa osservazione suggerisce la seguente

Definizione 2.3.3: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Indichiamo con $\mathcal{F}$ l'insieme delle coppie (U, f), dove $U \subseteq S$ è un intorno aperto di p in S, e $f \in C^\infty(U)$. Su $\mathcal{F}$ mettiamo la relazione d'equivalenza $\sim$ definita come segue: $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste un intorno aperto $W \subseteq U \cap V$ di p tale che $f|_W \equiv g|_W$. Lo spazio quoziente $C^\infty(p) = \mathcal{F}/\sim$ sarà detto *spiga dei germi di funzioni* C^∞ in p, e un elemento $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ è detto *germe* in p. Un elemento (U, f) della classe di equivalenza $\mathbf{f}$ è detto *rappresentante* di $\mathbf{f}$. Se sarà necessario ricordare su quale superficie stiamo lavorando, scriveremo $C^\infty_S(p)$ invece di $C^\infty(p)$.

Osservazione 2.3.5. Se $U \subseteq S$ è un aperto di una superficie S e $p \in U$, allora $C^\infty_U(p) = C^\infty_S(p)$.

Ciò che vogliamo derivare sono quindi i germi di funzioni C^∞. Prima di vedere come, osserviamo che $C^\infty(p)$ ha una naturale struttura algebrica.

Definizione 2.3.4: Un'*algebra* su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme A su cui sono definite una somma $+$, un prodotto $\cdot$ e un prodotto per scalari $\lambda\cdot$ tali che $(A, +, \cdot)$ sia un anello, $(A, +, \lambda\cdot)$ sia uno spazio vettoriale, e valga la proprietà associativa $(\lambda f)g = \lambda(fg) = f(\lambda g)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e f, $g \in A$.

Lemma 2.3.2: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$, e $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in C^\infty(p)$ due germi in p. Siano inoltre (U_1, f_1), (U_2, f_2) due rappresentanti di $\mathbf{f}$, e (V_1, g_1), (V_2, g_2) due rappresentanti di $\mathbf{g}$. Allora:*
- (i) $(U_1 \cap V_1, f_1 + g_1)$ *è equivalente a* $(U_2 \cap V_2, f_2 + g_2)$*;*
- (ii) $(U_1 \cap V_1, f_1 g_1)$ *è equivalente a* $(U_2 \cap V_2, f_2 g_2)$*;*
- (iii) $(U_1, \lambda f_1)$ *è equivalente a* $(U_2, \lambda f_2)$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
- (iv) $f_1(p) = f_2(p)$.

Dimostrazione: Cominciamo con (i). Siccome $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, esiste un intorno aperto $W \subseteq U_1 \cap U_2$ di p tale che $f_1|_W \equiv f_2|_W$. Analogamente, siccome $(V_1, g_1) \sim (V_2, g_2)$, esiste un intorno aperto $\tilde{W} \subseteq V_1 \cap V_2$ di p tale che $g_1|_{\tilde{W}} \equiv g_2|_{\tilde{W}}$. Ma allora $(f_1+f_2)|_{W\cap\tilde{W}} \equiv (g_1+g_2)|_{W\cap\tilde{W}}$, e quindi $(U_1\cap V_1, f_1+g_1) \sim (U_2\cap V_2, f_2+g_2)$ in quanto $W \cap \tilde{W} \subseteq U_1 \cap V_1 \cap U_2 \cap V_2$.

La dimostrazione di (ii) è analoga, e (iii) e (iv) sono ovvie. □

Definizione 2.3.5: Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in C^\infty(p)$ due germi in un punto $p \in S$. Indicheremo con $\mathbf{f} + \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U\cap V, f+g)$, dove (U, f) è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{f}$ e (V, g) è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{g}$. Analogamente indicheremo con $\mathbf{fg} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, fg)$, e, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U, \lambda f)$. Il Lemma 2.3.2 ci assicura che queste definizioni sono ben poste, ed è evidente (perché?) che $C^\infty(p)$ con queste operazioni è un'algebra. Infine, per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ definiamo il suo valore $\mathbf{f}(p) \in \mathbb{R}$ in p ponendo $\mathbf{f}(p) = f(p)$ per un qualsiasi rappresentante (U, f) di $\mathbf{f}$. Di nuovo, il Lemma 2.3.2 ci assicura che $\mathbf{f}(p)$ è ben definito.

Il fatto che la composizione di applicazioni differenziabili sia ancora un'applicazione differenziabile ci permette di confrontare spighe su punti in superfici diverse. Infatti, sia $F\colon S_1 \to S_2$ un'applicazione di classe C^∞ fra superfici, e siano (V_1, g_1) e (V_2, g_2) due rappresentanti di un germe $\mathbf{g} \in C^\infty\big(F(p)\big)$. Allora è evidente (esercizio) che $\big(F^{-1}(V_1), g_1 \circ F\big)$ e $\big(F^{-1}(V_2), g_2 \circ F\big)$ rappresentano lo stesso germe in p, che quindi dipende solo da $\mathbf{g}$ (e da F). Dunque possiamo introdurre la seguente

Definizione 2.3.6: Dati un'applicazione differenziabile fra superfici $F\colon S_1 \to S_2$ e un punto $p \in S_1$, indicheremo con $F_p^*\colon C^\infty_{S_2}\big(F(p)\big) \to C^\infty_{S_1}(p)$ l'applicazione che associa a un germe $\mathbf{g} \in C^\infty_{S_2}\big(F(p)\big)$ di rappresentante (V, g) il germe $F_p^*(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \circ F \in C^\infty_{S_1}(p)$ di rappresentante $\big(F^{-1}(V), g \circ F\big)$. Si verifica subito (esercizio) che F_p^* è un omomorfismo di algebre.

