Geometria e Topologia Differenziale

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa
E-mail: abate@dm.unipi.it

Ottobre–Dicembre 2005

Capitolo 1

Curve

1.1 Il concetto di curva

Cos'è una curva (nel piano, nello spazio, in $\mathbb{R}^n$)? Vediamo esempi di cose che sicuramente lo sono:

Esempio 1.1.1. Una retta nel piano. Può venire presentata in (almeno) tre modi diversi:

- come grafico: $y = ax + b$ o $x = ay + b$;
- come luogo di zeri: $ax + by + c = 0$;
- come immagine di un'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ della forma $f(t) = (at + b, ct + d)$.

Attenzione: negli ultimi due casi i coefficienti non sono univocamente determinati dalla retta.

Esempio 1.1.2. Un grafico. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ è una funzione (almeno) continua, allora il suo *grafico*

$$\Gamma_f = \bigl\{\bigl(t, f(t)\bigr) \bigm| t \in I\bigr\} \subset \mathbb{R}^2$$

è sicuramente una curva. Nota che si ha $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y - f(x) = 0\}$, per cui un grafico può essere considerato come un luogo di zeri.

Esempio 1.1.3. Una circonferenza, di equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Nota che non è un grafico.

Una prima idea potrebbe essere la seguente: una curva è qualcosa di "dimensione 1" dentro il piano (o dentro $\mathbb{R}^n$). Un modo per scendere di dimensione, passando dalla dimensione 2 del piano alla dimensione 1 delle curve, è imporre una condizione: per esempio, potremmo considerare insiemi della forma $C = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ per opportune funzioni $f\colon U \to \mathbb{R}$, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto. Tutti gli esempi precedenti ricadono in questa categoria, e l'esperienza fatta con l'algebra lineare sembra indicare che potrebbe essere una buona idea.

Ma bisogna stare attenti. Prima di tutto, non appena f è continua l'insieme C è chiuso in U — e fin qui niente di male. Ma

Proposizione 1.1.1: *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora un sottoinsieme $C \subseteq U$ è chiuso in U se e solo se esiste una funzione continua $f\colon U \to \mathbb{R}$ tale che $C = \{x \in U \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$.*

Dimostrazione: Basta prendere $f(x) = d(x, C) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\}$. Infatti, f è continua, e $x \in C$ se e solo se $f(x) = 0$ (perché?). □

Dunque usando le funzioni continue otteniamo anche insiemi che decisamente non hanno alcun diritto a essere chiamati curve. Potremmo allora limitarci alle funzioni differenziabili. Ma anche in questo caso bisogna stare attenti:

Esempio 1.1.4. Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è data da $f(x, y) = xy$, allora $C = \{f(x, y) = 0\}$ è l'unione dei due assi coordinati, cioè l'unione di *due* curve, non una curva sola.

L'insieme C dell'esempio precedente è quasi una curva. L'unico punto in cui c'è un problema è l'origine, dove le due rette si intersecano. Ed effettivamente l'origine è un punto speciale anche per f: è l'unico punto del piano in cui il gradiente di f si annulla. Non è difficile vedere che è questa la causa del problema, usando il seguente teorema di Analisi:

Teorema 1.1.2: (della funzione implicita) *Sia $F\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k, con $k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$. Indichiamo con (x,y) le coordinate di $\mathbb{R}^{m+n}$, dove $x\in\mathbb{R}^m$ e $y\in\mathbb{R}^n$. Sia $p_0=(x_0,y_0)\in\Omega$ tale che*

$$F(p_0)=O \qquad e \qquad \det\frac{\partial F}{\partial y}(p_0)\neq 0.$$

Allora esistono un intorno $U\subset\mathbb{R}^{m+n}$ di p_0, un intorno $V\subset\mathbb{R}^m$ di x_0 e un'applicazione $g\colon V\to\mathbb{R}^n$ di classe C^k tale che $U\cap\{p\in\Omega\mid F(p)=O\}$ è costituito da tutti e soli i punti della forma $\big(x,g(x)\big)$ con $x\in V$.

Allora:

Proposizione 1.1.3: *Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ di classe C^1 e $p\in\Omega$ tale che $f(p)=0$ ma $\nabla f(p)\neq O$. Allora esiste un intorno U di p tale che $U\cap\{f=0\}$ sia un grafico.*

Dimostrazione: Scriviamo $p=(x_0,y_0)$; a meno di scambiare le coordinate possiamo supporre che $\frac{\partial f}{\partial y}(p)\neq 0$. Allora il Teorema della funzione implicita ci dice che esistono un intorno U di p, un intervallo aperto $I\subseteq\mathbb{R}$ contenente x_0 e una funzione $g\colon I\to\mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $U\cap\{f=0\}$ sia esattamente il grafico di g. □

Dunque nei punti in cui il gradiente della funzione f è non nullo, l'equazione $f(x,y)=0$ effettivamente definisce qualcosa che ha tutta l'aria di essere una curva. Ma che problema potranno procurare i punti in cui il gradiente si annulla (che sono detti *punti singolari* di f)? Magari sono semplicemente punti in cui s'intersecano varie curve, come nell'esempio precedente...

(S)fortunatamente, la situazione è ben più complicata di così:

Teorema 1.1.4: (Whitney) *Sia $U\subseteq\mathbb{R}^n$ aperto. Allora un sottoinsieme $C\subseteq U$ è chiuso in U se e solo se esiste una funzione $f\colon U\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $C=f^{-1}(0)$.*

Per la dimostrazione ci servono alcuni risultati preliminari.

Lemma 1.1.5: *Esiste una funzione $\alpha\colon\mathbb{R}\to[0,1)$ monotona, di classe C^∞ e tale che $\alpha(t)=0$ se e solo se $t\le 0$.*

Dimostrazione: Poniamo

$$\alpha(t)=\begin{cases} e^{-1/t} & \text{se } t>0,\\ 0 & \text{se } t\le 0.\end{cases}$$

L'unica cosa che dobbiamo verificare è che sia di classe C^∞ nell'origine. Per questo basta dimostrare che i limiti destro e sinistro di tutte le derivate nell'origine coincidono, ovvero che

$$\lim_{t\to 0^+}\alpha^{(n)}(t)=0$$

per ogni $n\ge 0$. Supponiamo di aver dimostrato l'esistenza per ogni $n\in\mathbb{N}$ di un polinomio p_n di grado $2n$ tale che

$$\forall t>0 \qquad \alpha^{(n)}(t)=e^{-1/t}p_n(1/t). \tag{1.1.1}$$

In tal caso

$$\lim_{t\to 0^+}\alpha^{(n)}(t)=\lim_{s\to+\infty}\frac{p_n(s)}{e^s}=0;$$

quindi per concludere basta dimostrare (1.1.1). Procediamo per induzione su n. Per $n=0$ basta prendere $p_0\equiv 1$. Supponiamo che (1.1.1) sia verificata per $n\ge 0$; allora

$$\alpha^{(n+1)}(t)=\frac{d}{dt}\left[e^{-1/t}p_n(1/t)\right]=e^{-1/t}\left[\frac{1}{t^2}p_n(1/t)-\frac{1}{t^2}p_n'(1/t)\right],$$

per cui basta scegliere $p_{n+1}(s)=s^2\big(p_n(s)-p_n'(s)\big)$. □

Corollario 1.1.6: *Per ogni intervallo chiuso* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *esiste una funzione* $\beta\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *di classe* C^∞ *tale che* $\beta(t) = 1$ *se e solo se* $t \le a$ *e* $\beta(t) = 0$ *se e solo se* $t \ge b$.

Dimostrazione: Basta prendere
$$\beta(t) = \frac{\alpha(b-t)}{\alpha(b-t) + \alpha(t-a)},$$
dove $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione del Lemma 1.1.5. $\square$

Corollario 1.1.7: *Dati* $p_0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $r > 0$ *esiste una funzione* $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *di classe* C^∞ *tale che* $f(p) = 1$ *se e solo se* $p \in \overline{B(p_0, r)}$, *e* $f(p) = 0$ *se e solo se* $p \notin B(p_0, 2r)$, *dove* $B(p,r)$ *è la palla aperta di centro* p *e raggio* r.

Dimostrazione: Sia $\beta\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ la funzione costruita nel corollario precedente partendo dall'intervallo $[r, 2r]$. Allora $f(p) = \beta(\|p - p_0\|^2)$ è come richiesto. $\square$

Lemma 1.1.8: *Sia* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto. Allora possiamo trovare una successione di punti* $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^n$ *e una successione di numeri razionali* $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+$ *tali che* $V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(p_k, r_k)$.

Dimostrazione: Sia $p \in U$. Essendo U aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(p,\varepsilon) \subset V$. Scegliamo allora $q \in \mathbb{Q}^n$ e $r \in \mathbb{Q}^+$ tali che $\|p - q\| < r < \varepsilon/2$. Chiaramente, $p \in B(q,r)$; inoltre, se $x \in B(q,r)$ abbiamo
$$\|p - x\| \le \|p - q\| + \|q - x\| < 2r < \varepsilon,$$
per cui $B(q,r) \subseteq B(p,\varepsilon) \subset V$. Dunque ogni punto di V appartiene a una palla di centro e raggio razionali completamente contenuta in V; siccome di tali palle ne esiste al più una quantità numerabile, abbiamo la tesi. $\square$

Ed eccoci arrivati alla

Dimostrazione del Teorema 1.1.4: Se $C = f^{-1}(0)$ sappiamo già che C dev'essere chiuso in U. Viceversa, supponiamo che C sia chiuso in U; allora $V = U \setminus C$ è aperto in U, e quindi in $\mathbb{R}^n$. Il Lemma 1.1.8 ci dice che abbiamo $V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(p_k, r_k)$ con $p_k \in \mathbb{Q}^k$ e $r_k \in \mathbb{Q}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia $f_k\colon U \to [0,1]$ la restrizione a U della funzione ottenuta applicando il Corollario 1.1.7 a p_k e $r_k/2$.

Chiaramente, $f_k \equiv 0$ fuori da $B(p_k, r_k)$, e lo stesso vale per tutte le sue derivate. Quindi il modulo di f_k e di tutte le sue derivate deve avere un massimo in $\overline{B(p_k, r_k)}$, che è un insieme compatto. Ne consegue che per ogni m, $k \in \mathbb{N}$ troviamo $c_k^m > 0$ tale che il valore assoluto di una qualsiasi derivata di ordine m di f_k è minore o uguale di c_k^m in tutto U. Sia $c_k = \max\{1, c_k^0, \ldots, c_k^k\}$, e poniamo
$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{2^k c_k}.$$
Prima di tutto, questa serie è maggiorata da $\sum_k 2^{-k}$, per cui converge uniformemente. Per costruzione, non appena $k \ge m$ una qualsiasi derivata di ordine m del termine k-esimo della serie è limitata da 2^{-k}; quindi anche le serie delle derivate convergono uniformemente, e $f \in C^\infty(U)$.

Ora, se $p \in C$ allora $p \notin B(p_k, r_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui $f_k(p) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e $f(p) = 0$. Viceversa, se $p \in U \setminus C$ deve esistere $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $p \in B(p_{k_0}, r_{k_0}) \subset V$; quindi $f_{k_0}(p) > 0$ e $f(p) \ge f_{k_0}(p)/2^{k_0} c_{k_0} > 0$. $\square$

Dunque definire una curva tramite equazioni non è l'approccio migliore. Un'idea più efficiente è dire che una curva è localmente fatta come $\mathbb{R}$:

Definizione 1.1.1: Una *linea* (o *1-sottovarietà*) è un sottoinsieme connesso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $p \in C$ esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di p, un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, e un'applicazione $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ (detta *parametrizzazione locale*) di classe C^∞ tali che

(i) $\sigma(I) = C \cap U$;
(ii) σ è un omeomorfismo con l'immagine;
(ii) $\sigma'(t) \neq O$ per ogni $t \in I$.

Diremo inoltre che una parametrizzazione locale σ è *rispetto alla lunghezza d'arco* se $\|\sigma'\| \equiv 1$.

ESEMPIO 1.1.5. Un grafico in $\mathbb{R}^2$ è una linea. Un insieme che è localmente un grafico (nel senso della Proposizione 1.1.3) è una linea. Una figura 8 non è una linea.

Esercizio 1.1.1. Dimostra che il grafico della funzione valore assoluto non è una linea.

Osservazione 1.1.1. Una linea C non ha punti interni. Infatti, se $p \in C$ fosse un punto interno, allora C conterrebbe una palla di centro p e raggio r; in particolare, $U \cap C \setminus \{p\}$ sarebbe connesso quale che sia l'intorno U di p. Ma se scegliamo U come nella definizione di linea, $U \cap C \setminus \{p\}$ dovrebbe essere omeomorfo a un intervallo aperto privato di un punto, che è sconnesso, contraddizione.

Osservazione 1.1.2. Le condizioni (i) e (ii) nella definizione di linea ci dicono che l'insieme C è, dal punto di vista topologico, localmente fatto come un intervallo. La condizione (iii) invece ha tre scopi: fornisce un vettore tangente alla linea, escludendo spigoli quali quelli che si trovano nel grafico della funzione $|t|$; assicura che anche dal punto di vista differenziale la struttura sia la stessa (come capiremo meglio quando parleremo di cambiamenti di parametro); evita altre possibili singolarità, quali le cuspidi che si trovano nell'immagine dell'applicazione $\sigma(t) = (t^2, t^3)$.

In realtà, questa definizione funzionerà meglio con superfici e oggetti di dimensione più alta; in dimensione 1 è eccessivamente complicata. Infatti vale il seguente

Teorema 1.1.9: *Ogni linea ha una parametrizzazione globale. Più esattamente, per ogni linea $C \subset \mathbb{R}^n$ esiste sempre un'applicazione $\hat\sigma\colon \mathbb{R} \to C$ surgettiva, di classe C^∞, con $\hat\sigma'(t) \neq O$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e tale che*

(a) *se C non è compatta allora $\hat\sigma$ è un omeomorfismo fra $\mathbb{R}$ e C;*
(b) *se C è compatta allora $\hat\sigma$ è periodica e induce un omeomorfismo fra S^1 e C.*

In altre parole, viste dall'interno le linee sono globalmente tutte come $\mathbb{R}$ o come S^1.