Osservazione 2.3.6. Una convenzione molto comune (e molto utile) della matematica contemporanea consiste nell'indicare con una stella in alto (come in F^*) un'applicazione associata in modo canonico a un'applicazione data ma che procede in direzione inversa: la F va da S_1 a S_2, mentre F^* va dai germi in S_2 ai germi in S_1. La stessa convenzione prevede di usare la stella in basso (come in F_*) per indicare un'applicazione associata che invece proceda nella stessa direzione dell'applicazione data (vedi per esempio le Definizioni 2.3.8 e 2.3.10 più oltre).

Lemma 2.3.3: (i) *Si ha* $(\mathrm{id}_S)_p^* = \mathrm{id}$ *per ogni punto* p *di una superficie* S.
(ii) *Siano* $F\colon S_1 \to S_2$ *e* $G\colon S_2 \to S_3$ *applicazioni* C^∞ *fra superfici e* $p \in S_1$. *Allora* $(G \circ F)_p^* = F_p^* \circ G^*_{F(p)}$ *per ogni* $p \in S_1$.
(iii) *Se* $F\colon S_1 \to S_2$ *è un diffeomorfismo allora* $F_p^*\colon C^\infty\big(F(p)\big) \to C^\infty(p)$ *è un isomorfismo di algebre per ogni* $p \in S_1$. *In particolare, se* $\varphi\colon U \to S$ *è una parametrizzazione locale con* $\varphi(x_o) = p \in S$, *allora* $\varphi^*_{x_o}\colon C^\infty_S(p) \to C^\infty_U(x_o)$ *è un isomorfismo di algebre.*

Dimostrazione: (i) Ovvio.
(ii) Segue subito (esercizio) dall'uguaglianza $g \circ (G \circ F) = (g \circ G) \circ F$.
(iii) Infatti (i) e (ii) implicano che $(F^{-1})^*_{F(p)}$ è l'inversa di F_p^*. □

Adesso siamo finalmente in grado di definire cosa intendiamo per derivata parziale su una superficie.

Definizione 2.3.7: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Una *derivazione* in p è una funzione $\mathbb{R}$-lineare $D\colon C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ che soddisfa la regola di Leibniz:

$$D(\mathbf{fg}) = \mathbf{f}(p)D(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)D(\mathbf{f}).$$

Si verifica subito (esercizio) che l'insieme $\mathcal{D}\big(C^\infty(p)\big)$ delle derivazioni di $C^\infty(p)$ è un sottospazio vettoriale del duale (come spazio vettoriale) di $C^\infty(p)$.

Esempio 2.3.4. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto del piano, e $p \in U$. Abbiamo già osservato che $T_pU = \mathbb{R}^2$. D'altra parte, le derivate parziali in p sono chiaramente delle derivazioni di $C^\infty(p)$; quindi possiamo introdurre un'applicazione lineare naturale $\alpha\colon T_pU \to \mathcal{D}\big(C^\infty(p)\big)$ ponendo

$$\alpha(v) = \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p = v^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + v^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p .$$

Il punto cruciale è che l'applicazione α è in realtà un isomorfismo fra T_pU e $\mathcal{D}\big(C^\infty(p)\big)$. Di più, quello che succede è che T_pS e $\mathcal{D}\big(C^\infty_S(p)\big)$ sono canonicamente isomorfi per ogni superficie S e ogni $p \in S$, fatto che ci fornirà la desiderata caratterizzazione intrinseca dei vettori tangenti. Per dimostrare tutto ciò ci servono ancora una definizione e un lemma.

Definizione 2.3.8: Sia $\varphi\colon U \to S$ una parametrizzazione locale con $\varphi(x_o) = p \in S$. Definiamo un'applicazione $\varphi_*\colon \mathcal{D}\big(C^\infty(x_o)\big) \to \mathcal{D}\big(C^\infty(p)\big)$ ponendo $\varphi_*(D) = D \circ \varphi^*_{x_o}$, cioè

$$\varphi_*(D)(\mathbf{f}) = D(\mathbf{f} \circ \varphi)$$

per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e $D \in \mathcal{D}\big(C^\infty(x_o)\big)$. Si verifica subito (perché?) che $\varphi_*(D)$ è una derivazione, in quanto $\varphi^*_{x_o}$ è un isomorfismo di algebre, per cui l'immagine di φ_* è effettivamente contenuta in $\mathcal{D}\big(C^\infty(p)\big)$. Di più, è facile vedere (esercizio) che φ_* è un isomorfismo di spazi vettoriali, con inversa $(\varphi_*)^{-1}(D) = D \circ (\varphi^{-1})^*_p$.

Osservazione 2.3.7. Vedremo in seguito che φ_* può essere canonicamente identificato col differenziale della parametrizzazione locale.

Lemma 2.3.4: *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto stellato rispetto al punto $x_o \in \mathbb{R}^n$. Allora per ogni $f \in C^\infty(U)$ esistono $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(U)$ tali che $g_j(x_o) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_o)$ e*

$$f(x) = f(x_o) + \sum_{j=1}^n (x^j - x^j_o) g_j(x)$$

per ogni $x \in U$.