Dimostrazione: Prima di tutto dimostriamo che in ogni punto di C esiste una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco. Fissato $p \in C$, sia $\sigma\colon I \to U \cap C$ una parametrizzazione locale qualunque con $p = \sigma(t_0)$ per qualche $t_0 \in I$. Poniamo

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} \|\sigma'(s)\|\, ds;$$

allora $g'(t) = \|\sigma'(t)\| > 0$, per cui $g\colon I \to J = h(I)$ è un diffeomorfismo (monotono crescente) fra due intervalli. Quindi $\sigma_1 = \sigma \circ g^{-1}\colon J \to C \cap U$ è ancora una parametrizzazione locale; inoltre $\sigma_1(0) = p$ e

$$\sigma_1'(t) = \frac{\sigma'\big(g^{-1}(t)\big)}{\big\|\sigma'\big(g^{-1}(t)\big)\big\|},$$

per cui $\|\sigma_1'\| \equiv 1$, come richiesto.

Fissiamo ora $p_0 \in C$ e una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco $\sigma_0\colon I_0 \to C$ con $\sigma_0(0) = p_0$. Sia $\sigma\colon I \to C$ un'altra parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma(I) \neq \varnothing$; vogliamo far vedere che σ_0 e σ differiscono solo per una traslazione. Sia $J_0 = \sigma_0^{-1}\big(\sigma_0(I_0) \cap \sigma(I)\big) \subseteq I_0$, $J = \sigma^{-1}\big(\sigma_0(I_0) \cap \sigma(I)\big) \subseteq I$, e $h = \sigma^{-1} \circ \sigma_0\colon J_0 \to J$. La funzione h è chiaramente un omeomorfismo di aperti di $\mathbb{R}$; inoltre è (almeno) di classe C^1. Infatti, fissiamo $t_0 \in J_0$. Allora da $\sigma \circ h = \sigma_0$ otteniamo

$$\frac{\sigma_0(t) - \sigma_0(t_0)}{t - t_0} = \frac{\sigma\big(h(t)\big) - \sigma\big(h(t_0)\big)}{h(t) - h(t_0)} \cdot \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

per ogni $t \in J_0$. Facendo tendere t a t_0 il primo quoziente converge a $\sigma_0'(t_0)$, e il secondo a $\sigma'\big(h(t_0)\big)$. Siccome $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ è una parametrizzazione locale, esiste un indice j per cui $\sigma_j'\big(h(t_0)\big) \neq 0$; quindi

$$\lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{\sigma_{0,j}'(t_0)}{\sigma_j'\big(h(t_0)\big)}$$

esiste, e dunque h è derivabile. Inoltre, lo stesso ragionamento con lo stesso j funziona per tutti i t in un intorno di t_0, per cui troviamo

$$h' = \frac{\sigma_{0,j}'}{\sigma_j' \circ h}$$

in un intorno di t_0, e quindi h' è continua.

Ora, da $\sigma \circ h = \sigma_0$ deduciamo anche $\sigma'\big(h(t)\big)h'(t) = \sigma_0'(t)$, per cui $|h'| \equiv 1$. Dunque il grafico Γ di h è costituito da segmenti di pendenza ± 1, tanti quante sono le componenti connesse di J_0 (e quindi di J). In ciascuna di queste componenti, quindi, abbiamo $h(t) = \pm t + a$ per un opportuno $a \in \mathbb{R}$.

Il grafico Γ di h è contenuto nel rettangolo $I_0 \times I$; vogliamo dimostrare che gli estremi dei segmenti di Γ sono necessariamente sul bordo del rettangolo. Prima di tutto, notiamo che $(s_0, s) \in \Gamma$ sse $s = h(s_0)$, che implica

$$\sigma(s) = \sigma_0(s_0). \tag{1.1.2}$$

Sia ora, per assurdo, $(t_0, t) \in I_0 \times I$ un estremo di un segmento di Γ. Essendo un estremo, $t_0 \in \partial J_0$; ma d'altra parte, essendo (t_0, t) sul bordo del grafico, per continuità la (1.1.2) implica che $\sigma(t) = \sigma_0(t_0) \in \sigma_0(I_0) \cap \sigma(I)$, per cui $t_0 \in J_0$, contraddizione.

Ora, Γ è il grafico di una funzione iniettiva; quindi ciascun lato del rettangolo può essere toccato da al più un estremo di Γ (perché?). Ma questo implica che Γ — e quindi J_0 — ha al più 2 componenti connesse; e se ne ha due, entrambe hanno la stessa pendenza.

Notiamo infine che se la pendenza di Γ è -1, ponendo $\sigma_1(t) = \sigma(-t)$ otteniamo una parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco con la stessa immagine di σ ma tale che $h_1 = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_0$ abbia pendenza 1 (e diremo che σ_0 e σ_1 hanno *la stessa orientazione*).

Sia ora $\sigma_1 \colon I_1 \to C$ un'altra parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma_1(0) = p_0$; per quanto visto, senza perdita di generalità possiamo anche supporre che il grafico di $h = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_0$ sia composto da segmenti di pendenza 1. Siccome $p_0 \in \sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ e $h(0) = 0$, sulla componente connessa di J_0 contenente 0 abbiamo $h = \mathrm{id}$; quindi questa componente è $I_0 \cap I_1$, e abbiamo $\sigma_0 \equiv \sigma_1$ sull'intersezione dei domini.

In altre parole, due parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco $\sigma_0 \colon I_0 \to C$ e $\sigma_1 \colon I_1 \to C$ che partono dallo stesso punto $p_0 = \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ con la stessa orientazione coincidono sull'intersezione dei domini. Questo ci permette quindi di definire una nuova applicazione $\tilde{\sigma} \colon I_0 \cup I_1 \to C$ ponendo

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma_0(t) & \text{se } t \in I_0, \\ \sigma_1(t) & \text{se } t \in I_1. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Siamo pronti per il ragionamento finale. La parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco $\sigma_0 \colon I_0 \to C$ è fissata una volta per tutte. Indichiamo con $\mathcal{C}$ l'insieme delle parametrizzazioni locali $\sigma_1 \colon I_1 \to C$ rispetto alla lunghezza d'arco tali che $0 \in I_1$, $\sigma_1(0) = \sigma_0(0)$ e σ_1 ha la stessa orientazione di σ_0. Per quanto appena visto, abbiamo che σ_1 coincide con σ_0 sull'intersezione dei domini per ogni $\sigma_1 \in \mathcal{C}$.

Supponiamo esista una $\sigma_1 \in \mathcal{C}$ tale che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ abbia due componenti connesse. Questo vuol dire che l'estensione $\tilde{\sigma}$ data da (1.1.3) torna su se stessa, cioè è periodica di un qualche periodo $\ell > 0$, ed è iniettiva ristretta a $[t_0, t_0 + \ell)$ per qualche $t_0 \leq 0$. Ma allora possiamo prolungarla per periodicità a una $\hat{\sigma} \colon \mathbb{R} \to C$ con $\hat{\sigma}(\mathbb{R}) = \sigma_0(I_0) \cup \sigma_1(I_1)$. In particolare, $\hat{\sigma}(\mathbb{R})$ è aperto in C. Ma, d'altra parte, $\hat{\sigma}(\mathbb{R}) = \hat{\sigma}([t_0, t_0 + \ell])$ è compatto, e quindi chiuso in C. La connessione di C obbliga quindi ad avere $\hat{\sigma}(\mathbb{R}) = C$; dunque C è compatta, e $\hat{\sigma}$ induce un omeomorfismo fra S^1 e C, per cui siamo nel caso (b).

Supponiamo invece che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ abbia sempre una sola componente connessa, quale che sia $\sigma_1 \in \mathcal{C}$. Questo vuol dire che per ogni $\sigma_1 \in \mathcal{C}$ l'estensione $\tilde{\sigma}$ data da (1.1.3) è ancora una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco, che estende sia σ_0 che σ_1, e appartiene a $\mathcal{C}$. Dunque tutte le possibili parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco che partono da p_0 e con la stessa orientazione di σ_0 si raccordano formando una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco $\hat{\sigma} \colon J \to C$ massimale, dove J è un intervallo aperto. Chiaramente, $\hat{\sigma}(J)$ è aperto in C; se dimostriamo che è anche chiuso la connessione di C implicherà $\hat{\sigma}(J) = C$, e quindi saremo nel caso (a) — in quanto ogni intervallo aperto è diffeomorfo a $\mathbb{R}$.

Supponiamo per assurdo che $\hat{\sigma}(J)$ non sia chiuso in C, e sia $p \in C \setminus \hat{\sigma}(J)$ un punto aderente a $\hat{\sigma}(J)$. Ora, esiste sicuramente una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco in p, la cui immagine interseca necessariamente $\hat{\sigma}(J)$; ma allora procedendo come prima possiamo usare questa parametrizzazione per estendere ulteriormente $\hat{\sigma}$. Per la massimalità di $\hat{\sigma}$, questa estensione non può essere globalmente iniettiva; quindi è periodica, e il ragionamento precedente ci porta a dedurre che C è compatta e omeomorfa a S^1. Ma in questo caso esiste una parametrizzazione σ_1 tale che $\sigma_0(I_0) \cap \sigma_1(I_1)$ abbia due componenti connesse, contraddizione, e abbiamo finito. □

Questo risultato suggerisce che per studiare le linee conviene studiare le loro parametrizzazioni globali. Ma allora tanto vale fare il passo completo e prendere come principale oggetto di studio non l'insieme C ma la sua parametrizzazione (globale) σ. E questo ci porta alla prima definizione del prossimo paragrafo.

1.2 Teoria locale delle curve

Eccoci quindi alla definizione ufficiale di curva.

Definizione 1.2.1: Una *curva* (di classe C^k, con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\sigma: I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. L'immagine $\sigma(I)$ sarà detta *sostegno* della curva; la variabile $t \in I$ è il *parametro* della curva. Se $I = [a, b]$ e $\sigma(a) = \sigma(b)$, diremo che la curva è *chiusa.*

Osservazione 1.2.1. Se I non è un intervallo aperto, e $k \geq 1$, dire che σ è di classe C^k in I vuol dire che σ si estende a un'applicazione C^k definita in un intervallo aperto contenente propriamente I.

Osservazione 1.2.2. Nel seguito considereremo quasi sempre solo curve di classe C^∞. I pochi casi in cui sarà importante lavorare anche con una regolarità minore verranno indicati esplicitamente.

Definizione 1.2.2: Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe (almeno) C^1. Il vettore $\sigma'(t)$ è il *vettore tangente* alla curva nel punto $\sigma(t)$. Se $\sigma'(t) \neq O$ per ogni $t \in I$ diremo che σ è *regolare.*

Osservazione 1.2.3. Nel caso di una curva $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *chiusa* di classe C^k, diremo che è regolare solo se si ha anche $\sigma'(a) = \sigma'(b)$, $\sigma''(a) = \sigma''(b), \dots, \sigma^{(k)}(a) = \sigma^{(k)}(b)$. In particolare, una curva chiusa regolare si prolunga sempre a un'applicazione $\hat{\sigma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k e *periodica.*

Esempio 1.2.1. Grazie al Teorema 1.1.9, ogni linea è una curva regolare.

Esempio 1.2.2. Dati v_0, $v_1 \in \mathbb{R}^n$ con $v_1 \neq O$, la curva regolare $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ data da $\sigma(t) = v_0 + tv_1$ è la *retta* passante per v_0 nella direzione di v_1.

Esempio 1.2.3. Le due curve σ_1, $\sigma_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ date da

$$\sigma_1(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (x_0 + r\cos 2t, y_0 + r\sin 2t),$$

hanno entrambe come sostegno la *circonferenza* di centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$.

Esempio 1.2.4. La curva $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^*$ è detta *elica circolare* di *raggio* a e *passo* b.

Esempio 1.2.5. La *cuspide* $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ è una curva non regolare.

Esempio 1.2.6. La curva $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\sigma(t) = (t, |t|)$ è una curva continua, ma non è una curva di classe C^1.

In realtà, a noi interessa più il sostegno della curva che la curva stessa. Quindi introduciamo la seguente relazione d'equivalenza:

Definizione 1.2.3: Diremo che due curve $\sigma: I \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\sigma}: \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k sono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $h: \tilde{I} \to I$ di classe C^k tale che $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h$; diremo anche che $\tilde{\sigma}$ è una *riparametrizzazione* di σ, e che h è un *cambiamento di parametro.* Infine, se $h' > 0$ ovunque diremo che σ e $\tilde{\sigma}$ hanno la *stessa orientazione;* altrimenti diremo che hanno *orientazione opposta.*

Osservazione 1.2.4. Per noi, un *diffeomorfismo di classe* C^k è un omeomorfismo h tale che sia h che la sua inversa h^{-1} siano di classe C^k. Per esempio, $h(x) = 2x$ è un diffeomorfismo di classe C^∞ di $\mathbb{R}$ con se stesso, mentre $g(x) = x^3$, pur essendo un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ con se stesso, non è un diffeomorfismo, neppure di classe C^1, perché la funzione inversa $g^{-1}(x) = x^{1/3}$ non è di classe C^1.

Esercizio 1.2.1. Dimostra che quella appena definita è effettivamente una relazione d'equivalenza sull'insieme delle curve di classe C^k.

Data una curva σ, vogliamo trovare un rappresentante più bello degli altri nella sua classe di equivalenza.

Definizione 1.2.4: Sia $I = [a,b]$ un intervallo. Una *partizione* $\mathcal{P}$ di I è una $(k+1)$-upla $(t_0,\dots,t_k)$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Se $\mathcal{P}$ è una partizione di I, poniamo $\|\mathcal{P}\| = \max_j |t_j - t_{j-1}|$.

Definizione 1.2.5: Data una curva $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$, poniamo

$$L(\sigma,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{k} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\|.$$

Diremo che σ è *rettificabile* se il limite

$$L(\sigma) = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} L(\sigma,\mathcal{P})$$

esiste finito. Tale limite verrà chiamato *lunghezza* di σ.

Teorema 1.2.1: *Ogni curva $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 è rettificabile, e si ha*

$$L(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt.$$

Dimostrazione: Essendo σ di classe C^1, l'integrale è finito. Quindi dobbiamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\mathcal{P}$ è una partizione di $[a,b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ allora

$$\left| \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt - L(\sigma,\mathcal{P}) \right| < \varepsilon. \tag{1.2.1}$$

Prima di tutto notiamo che per ogni partizione $\mathcal{P} = (t_0,\dots,t_k)$ e ogni $j = 1,\dots,k$ si ha

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| = \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma'(t)\,dt \right\| \le \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(t)\|\,dt,$$

per cui sommando su j troviamo

$$L(\sigma,\mathcal{P}) \le \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt \tag{1.2.2}$$

quale che sia la partizione $\mathcal{P}$.