Dimostrazione: Si ha

$$f(x) - f(x_o) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f\big(x_o + t(x - x_o)\big)\, dt = \sum_{j=1}^n (x^j - x^j_o) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}\big(x_o + t(x - x_o)\big)\, dt,$$

per cui basta porre

$$g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}\big(x_o + t(x - x_o)\big)\, dt.$$

□

E finalmente possiamo dimostrare la promessa caratterizzazione del piano tangente:

Teorema 2.3.5: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora il piano tangente T_pS è canonicamente isomorfo allo spazio $\mathcal{D}\big(C^\infty(p)\big)$ delle derivazioni di $C^\infty(p)$.*

Dimostrazione: Sia $\varphi\colon U \to S$ una parametrizzazione locale centrata in p. Quanto fatto finora ci permette di considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_OU = \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}\big(C^\infty(O)\big) \\ {\scriptstyle d\varphi_O}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ T_pS & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{D}\big(C^\infty(p)\big) \end{array}, \tag{2.3.1}$$

dove α è l'applicazione introdotta nell'Esempio 2.3.4, e $\beta = \varphi_* \circ \alpha \circ (d\varphi_O)^{-1}$. Procederemo in due passi: prima di tutto dimostreremo che α è un isomorfismo. Essendo $d\varphi_O$ e φ_* isomorfismi, questo implicherà che anche β è un isomorfismo. Poi dimostreremo che è possibile esprimere β in modo indipendente dalla parametrizzazione locale φ scelta; quindi β sarà un isomorfismo canonico, indipendente da qualsiasi scelta, e avremo finito.

Cominciamo allora col dimostrare che α è un isomorfismo. Essendo chiaramente lineare, ci basta far vedere che è iniettiva e surgettiva.

Se $v = (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2 = T_OU$, si vede subito che

$$v^j = \alpha(v)(\mathbf{x}^j)$$

per $j = 1, 2$, dove $\mathbf{x}^j$ è il germe nell'origine della funzione coordinata x^j. In particolare, se $v^j \neq 0$ si ha $\alpha(v)(\mathbf{x}^j) \neq 0$, per cui $v \neq O$ implica $\alpha(v) \neq O$ e α è iniettiva.

Per la surgettività, sia $D \in \mathcal{D}\bigl(C^\infty(O)\bigr)$; vogliamo far vedere che $D = \alpha(v)$, dove $v = (D\mathbf{x}^1, D\mathbf{x}^2)$. Prima di tutto notiamo che

$$D\mathbf{1} = D(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = 2D\mathbf{1},$$

e quindi $D\mathbf{c} = 0$ per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, dove $\mathbf{c}$ è il germe rappresentato da $(\mathbb{R}^2, c)$. Sia ora $\mathbf{f} \in C^\infty(O)$ qualsiasi. Applicando il Lemma 2.3.4 troviamo

$$D\mathbf{f} = D\bigl(\mathbf{f}(O)\bigr) + D\bigl(\mathbf{x}^1\mathbf{g}_1 + \mathbf{x}^2\mathbf{g}_2\bigr) = \sum_{j=1}^{2}\bigl[\mathbf{x}^j(O)D\mathbf{g}_j + \mathbf{g}_j(O)D\mathbf{x}^j\bigr] = \sum_{j=1}^{2} D\mathbf{x}^j\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^j}(O) = \alpha(v)(\mathbf{f}),$$

dove $v = (D\mathbf{x}^1, D\mathbf{x}^2)$ come previsto, e ci siamo.

Dunque α e β sono degli isomorfismi; per concludere la dimostrazione ci basta far vedere che β non dipende da φ ma solo da S e da p. Sia $v \in T_pS$; allora deve esistere una curva $\sigma\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tale che $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Vogliamo far vedere che

$$\beta(v)(\mathbf{f}) = (f \circ \sigma)'(0) \tag{2.3.2}$$

per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e ogni rappresentante $(U, f) \in \mathbf{f}$. Se dimostriamo questo abbiamo finito: infatti il primo membro di (2.3.2) non dipende né da σ né dal rappresentante scelto, mentre il secondo membro non dipende da alcuna parametrizzazione locale. Dunque in tal caso β non dipende né da φ né da σ e quindi è l'isomorfismo canonico cercato.

Ci rimane allora da dimostrare (2.3.2). Scriviamo $\sigma = \varphi \circ \sigma_o$ come nella dimostrazione della Proposizione 2.3.1, in modo da avere $v = d\varphi_O(v_o)$, dove $v_o = \sigma_o'(0) \in \mathbb{R}^2$. Ma allora

$$\begin{aligned}\beta(v)(\mathbf{f}) &= \bigl(\varphi_* \circ \alpha \circ (d\varphi_O)^{-1}\bigr)(v)(\mathbf{f}) = (\varphi_* \circ \alpha)(v_o)(\mathbf{f}) = \alpha(v_o)\bigl(\varphi_O^*(\mathbf{f})\bigr) = \alpha(v_o)(\mathbf{f} \circ \varphi)\\ &= (\sigma_o^1)'(0)\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^1}(O) + (\sigma_o^2)'(0)\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^2}(O) = \bigl((f \circ \varphi) \circ \sigma_o\bigr)'(0)\\ &= (f \circ \sigma)'(0),\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

e ci siamo. □

Osservazione 2.3.8. Una conseguenza del diagramma (2.3.1) è esattamente che, come promesso, l'applicazione φ_* è l'esatto analogo del differenziale di φ nel momento in cui interpretiamo i piani tangenti come spazi di derivazioni.