Ora, fissato $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuità di σ' sull'intervallo compatto $[a,b]$ ci fornisce un $\delta > 0$ tale che

$$\forall s,t \in [a,b] \qquad |t-s| < \delta \Longrightarrow \|\sigma'(t) - \sigma'(s)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,. \tag{1.2.3}$$

Sia $\mathcal{P} = (t_0,\dots,t_k)$ una partizione di $[a,b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Per ogni $j = 1,\dots,k$ e $s \in [t_{j-1}, t_j]$ abbiamo

$$\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma'(s)\,dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \bigl(\sigma'(t) - \sigma'(s)\bigr)\,dt = (t_j - t_{j-1})\sigma'(s) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \bigl(\sigma'(t) - \sigma'(s)\bigr)\,dt.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| &\ge (t_j - t_{j-1})\|\sigma'(s)\| - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \bigl\|\sigma'(t) - \sigma'(s)\bigr\|\,dt \\ &\ge (t_j - t_{j-1})\|\sigma'(s)\| - \frac{\varepsilon}{b-a}(t_j - t_{j-1}),\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che s, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ implica $|t-s| < \delta$, e quindi possiamo applicare (1.2.3). Dividendo per $t_j - t_{j-1}$ otteniamo

$$\frac{\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\|}{t_j - t_{j-1}} \ge \|\sigma'(s)\| - \frac{\varepsilon}{b-a},$$

da cui integrando rispetto a s su $[t_{j-1}, t_j]$ segue che

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \ge \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\sigma'(s)\|\,ds - \frac{\varepsilon}{b-a}(t_j - t_{j-1}).$$

Sommando su $j = 1,\dots,k$ otteniamo quindi

$$L(\sigma,\mathcal{P}) \ge \int_a^b \|\sigma'(s)\|\,ds - \varepsilon,$$

che insieme alla (1.2.2) ci dà la (1.2.1). $\square$

Osservazione 1.2.5. Due curve equivalenti hanno sempre la stessa lunghezza: infatti, se $\sigma_1 = \sigma \circ h$, dove $h\colon [a_1, b_1] \to [a, b]$ è un cambiamento di parametro, allora

$$L(\sigma_1) = \int_{a_1}^{b_1} \|\sigma_1'(t)\|\, dt = \int_{a_1}^{b_1} \big\|\sigma'\big(h(t)\big)\big\|\, |h'(t)|\, dt = \int_a^b \|\sigma'(\tau)\|\, d\tau = L(\sigma).$$

Quindi la lunghezza di una curva dipende solo dalla sua classe d'equivalenza (ma non solo dal sostegno: le due curve dell'Esempio 1.2.3 ristrette a $[0, 2\pi]$ hanno lunghezze diverse pur avendo lo stesso sostegno. Il problema è causato dal fatto che una delle due curve non è iniettiva).

Il Teorema precedente suggerisce la seguente definizione:

Definizione 1.2.6: Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Fissato $t_0 \in I$, diremo *lunghezza d'arco* di σ (misurata a partire da t_0) la funzione $s\colon I \to \mathbb{R}$ data da

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\sigma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Diremo inoltre che σ è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* se $\|\sigma'\| \equiv 1$, cioè se la lunghezza d'arco coincide col parametro t a meno di una traslazione: $s(t) = t - t_0$.

Osservazione 1.2.6. Nel seguito useremo sempre la lettera s per indicare il parametro lunghezza d'arco, e la lettera t per indicare un parametro qualsiasi. Inoltre, le derivate rispetto al parametro lunghezza d'arco saranno indicate con un punto, mentre le derivate rispetto a un parametro qualsiasi con un apice. Per esempio, scriveremo $\dot{\sigma}$ per $d\sigma/ds$, e σ' per $d\sigma/dt$. La relazione fra $\dot{\sigma}$ e σ' segue facilmente dalla formula di derivazione di funzione composta:

$$\sigma'(t) = \frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{d\sigma}{ds}\big(s(t)\big) \cdot \frac{ds}{dt}(t) = \|\sigma'(t)\|\, \dot{\sigma}\big(s(t)\big).$$

Analogamente

$$\dot{\sigma}(s) = \frac{1}{\big\|\sigma'\big(s^{-1}(s)\big)\big\|}\, \sigma'\big(s^{-1}(s)\big),$$

dove in quest'ultima formula la lettera s indica sia il parametro che la funzione lunghezza d'arco. Come vedrai, l'uso della stessa lettera per indicare questi due concetti diversi non creerà, una volta abituati, alcuna confusione.

Proposizione 1.2.2: *Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Fissato $t_0 \in I$, indichiamo con $s\colon I \to \mathbb{R}$ la lunghezza d'arco di σ misurata a partire da t_0. Allora $\sigma_1 = \sigma \circ s^{-1}$ è (a meno di traslazioni nel parametro) l'unica curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco equivalente a σ e con la sua stessa orientazione.*

Dimostrazione: Il fatto che σ_1 sia una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco equivalente a σ e con la sua stessa orientazione è già stato verificato all'inizio della dimostrazione del Teorema 1.1.9.

Rimane da verificare l'unicità. Sia σ_2 un'altra curva verificante le ipotesi. Essendo equivalente a σ, deve esistere un cambiamento di parametro h tale che $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h$. Essendo sia σ_1 che σ_2 parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco otteniamo $|h'| \equiv 1$; siccome hanno la stessa orientazione deduciamo $h' \equiv 1$, cioè $h(t) = t + c$ per un opportuno $c \in \mathbb{R}$, e quindi σ_2 differisce da σ_1 per una traslazione, come voluto. □

Dunque ogni curva regolare è equivalente a una (essenzialmente unica) curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Per questo motivo, a meno di avviso contrario nel seguito supporremo sempre che *ogni curva regolare sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.*

Definizione 1.2.7: Se la curva σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, il versore $\mathbf{t} = \dot{\sigma}$ sarà detto *versore tangente* alla curva nel punto $\sigma(s)$.

Osservazione 1.2.7. Se σ è una curva regolare con una parametrizzazione qualunque, allora $\mathbf{t} = \sigma'/\|\sigma'\|$.

In un certo senso, la variazione di $\mathbf{t}$ ci dice quanto la curva σ si discosta dall'essere una retta:

Esercizio 1.2.2. Dimostra che il sostegno di una curva regolare $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^n$ è contenuto in una retta se e solo se il versore tangente $\mathbf{t}\colon I \to \mathbb{R}^n$ di σ è costante.

Per questo motivo introduciamo la seguente

Definizione 1.2.8: La *curvatura* di una curva σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è data da

$$\kappa(s) = \|\dot{\mathbf{t}}(s)\| = \|\ddot{\sigma}(s)\|.$$

Diremo che σ è *biregolare* se κ non si annulla mai. In questo caso il *raggio di curvatura* di σ nel punto $\sigma(s)$ è $r(s) = 1/\kappa(s)$.

Esempio 1.2.7. Sia $\sigma: [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$ la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$ data da

$$\sigma(s) = \bigl(r\cos(s/r), r\sin(s/r)\bigr).$$

Si verifica subito che σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e che

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\sigma}(s) = \bigl(-\sin(s/r), \cos(s/r)\bigr).$$

Quindi

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r}\bigl(-\cos(s/r), -\sin(s/r)\bigr),$$

per cui σ ha curvatura costante $1/r$ (e questo è il motivo per cui l'inverso della curvatura si chiama raggio di curvatura).

È ragionevole pensare che se $\kappa(s) \neq 0$ allora il versore $\dot{\mathbf{t}}(s)/\kappa(s)$ contiene informazioni geometriche rilevanti sulla curva; in un certo senso, dice in che direzione si sta piegando la curva.

Ora, il vettore $\dot{\mathbf{t}}$ non può essere qualunque. Infatti, essendo $\mathbf{t}$ un versore, abbiamo

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \equiv 1,$$

e derivando otteniamo

$$(\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t}) \equiv 0.$$

In altre parole, $\dot{\mathbf{t}}$ è sempre ortogonale a $\mathbf{t}$.

Definizione 1.2.9: Sia σ una curva biregolare. Allora il versore $\mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s)/\|\dot{\mathbf{t}}(s)\|$ è detto *versore normale* alla curva nel punto $\sigma(s)$. Il piano passante per $\sigma(s)$ e parallelo a $\mathrm{Span}\bigl(\mathbf{t}(\mathbf{s}), \mathbf{n}(\mathbf{s})\bigr)$ è detto *piano osculatore* alla curva in $\sigma(s)$.

Osservazione 1.2.8. Se $\sigma: I \to \mathbb{R}^2$ è una curva regolare nel piano, per ogni $s \in I$ esiste un unico versore $\mathbf{n}(s)$ ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e tale che la coppia $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ abbia la stessa orientazione della base canonica. Essendo $\dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$, deve esistere $\tilde{\kappa}(s) \in \mathbb{R}$ tale che $\dot{\mathbf{t}}(s) = \tilde{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)$. La funzione $\tilde{\kappa}: I \to \mathbb{R}$ così definita è detta *curvatura orientata* di σ, ed è legata alla curvatura usuale dall'identità $\kappa = |\tilde{\kappa}|$.

Nel resto di questo paragrafo (a parte un esercizio finale) *considereremo soltanto curve nello spazio* $\mathbb{R}^3$ *o nel piano* $\mathbb{R}^2$.

Se il sostegno di una curva regolare è contenuto in un piano, è chiaro (perché?) che il piano osculatore della curva è costante. Questo fa pensare che si possa misurare quanto una curva non è piana vedendo quanto varia il piano osculatore. Siccome un piano (per l'origine in $\mathbb{R}^3$) è completamente determinato dalla sua direzione ortogonale, siamo portati alla seguente

Definizione 1.2.10: Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Il *versore binormale* alla curva in $\sigma(s)$ è dato da $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, dove $\wedge$ indica il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$. La terna $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ di applicazioni a valori in $\mathbb{R}^3$ è detta *riferimento di Frenet* associato alla curva; per ogni $s \in I$ la terna $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, con la stessa orientazione della base canonica di $\mathbb{R}^3$, che varia lungo la curva.

Proposizione 1.2.3: *Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Allora il sostegno di σ è contenuto in un piano se e solo se il versore binormale è costante.*

Dimostrazione: Supponiamo che il sostegno di σ sia contenuto in un piano; in particolare deve esistere un piano π passante per l'origine tale che $\sigma(s) - \sigma(s') \in \pi$ per ogni s, $s' \in I$. Considerando il rapporto incrementale, da questo si deduce subito che $\mathbf{t}(s) \in \pi$ per ogni $s \in I$. In maniera analoga si trova $\dot{\mathbf{t}}(s) \in \pi$

per ogni $s \in I$, e quindi $\mathbf{n}(s) \in \pi$ per ogni $s \in I$. Quindi $\mathbf{b}(s)$ è sempre uno dei due versori normali a π; dovendo variare con continuità, è costante.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{b}$ sia un vettore costante; vogliamo dimostrare che il sostegno di σ è contenuto in un piano. Ora, un piano è determinato da un suo punto e da un versore ortogonale: un punto $p \in \mathbb{R}^3$ appartiene al piano passante per $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e ortogonale al vettore $v \in \mathbb{R}^3$ se e solo se $(p - p_0, v) = 0$. Prendiamo $t_0 \in I$; vogliamo dimostrare che il sostegno di σ è contenuto nel piano passante per $\sigma(t_0)$ e ortogonale a $\mathbf{b}$. Questo equivale a far vedere che

$$\big(\sigma(t), \mathbf{b}\big) \equiv \big(\sigma(t_0), \mathbf{b}\big),$$

ovvero che la funzione $t \mapsto \big(\sigma(t), \mathbf{b}\big)$ è costante. Ma infatti abbiamo

$$\frac{d}{ds}(\sigma, \mathbf{b}) = (\mathbf{t}, \mathbf{b}) \equiv 0,$$

per cui il sostegno di σ è effettivamente contenuto nel piano di equazione $\big(p - \sigma(t_0), \mathbf{b}\big) = 0$. □

Vediamo cosa possiamo dire sulla derivata del versore binormale, derivata che dovrebbe misurare quanto una curva biregolare non è piana. Anche $\mathbf{b}$ è un versore; quindi il ragionamento già fatto per il versore tangente ci dice che anche stavolta $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$. D'altra parte,

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{n}},$$

per cui $\dot{\mathbf{b}}$ è perpendicolare anche a $\mathbf{t}$; quindi $\dot{\mathbf{b}}$ dev'essere un multiplo di $\mathbf{n}$.

Definizione 1.2.11: Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. La *torsione* di σ è la funzione $\tau: I \to \mathbb{R}$ tale che $\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$. (*Attenzione:* in alcuni testi la torsione viene definita come l'opposto della funzione da noi introdotta.)

Possiamo ora calcolare anche la derivata di $\mathbf{n}$:

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \dot{\mathbf{t}} = -\tau \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \kappa \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Definizione 1.2.12: Le tre equazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \\ \dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

sono dette *formule di Frenet-Serret* della curva biregolare σ.

Osservazione 1.2.9. Il riferimento di Frenet dipende dall'orientazione della curva, mentre la curvatura e la torsione no. Più precisamente, se $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ è una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e $\sigma_1(s) = \sigma(-s)$ è una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco equivalente a σ ma con l'orientazione opposta, allora abbiamo $\mathbf{t}_1(s) = -\mathbf{t}(-s)$, $\kappa_1(s) = \kappa(-s)$, $\mathbf{n}_1(s) = \mathbf{n}(-s)$, $\mathbf{b}_1(s) = -\mathbf{b}(-s)$, e $\tau_1(s) = \tau(-s)$, dove l'indice 1 ovviamente identifica gli oggetti e le quantità relative alla curva σ_1.

Osservazione 1.2.10. La curvatura orientata di curve piane dipende invece dall'orientazione della curva. Infatti, con le notazioni dell'osservazione precedente applicate a una curva piana σ, troviamo $\mathbf{t}_1(s) = -\mathbf{t}(-s)$, $\tilde{\kappa}_1(s) = -\tilde{\kappa}(-s)$ e $\mathbf{n}_1(s) = -\mathbf{n}(-s)$.

Osservazione 1.2.11. Ci sono delle formule di Frenet-Serret anche per le curve piane. Siccome, per il solito motivo, $\dot{\mathbf{n}}$ è ortogonale a $\mathbf{n}$, è un multiplo di $\mathbf{t}$. Derivando $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) \equiv 0$ troviamo $(\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}) = -\tilde{\kappa}$, e quindi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \tilde{\kappa} \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = -\tilde{\kappa} \mathbf{t}, \end{cases}$$

sono le formule di Frenet-Serret per le curve piane. Nell'Esercizio 1.2.11 vedremo formule analoghe per curve in $\mathbb{R}^n$.