D'ora in poi identificheremo sistematicamente T_pS e $\mathcal{D}\bigl(C^\infty(p)\bigr)$ senza menzionare esplicitamente l'isomorfismo β; un vettore tangente sarà considerato sia come un vettore di $\mathbb{R}^3$ che come una derivazione dello spazio dei germi in p senza ulteriori commenti. In particolare, identificheremo sistematicamente i vettori $\{e_1, e_2\}$ della base canonica di $\mathbb{R}^2$ con le derivate parziali $\partial/\partial x^1|_p$ e $\partial/\partial x^2|_p$ quale che sia $p \in \mathbb{R}^2$.

L'isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e T_pS fornito dalle parametrizzazioni locali ci permette di introdurre particolari basi del piano tangente:

Definizione 2.3.9: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Se $\varphi\colon U \to S$ è una parametrizzazione locale centrata in p, e $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$, allora definiamo i vettori tangenti $\partial/\partial x^1|_p$, $\partial/\partial x^2|_p \in T_pS$ ponendo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = d\varphi_O(e_j) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(O) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^j}(O) \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^j}(O) \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^j}(O) \end{vmatrix}.$$

Scriveremo spesso $\partial_j|_p$ (o anche, quando non ci sarà pericolo di confusione, semplicemente ∂_j) invece di $\partial/\partial x^j|_p$. Chiaramente, $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ è una base di T_pS.

Osservazione 2.3.9. Prendiamo una parametrizzazione locale $\varphi: U \to S$ centrata in un punto $p \in S$, e un vettore tangente $v = v^1\partial_1|_p + v^2\partial_2|_p \in T_pS$. Allora (2.3.3) ci dice che l'azione di v come derivazione è data da

$$v(\mathbf{f}) = v^1 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^1}(O) + v^2 \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^2}(O),$$

per qualsiasi germe $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e qualsiasi rappresentante (V, f) di $\mathbf{f}$. In particolare, se S è un aperto di $\mathbb{R}^2$, allora i vettori e_1 ed e_2 della base canonica di $\mathbb{R}^2 = T_pU$ corrispondono alle derivate parziali $\partial/\partial x^1$ e $\partial/\partial x^2$.

Osservazione 2.3.10. Nell'osservazione precedente abbiamo descritto l'azione di un vettore tangente su un germe esprimendo il vettore tangente in termini della base data da una parametrizzazione locale. Se invece vediamo $v = (v^1, v^2, v^3) \in T_pS$ come un vettore di $\mathbb{R}^3$ possiamo descrivere la sua azione come segue: dato $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$, scegliamo un rappresentante (V, f) di $\mathbf{f}$ ed estendiamolo con la Proposizione 2.2.5 a una funzione differenziabile $\tilde{f}$ definita in un intorno W di p in $\mathbb{R}^3$. Sia infine $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Allora

$$v(\mathbf{f}) = (f \circ \sigma)'(0) = (\tilde{f} \circ \sigma)'(0) = \sum_{j=1}^{3} v^j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^j}(p).$$

Attenzione: mentre la combinazione lineare nel membro destro della formula precedente è ben definita e dipende soltanto dal vettore tangente v e dal germe $\mathbf{f}$, ciascuna singola derivata parziale $\partial\tilde{f}/\partial x^j(p)$ dipende dall'estensione $\tilde{f}$ scelta, per cui non dà alcuna informazione sulla superficie S per sé.

Esercizio 2.3.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Dimostra che per ogni base $\{v_1, v_2\}$ di T_pS esiste una parametrizzazione locale $\varphi: U \to S$ centrata in p tale che $\partial_1|_p = v_1$ e $\partial_2|_p = v_2$.

Osservazione 2.3.11. Se abbiamo due parametrizzazioni locali $\varphi: U \to S$ e $\hat{\varphi}: \hat{U} \to S$ centrate in $p \in S$ otteniamo due basi $\{\partial_1, \partial_2\}$ e $\{\hat{\partial}_1, \hat{\partial}_2\}$ di T_pS, dove $\hat{\partial}_j = \partial\hat{\varphi}/\partial\hat{x}^j(O)$, e $(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ sono le coordinate in $\hat{U}$. Avendo due basi di uno stesso spazio vettoriale, deve esistere la matrice di cambiamento di base. Se indichiamo con $h = \hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ il cambiamento di coordinate, abbiamo $\varphi = \hat{\varphi} \circ h$ e dunque

$$\partial_j = \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^j}(O)\hat{\partial}_1 + \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial x^j}(O)\hat{\partial}_2,$$

dove abbiamo posto $\partial\hat{x}^i/\partial x^j = \partial h^i/\partial x^j$. Quindi *la matrice di cambiamento di base è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate.*

Abbiamo visto che un modo per definire superfici è come superficie di livello di una funzione differenziabile. La seguente proposizione ci dice come trovare il piano tangente in questo caso:

Proposizione 2.3.6: *Sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare per una funzione $f \in C^\infty(U)$, dove $U \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto. Posto $S = f^{-1}(a)$, per ogni $p \in S$ il piano tangente T_pS è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a* $\operatorname{grad} f(p)$.