L'idea di fondo della teoria locale delle curve è che curvatura e torsione determinano completamente una curva. Per esprimere esattamente cosa intendiamo, ci serve una definizione.

Definizione 1.2.13: Un *movimento rigido* di $\mathbb{R}^n$ è un isomorfismo affine $\rho: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ della forma $\rho(x) = Ax + b$, dove $A \in SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I \text{ e } \det A = 1\}$, e $b \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.2.3. Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimento rigido. Dimostra che $\rho \circ \sigma$ è una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con la stessa curvatura e la stessa torsione di σ.

Quindi curvatura e torsione non possono distinguere due curve ottenute l'una dall'altra tramite un movimento rigido; ma questa è l'unica ambiguità. Le formule di Frenet-Serret sono esattamente lo strumento che ci permetterà di dimostrarlo, usando il seguente teorema di Analisi:

Teorema 1.2.4: *Dati un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, un punto $t_0 \in I$, un vettore $u_0 \in \mathbb{R}^n$, e due applicazioni $f: I \to \mathbb{R}^n$ e $A: I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ di classe C^k, con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, esiste un'unica soluzione $u: I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = Au + f, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

In particolare, la soluzione del problema di Cauchy per sistemi *lineari* di equazioni differenziali *ordinarie* esiste su tutto l'intervallo di definizione dei coefficienti.

E quindi:

Teorema 1.2.5: (fondamentale della teoria locale delle curve) *Date due funzioni $\kappa: I \to \mathbb{R}^+$ e $\tau: I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ con $\kappa > 0$ sempre, esiste un'unica (a meno di movimenti rigidi dello spazio) curva $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ e torsione τ.*

Dimostrazione: Cominciamo con l'esistenza. Le formule di Frenet-Serret (1.2.4) sono un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie in 9 incognite, le componenti di $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$, a cui possiamo quindi applicare il Teorema 1.2.4.

Fissiamo allora un punto $s_0 \in I$ e una base ortonormale $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ con la stessa orientazione della base canonica. Per il teorema appena citato, esiste un'unica terna di funzioni $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}: I \to \mathbb{R}^3$ verificanti (1.2.4) e tali che $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0$ e $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0$.

Ora, dalle (1.2.4) ricaviamo che le funzioni $(\mathbf{t}, \mathbf{t})$, $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{t}, \mathbf{b})$, $(\mathbf{n}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ e $(\mathbf{b}, \mathbf{b})$ soddisfano il seguente sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 2\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{n}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = -\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + \tau(\mathbf{t}, \mathbf{b}) + \kappa(\mathbf{n}, \mathbf{n}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{t}, \mathbf{b}) = -\tau(\mathbf{t}, \mathbf{n}) + \kappa(\mathbf{n}, \mathbf{b}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -2\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{n}) + 2\tau(\mathbf{n}, \mathbf{b}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = -\kappa(\mathbf{t}, \mathbf{b}) - \tau(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + \tau(\mathbf{b}, \mathbf{b}), \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = -2\tau(\mathbf{n}, \mathbf{b}), \end{cases}$$

con condizioni iniziali

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t})(s_0) = 1,\ (\mathbf{t}, \mathbf{n})(s_0) = 0,\ (\mathbf{t}, \mathbf{b})(s_0) = 0,\ (\mathbf{n}, \mathbf{n})(s_0) = 1,\ (\mathbf{n}, \mathbf{b})(s_0) = 0,\ (\mathbf{b}, \mathbf{b})(s_0) = 1.$$

Ma si verifica subito che $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \equiv 1$, $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{t}, \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{n}, \mathbf{b}) \equiv 0$ è una soluzione dello stesso sistema di equazioni differenziali soddisfacente le stesse condizioni iniziali in s_0. Quindi è l'unica soluzione, per cui la terna $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è una terna ortonormale per ogni valore di $s \in I$. Ha anche sempre l'orientazione della base canonica di $\mathbb{R}^3$: infatti $(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{b})$ è una funzione continua in I a valori in $\{+1, -1\}$ e vale $+1$ in s_0; quindi $(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{b}) \equiv +1$, come voluto.

Definiamo infine la curva $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(t)\, dt.$$

La curva σ è di classe C^∞ con derivata $\mathbf{t}(s)$, per cui è regolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e con versore tangente $\mathbf{t}$. Siccome le (1.2.4) ci danno $\ddot{\sigma} = \kappa\mathbf{n}$ con $\kappa > 0$ sempre, ne deduciamo che κ è la curvatura e $\mathbf{n}$ il versore normale di σ (che risulta quindi biregolare). Ne segue che $\mathbf{b}$ è il versore binormale e, di nuovo grazie a (1.2.4), τ è la torsione di σ.

Vediamo ora l'unicità. Sia $\sigma_1 \colon I \to \mathbb{R}^3$ un'altra curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ e torsione τ. Fissiamo $s_0 \in I$; a meno di un movimento rigido possiamo supporre che $\sigma(s_0) = \sigma_1(s_0)$ e che σ e σ_1 abbiano lo stesso riferimento di Frenet in s_0. Per l'unicità della soluzione di (1.2.4) ne segue che σ e σ_1 hanno lo stesso riferimento di Frenet in tutti i punti di I; in particolare, $\dot\sigma \equiv \dot\sigma_1$. Ma allora

$$\sigma(s) = \sigma(s_0) + \int_{s_0}^{s} \dot\sigma(t)\, dt = \sigma_1(s_0) + \int_{s_0}^{s} \dot\sigma_1(t)\, dt = \sigma_1(s),$$

e $\sigma_1 \equiv \sigma$. □

Osservazione 1.2.12. In modo assolutamente analogo si dimostra il seguente risultato: *Data una funzione $\tilde\kappa \colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, esiste un'unica (a meno di movimenti rigidi del piano) curva $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^2$ regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura orientata $\tilde\kappa$.*

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi.

Esercizio 1.2.4. Sia $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare con una parametrizzazione qualunque. Dimostra che i versori tangente, normale e binormale, la curvatura e la torsione di σ sono dati dalle formule

$$\mathbf{t} = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\sigma' \wedge \sigma''}{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\sigma' \wedge \sigma'') \wedge \sigma'}{\|\sigma' \wedge \sigma''\|\,\|\sigma'\|}, \quad \kappa = \frac{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\sigma' \wedge \sigma'', \sigma''')}{\|\sigma' \wedge \sigma''\|^2}.$$

Esercizio 1.2.5. Sia $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, e scriviamo $\sigma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, dove t è un parametro qualunque. Dimostra che la curvatura orientata di σ è data da

$$\tilde\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{\big((x')^2 + (y')^2\big)^{3/2}}.$$

Esercizio 1.2.6. Sia $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, e supponiamo sia data in coordinate polari dall'equazione $r = \rho(\theta)$ per un'opportuna funzione ρ. Dimostra che la lunghezza d'arco di σ è data da

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta,$$

e che la sua curvatura orientata è

$$\tilde\kappa = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{\big(\rho^2 + (\rho')^2\big)^{3/2}}.$$

Esercizio 1.2.7. Dimostra che ogni curva piana regolare con curvatura orientata costante è un arco di circonferenza (o un segmento se $\tilde\kappa \equiv 0$).