Dimostrazione: Infatti, prendiamo $v \in T_pS$ e sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Derivando $f \circ \sigma \equiv a$ e calcolando in 0 otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p)v^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(p)v^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}(p)v^3 = 0,$$

per cui v è ortogonale a $\operatorname{grad} f(p)$. Dunque $T_pS \subseteq \operatorname{grad} f(p)^\perp$; ma i due sottospazi hanno la stessa dimensione, e quindi coincidono. □

Esercizio 2.3.2. Sia $f: W \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ definita in un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$, prendiamo $a \in \mathbb{R}$ e poniamo $S = f^{-1}(a) \setminus \operatorname{Crit}(f)$. Dimostra che per ogni $p \in S$ il piano tangente T_pS coincide con il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\operatorname{grad} f(p)$.

Il modo in cui abbiamo introdotto l'applicazione φ_*, e la sua relazione con il differenziale usuale, suggerisce la seguente definizione di differenziale per una qualsiasi applicazione di classe C^∞ fra superfici:

Definizione 2.3.10: Sia $F: S_1 \to S_2$ un'applicazione C^∞ fra due superfici, e $p \in S_1$. Il *differenziale* di F in p è l'applicazione lineare $dF_p: T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$ definita da $dF_p(D) = D \circ F^*$ per ogni derivazione $D \in T_pS$ di $C^\infty(p)$. A volte si scrive $(F_*)_p$ invece di dF_p.

Esercizio 2.3.3. Siano $F: S_1 \to S_2$ e $G: S_2 \to S_3$ applicazioni C^∞ fra superfici, e $p \in S_1$. Dimostra che $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$, e che $d(\mathrm{id}_{S_1})_p = \mathrm{id}$. In particolare, se F è un diffeomorfismo allora dF_p è invertibile e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Non è difficile vedere che aspetto prende il differenziale quando applicato a vettori intesi come vettori tangenti a una curva:

Lemma 2.3.7: *Sia $F: S_1 \to S_2$ un'applicazione C^∞ fra superfici e $p \in S_1$. Se $\sigma: (-\delta, \delta) \to S_1$ è una curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$ allora*

$$dF_p(v) = (F \circ \sigma)'(0). \tag{2.3.4}$$

Dimostrazione: Poniamo $w = (F \circ \sigma)'(0) \in T_{F(p)}S_2$. Usando le notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 2.3.5, dobbiamo dimostrare che $dF_p\big(\beta(v)\big) = \beta(w)$. Ma infatti se $\mathbf{f} \in C^\infty\big(F(p)\big)$ abbiamo

$$dF_p\big(\beta(v)\big)(\mathbf{f}) = \beta(v)\big(F^*(\mathbf{f})\big) = \beta(v)(\mathbf{f} \circ F) = \big((f \circ F) \circ \sigma\big)'(0) = \big(f \circ (F \circ \sigma)\big)'(0) = \beta(w)(\mathbf{f}),$$

grazie a (2.3.3). □

Come per la definizione di vettore tangente, siamo di fronte a due possibili modi di introdurre il differenziale, ognuno coi propri pregi e difetti. La (2.3.4) evidenzia il significato geometrico del differenziale; la Definizione 2.3.10 rende invece evidente che il differenziale è un'applicazione lineare fra i piani tangenti, e che valgono le proprietà indicate nell'Esercizio 2.3.3.

Osservazione 2.3.12. Più in generale, se $F: S \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione C^∞ e $p \in S$, possiamo definire il differenziale $dF_p: T_pS \to \mathbb{R}^n$ di F in p ponendo $dF_p(v) = (F \circ \sigma)'(0)$, dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ è una qualsiasi curva in S con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$; non è difficile (esercizio) verificare che $dF_p(v)$ dipende solo da v e non dalla curva σ, e che è un'applicazione lineare. In particolare, se $f \in C^\infty(S)$ e $v \in T_pS$ allora abbiamo

$$df_p(v) = (f \circ \sigma)'(0) = v(\mathbf{f}),$$

dove $\mathbf{f}$ è il germe di f in p, formula che mostra come l'azione del differenziale delle funzioni sui vettori tangenti sia duale all'azione dei vettori tangenti sulle funzioni.

Vediamo ora come si esprime il differenziale in coordinate locali. Data un'applicazione differenziabile $F: S_1 \to S_2$ fra superfici, scegliamo $\varphi: U \to S_1$ una parametrizzazione locale centrata in $p \in S_1$, e una parametrizzazione locale $\hat\varphi: \hat U \to S_2$ centrata in $F(p) \in S_2$ tali che $F\big(\varphi(U)\big) \subseteq \hat\varphi(\hat U)$; in particolare, possiamo esprimere F in coordinate locali tramite la $\hat F = (\hat F^1, \hat F^2) = \hat\varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$. Vogliamo la matrice che rappresenta dF_p rispetto alle basi $\{\partial_1, \partial_2\}$ di T_pS_1 e $\{\hat\partial_1, \hat\partial_2\}$ di $T_{F(p)}S_2$, matrice che contiene per colonne le coordinate rispetto alla base di arrivo dei trasformati tramite dF_p dei vettori della base di partenza. Possiamo procedere in due modi: o usando le curve, o usando le derivazioni. Una curva in S_1 tangente a ∂_j in p è $\sigma_j(t) = \varphi(te_j)$, per cui

$$dF_p(\partial_j) = (F \circ \sigma_j)'(0) = \frac{d}{dt}\big(\hat\varphi \circ \hat F(te_j)\big)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial \hat F^1}{\partial x^j}(0)\hat\partial_1 + \frac{\partial \hat F^2}{\partial x^j}(0)\hat\partial_2.$$

Quindi *la matrice che rappresenta dF_p rispetto alle basi indotte dalle due parametrizzazioni locali è esattamente la matrice jacobiana dell'espressione $\hat F$ di F in coordinate locali.*

Vediamo di riottenere lo stesso risultato usando le derivazioni. Vogliamo scrivere $dF_p(\partial_j) = a_j^1\hat\partial_1 + a_j^2\hat\partial_2$. Ponendo $\hat\varphi^{-1} = (\hat x^1, \hat x^2)$, si vede subito che

$$\hat\partial_h(\hat{\mathbf{x}}^k) = \delta_h^k = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k, \\ 0 & \text{se } h \neq k, \end{cases}$$

dove $\hat{\mathbf{x}}^k$ è il germe in p della funzione $\hat{x}^k$. Quindi

$$a_j^i = dF_p(\partial_j)(\hat{\mathbf{x}}^i) = \partial_j(F^*\hat{\mathbf{x}}^i) = \frac{\partial(\hat{x}^i \circ F \circ \varphi)}{\partial x^j}(O) = \frac{\partial \hat{F}^i}{\partial x^j}(0),$$

coerentemente con quanto visto prima.

Osservazione 2.3.13. Attenzione: la matrice che rappresenta il differenziale di un'applicazione fra superfici è una matrice *2* $\times$ *2*, e non una matrice 3×3 o 3×2 o 2×3, in quanto i piani tangenti hanno dimensione 2.

Il fatto che il differenziale di un'applicazione fra superfici sia rappresentato dalla matrice jacobiana dell'espressione dell'applicazione in coordinate locali permette di trasferire facilmente alle superfici risultati classici dell'analisi in $\mathbb{R}^n$ quali il teorema della funzione inversa:

Corollario 2.3.8: *Sia $F: S_1 \to S_2$ un'applicazione differenziabile fra superfici. Sia $p \in S_1$ un punto tale che $dF_p: T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$ sia un isomorfismo. Allora esistono un intorno $V \subseteq S_1$ di p e un intorno $\hat{V} \subseteq S_2$ di $F(p)$ tali che $F|_V: V \to \hat{V}$ sia un diffeomorfismo.*

Dimostrazione: Sia $\varphi: U \to S_1$ una qualsiasi parametrizzazione locale in p, e $\hat{\varphi}: \hat{U} \to S_2$ una qualsiasi carta in $F(p)$ con $F\big(\varphi(U)\big) \subseteq \hat{\varphi}(\hat{U})$. Allora la tesi segue (perché?) dal classico teorema della funzione inversa Teorema 1.3.1 applicato a $\hat{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi$. □

Concludiamo questo paragrafo con un'ultima caratterizzazione del piano tangente, questa volta puramente algebrica:

Esercizio 2.3.4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Posto $\mathfrak{m} = \{\mathbf{f} \in C^\infty(p) \mid \mathbf{f}(p) = 0\}$, dimostra che $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale di $C^\infty(p)$, e che T_pS è canonicamente isomorfo al duale (come spazio vettoriale) di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

2.4 Orientabilità

Un concetto importante in teoria delle superfici è quello di orientabilità. In parole povere, una superficie è orientabile se ha due "facce", una interna e una esterna, mentre non è orientabile se ha una faccia sola, come il nastro di Möbius (vedi l'Esempio 2.4.3).

Ci sono (almeno) due modi per definire precisamente il concetto di orientabilità: uno intrinseco, e l'altro legato all'immersione della superficie in $\mathbb{R}^3$. Cominciamo col primo.

Definizione 2.4.1: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che due parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha: U_\alpha \to S$ e $\varphi_\beta: U_\beta \to S$ *determinano la stessa orientazione* (o sono *equiorientate*) se $\det \mathrm{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) > 0$ ove definito, cioè su $\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)\big)$. Se invece $\det \mathrm{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) < 0$ su $\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)\big) \neq \varnothing$, diremo che le due parametrizzazioni locali *determinano l'orientazione opposta*. La superficie S è detta *orientabile* se esiste un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di S composto da carte a due a due equiorientate (e diremo che l'atlante è *orientato*). Se fissiamo un tale atlante $\mathcal{A}$ diremo che la superficie S è *orientata* da $\mathcal{A}$.

Osservazione 2.4.1. Attenzione: possono esistere coppie di parametrizzazioni locali che non determinano né la stessa orientazione né quella opposta. Per esempio, può succedere che $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ abbia due componenti connesse e $\det \mathrm{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ sia positivo su una e negativo sull'altra; vedi l'Esempio 2.4.3.

Quando abbiamo una parametrizzazione locale in $p \in S$, possiamo orientare il piano tangente a S in p dicendo che la base $\{\partial_1, \partial_2\}$ associata alla parametrizzazione determina l'orientazione positiva del piano. Quindi la definizione ci dice che S è orientabile se e solo se possiamo orientare contemporaneamente tutti i piani tangenti a S in maniera coerente.

Esempio 2.4.1. Una superficie che possiede un atlante costituito da una sola parametrizzazione locale è chiaramente orientabile. Per esempio, i grafici sono tutti orientabili.

Esempio 2.4.2. Se una superficie ha un atlante costituito da due parametrizzazioni locali le cui immagini abbiano intersezione connessa, allora è orientabile. Infatti il determinante dello jacobiano del cambiamento di coordinate deve avere (perché?) segno costante sull'intersezione, e quindi a meno di scambiare le coordinate nel dominio di una parametrizzazione (operazione che cambia il segno del determinante dello jacobiano del cambiamento di coordinate), possiamo sempre fare in modo che le due parametrizzazioni determinino la stessa orientazione. Per esempio, quindi, la sfera è orientabile.

Osservazione 2.4.2. L'orientabilità è una proprietà *globale* di una superficie: non possiamo verificarla controllando solo cosa succede su una parametrizzazione locale alla volta. L'immagine di una singola parametrizzazione locale è sempre orientabile; i problemi possono nascere da come si collegano fra di loro le varie parametrizzazioni locali.

Per dare la seconda caratterizzazione delle superfici orientabili ci serve una nuova definizione.

Definizione 2.4.2: Un *campo di vettori normali* su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $N: S \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $N(p)$ sia ortogonale a T_pS per ogni $p \in S$. Se inoltre $\|N\| \equiv 1$ parleremo di campo di *versori normali* a S.

In un certo senso, un campo di versori normali indica su tutta la superficie qual è la faccia esterna: quella nella direzione del versore normale. Infatti:

Proposizione 2.4.1: *Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se esiste un campo di versori normali su S.*

Dimostrazione: Cominciamo con qualche osservazione generale. Sia $\varphi_\alpha: U_\alpha \to S$ una parametrizzazione locale di S, e per ogni $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ poniamo

$$N_\alpha(p) = \frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|}(p),$$

dove $\partial_{j,\alpha} = \partial\varphi_\alpha/\partial x^j$ come al solito, e $\wedge$ è il prodotto vettore di $\mathbb{R}^3$. Siccome $\{\partial_{1,\alpha}, \partial_{2,\alpha}\}$ è una base di T_pS il versore N_α è ben definito, non nullo e ortogonale a T_pS; inoltre dipende chiaramente in modo C^∞ da p.

Sia ora $\varphi_\beta: U_\beta \to S$ un'altra parametrizzazione locale con $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \varnothing$. Abbiamo visto che

$$\partial_{j,\alpha} = \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^j}\partial_{1,\beta} + \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^j}\partial_{2,\beta},$$

dove abbiamo scritto come al solito $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha = (x_\beta^1, x_\beta^2)$. Dunque

$$\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha} = \det \mathrm{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)\, \partial_{1,\beta} \wedge \partial_{2,\beta}, \tag{2.4.1}$$

e quindi

$$\frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|} = \mathrm{sgn}\big(\det \mathrm{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)\big)\, \frac{\partial_{1,\beta} \wedge \partial_{2,\beta}}{\|\partial_{1,\beta} \wedge \partial_{2,\beta}\|}. \tag{2.4.2}$$

Supponiamo ora S orientabile, e sia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un atlante orientato. Se $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$, la (2.4.2) ci dice che $N_\alpha(p) = N_\beta(p)$; quindi l'applicazione $p \mapsto N_\alpha(p)$ non dipende dalla particolare parametrizzazione locale scelta, e definisce un campo di versori normali su S.

Viceversa, sia $N: S \to \mathbb{R}^3$ un campo di versori normali su S, e sia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ un qualsiasi atlante di S tale che il dominio U_α di ciascun φ_α sia connesso. Ora, per definizione di prodotto vettore abbiamo

$$\left(N, \frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|}\right) \equiv \pm 1$$

su ciascun U_α; essendo U_α connesso, a meno di modificare φ_α scambiando le coordinate in U_α, possiamo supporre che il prodotto scalare sia identicamente 1. Ma allora

$$\frac{\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}}{\|\partial_{1,\alpha} \wedge \partial_{2,\alpha}\|} \equiv N$$

su ciascun U_α, e (2.4.2) implica che l'atlante è orientato. □

Definizione 2.4.3: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$. Diremo che un campo di versori normali N *determina l'orientazione data* se $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ per ogni parametrizzazione locale $\varphi \in \mathcal{A}$.

Una conseguenza della proposizione precedente è che se S è una superficie orientata esiste sempre (perché?) un *unico* campo di versori normale che determina l'orientazione data.

Definizione 2.4.4: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata, e $N: S \to S^2$ un campo di versori normali che determina l'orientazione data. Se $p \in S$, diremo che una base $\{v_1, v_2\}$ di T_pS è *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la base $\{v_1, v_2, N(p)\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha la stessa orientazione (rispettivamente, l'orientazione opposta) della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.4.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$. Presi $p \in S$ e una base $\{v_1, v_2\}$ di T_pS, dimostra che $\{v_1, v_2\}$ è una base positiva di T_pS se e solo se determina su T_pS la stessa orientazione della base $\{\partial_{1,\alpha}|_p, \partial_{2,\alpha}|_p\}$ per ogni $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$ tale che p appartenga all'immagine di φ_α.

Definizione 2.4.5: Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$. Allora l'atlante $\mathcal{A}^-$ ottenuto scambiando le coordinate in tutte le parametrizzazioni di $\mathcal{A}$, cioè $\varphi \in \mathcal{A}^-$ se e solo se $\varphi \circ \chi \in \mathcal{A}$ dove $\chi(x, y) = (y, x)$, è detto *opposto* di $\mathcal{A}$.

Esercizio 2.4.2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$. Dimostra che anche $\mathcal{A}^-$ è orientato, ma che le parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}^-$ determinano tutte l'orientazione opposta rispetto alle parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}$.

Una domanda naturale che ci si potrebbe porre è la seguente: quante orientazioni esistono su una superficie connessa orientabile? Supponiamo di avere un atlante orientato $\mathcal{A}$; allora anche l'atlante opposto $\mathcal{A}^-$ è orientato. Quindi se c'è un'orientazione ne esiste sicuramente una seconda. Ora, se ci fosse una terza orientazione dovrebbero esistere parametrizzazioni locali equiorientate ad alcune parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}$ ma non a tutte; e invece questo non è possibile.

Corollario 2.4.2: *Sia S una superficie orientata da un atlante $\mathcal{A}$, e sia $\varphi: U \to S$ un'altra parametrizzazione locale, con U connesso. Allora o φ è equiorientata con tutte le parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}$, oppure lo è con tutte le parametrizzazioni locali di $\mathcal{A}^-$.*

Dimostrazione: Sia N il campo di versori normali che determina l'orientazione data, e $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base associata a φ. Esattamente come nella dimostrazione della Proposizione 2.4.1 otteniamo che

$$\frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|} \equiv \pm N$$

su $\varphi(U)$, dove il segno è costante perché U è connesso. Quindi (2.4.2) implica che se il segno è positivo allora φ determina la stessa orientazione di tutti gli elementi di $\mathcal{A}$, mentre se il segno è negativo determina l'orientazione opposta. □

In particolare, quindi, una superficie connessa o non ammette orientazioni o ne ammette esattamente due.

Esercizio 2.4.3. Dimostra il Corollario 2.4.2 usando la definizione originale di superficie orientabile. (*Suggerimento:* può essere utile sapere che ogni aperto connesso di una superficie è anche connesso per archi, fatto che si dimostra come per gli aperti del piano.)

Esercizio 2.4.4. Quante orientazioni ammette una superficie orientabile con r componenti connesse?

Esempio 2.4.3. *Il nastro di Möbius.* Sia C la circonferenza nel piano xy di centro l'origine e raggio 2, e ℓ_0 il segmento nel piano yz dato da $y = 2$ e $|z| < 1$, di centro il punto $c = (0, 2, 0)$. Indichiamo con ℓ_θ il segmento ottenuto ruotando c lungo C di un angolo θ e contemporaneamente ruotando ℓ_0 intorno a c di un angolo $\theta/2$. L'unione $S = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} \ell_\theta$ è detto *nastro di Möbius;* vogliamo dimostrare che è una superficie non orientabile. Posto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi, -1 < v < 1\}$, definiamo φ, $\hat{\varphi}: U \to S$ con

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \cos u, v \cos \frac{u}{2}\right), \\ \hat{\varphi}(u, v) &= \left(\left(2 - v \sin\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos u, -\left(2 - v \sin\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sin u, v \cos\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente (esercizio) che $\{\varphi, \hat{\varphi}\}$ è un atlante per S, costituito da due carte la cui intersezione *non* è connessa: infatti $\varphi(U) \cap \hat{\varphi}(U) = \varphi(W_1) \cup \varphi(W_2)$, con

$$W_1 = \{(u,v) \in U \mid \pi/2 < u < 2\pi\} \qquad \text{e} \qquad W_2 = \{(u,v) \in U \mid 0 < u < \pi/2\}.$$

Ora, se $(u,v) \in W_1$ si ha $\varphi(u,v) = \hat{\varphi}(u - \pi/2, v)$, mentre se $(u,v) \in W_2$ si ha $\varphi(u,v) = \hat{\varphi}(u + 3\pi/2, -v)$; quindi

$$\hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi(u,v) = \begin{cases} (u - \pi/2, v) & \text{se } (u,v) \in W_1, \\ (u + 3\pi/2, -v) & \text{se } (u,v) \in W_2. \end{cases}$$

In particolare,

$$\det \mathrm{Jac}(\hat{\varphi}^{-1} \circ \varphi) \equiv \begin{cases} +1 & \text{su } W_1, \\ -1 & \text{su } W_2. \end{cases}$$

Ora, supponiamo per assurdo che S sia orientabile, e sia N un campo di versori normali su S. A meno di cambiare segno a N possiamo supporre che N sia dato da $\partial_u \wedge \partial_v / \|\partial_u \wedge \partial_v\|$ su $\varphi(U)$, dove $\partial_u = \partial\varphi/\partial u$ e $\partial_v = \partial\varphi/\partial v$. D'altra parte, si deve avere $N = \pm \hat{\partial}_u \wedge \hat{\partial}_v / \|\hat{\partial}_u \wedge \hat{\partial}_v\|$ su $\hat{\varphi}(U)$, dove $\hat{\partial}_u = \partial\hat{\varphi}/\partial u$ e $\hat{\partial}_v = \partial\hat{\varphi}/\partial v$, con segno costante in quanto U è connesso. Ma la (2.4.2) applicata su W_1 ci dice che il segno dovrebbe essere $+1$, mentre applicata su W_2 ci dice che il segno dovrebbe essere -1, contraddizione.

Una vasta famiglia di superfici orientabili è fornita dal seguente

Corollario 2.4.3: *Sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare per una funzione $f \colon U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, dove $U \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto. Allora la superficie $S = f^{-1}(a)$ è orientabile.*

Dimostrazione: Grazie al Lemma 2.3.6 ponendo $N = \mathrm{grad} f / \|\mathrm{grad} f\|$ otteniamo un campo di versori normali su S. □

Concludiamo il capitolo citando il seguente viceversa del corollario precedente, che non dimostreremo:

Teorema 2.4.4: *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile, e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto contenente S tale che S sia chiusa in Ω. Allora esiste una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$ e un valore regolare $a \in \mathbb{R}$ di f tali che $S = f^{-1}(a)$.*