Esercizio 1.2.8. Sia $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare e $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $F \circ \sigma \equiv 0$. Dimostra che per ogni $t \in I$ il vettore tangente $\sigma'(t)$ è ortogonale al gradiente di F calcolato in $\sigma(t)$.

Esercizio 1.2.9. Sia $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Dimostra che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) esiste un vettore $v \in S^2$ e una costante $a_0 \in \mathbb{R}$ tali che $(\mathbf{t}, v) \equiv a_0$;
(ii) esiste un piano per l'origine π tale che $\mathbf{n}(s) \in \pi$ per ogni $s \in I$;
(iii) esistono due costanti a, $b \in \mathbb{R}$ non entrambe nulle tali che $a\kappa + b\tau \equiv 0$.

Una curva soddisfacente una qualsiasi di queste condizioni si chiama *elica*. Dimostra che ogni elica ammette una parametrizzazione della forma $\sigma(t) = \gamma(t) + (t - t_0)v$, dove γ è una curva piana parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e v è un vettore ortogonale al piano contenente γ.

Esercizio 1.2.10. Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con curvatura κ e torsione τ. Supponiamo che $\tau(s)$, $\dot\kappa(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostra che il sostegno di σ è contenuto nella sfera unitaria S^2 se e solo se

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\dot\kappa}{\tau\kappa^2}\right)^2 \equiv 1.$$

(*Suggerimento:* per dimostrare la sufficienza della condizione, fai vedere che l'applicazione

$$\beta = \sigma + (1/\kappa)\mathbf{n} - (\dot\kappa/\tau\kappa^2)\mathbf{b}$$

è costante.)

Esercizio 1.2.11. In questo esercizio vogliamo derivare delle formule di Frenet per curve in $\mathbb{R}^n$; il tuo compito è sistemare i dettagli del ragionamento. Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e poniamo $\mathbf{t}_1 = \dot\sigma$. Se σ è biregolare, per il solito motivo esistono un versore $\mathbf{t}_2$ ortogonale a $\mathbf{t}_1$ e un $\kappa_1 > 0$ tali che $\dot{\mathbf{t}}_1 = \kappa_1\mathbf{t}_2$. Ora, $\dot{\mathbf{t}}_2$ è ortogonale a $\mathbf{t}_2$, e $(\mathbf{t}_1, \dot{\mathbf{t}}_2) = -\kappa_1$. Se supponiamo che $\dot{\mathbf{t}}_2$ non sia parallelo a $\mathbf{t}_1$ (ovvero che non sia contenuto nel piano generato da $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$, e diremo che σ è *3-regolare*), allora possiamo trovare un versore $\mathbf{t}_3$ ortogonale a $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$, e un $\kappa_2 > 0$ tali che $\dot{\mathbf{t}}_2 = -\kappa_1\mathbf{t}_1 + \kappa_2\mathbf{t}_3$. Proseguiamo. Il vettore $\dot{\mathbf{t}}_3$ è ortogonale a $\mathbf{t}_3$ e a $\mathbf{t}_1$, e $(\mathbf{t}_2, \dot{\mathbf{t}}_3) = -\kappa_2$. Se $\dot{\mathbf{t}}_3$ non è parallelo a $\mathbf{t}_2$ (e quindi non è contenuto nel sottospazio generato da $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$, e diremo che σ è *4-regolare*), possiamo trovare $\kappa_3 > 0$ e un versore $\mathbf{t}_4$ ortogonale a $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ tale che $\dot{\mathbf{t}}_3 = -\kappa_2\mathbf{t}_2 + \kappa_3\mathbf{t}_4$. Continuando in questo modo arriveremo ad avere $n-1$ versori $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$ ortogonali a due a due, e $n-2$ funzioni positive $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2}$ tali che

$$\dot{\mathbf{t}}_j = -\kappa_{j-1}\mathbf{t}_{j-1} + \kappa_j\mathbf{t}_{j+1}$$

per $j = 1, \ldots, n-2$ (dove $\kappa_0 \equiv 0$). A questo punto esiste un unico versore $\mathbf{t}_n$ tale che $\{\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con la stessa orientazione della base canonica. Se supponiamo che $\dot{\mathbf{t}}_{n-1}$ non sia contenuto nel sottospazio generato da $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$ (e quindi che la curva sia $(n-1)$-*regolare*), troviamo un κ_{n-1} non necessariamente positivo tale che

$$\dot{\mathbf{t}}_{n-1} = -\kappa_{n-2}\mathbf{t}_{n-2} + \kappa_{n-1}\mathbf{t}_n \qquad \text{e} \qquad \dot{\mathbf{t}}_n = -\kappa_{n-1}\mathbf{t}_{n-1}.$$

La funzione κ_j è chiamata *curvatura j-esima* della curva σ. Dimostra infine, sulla falsariga del Teorema 1.2.5, che le curvature j-esime determinano univocamente la curva $(n-1)$-regolare σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^n$.

1.3 Teorema di Jordan per curve regolari

I prossimi due paragrafi sono dedicati a risultati di teoria globale delle curve piane, cioè a risultati che mescolano la geometria differenziale delle curve con proprietà (topologiche o d'altro genere) del loro sostegno preso tutto assieme.

Cominciamo con una definizione.

Definizione 1.3.1: Una curva $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è detta *semplice* se σ è iniettiva su $[a, b)$ e su $(a, b]$. Una curva continua semplice chiusa nel piano è detta *curva di Jordan.*

Il Teorema della curva di Jordan dice che una curva continua semplice chiusa divide il piano in esattamente due componenti connesse, di cui è bordo. Vogliamo ora esporre una dimostrazione di questo risultato per curve regolari (in particolare differenziabili).

Osservazione 1.3.1. In questo paragrafo sarà sufficiente supporre che le curve regolari siano di classe C^2, non necessariamente di classe C^∞.

Come vedremo, per la dimostrazione ci serviranno due ingredienti: l'intorno tubolare di una curva (per dimostrare che il complementare di una curva di Jordan ha al più due componenti connesse), e l'indice di avvolgimento (per dimostrare che il complementare di una curva di Jordan ha almeno due componenti connesse).

Cominciamo ricordando un classico teorema di Analisi, e un noto teorema di Topologia:

Teorema 1.3.1: (della funzione inversa) *Sia $F:\Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k, con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $p_0 \in \Omega$ tale che*

$$\det \mathrm{Jac}\, F(p_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno $U \subset \Omega$ di p_0 e un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di $F(p_0)$ tale che $F|_U: U \to V$ sia un diffeomorfismo con inversa di classe C^k.

Teorema 1.3.2: (Numero di Lebesgue) *Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di uno spazio metrico compatto X. Allora esiste un numero $\delta > 0$, detto numero di Lebesgue del ricoprimento $\mathfrak{U}$, tale che per ogni $x \in X$ esiste $\alpha \in A$ tale che $B(x, \delta) \subset U_\alpha$.*

Dimostrazione: Sia $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un sottoricoprimento finito di $\mathfrak{U}$, e per $j = 1, \ldots, n$ definiamo la funzione continua $f_j: X \to \mathbb{R}$ tramite $f_j(x) = d(x, X \setminus U_j)$. Infine poniamo $f = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$. La funzione f è continua; inoltre, se $x \in X$ deve esistere un $1 \leq j \leq n$ tale che $x \in U_j$, per cui $f(x) \geq f_j(x) > 0$. Dunque $f > 0$ sempre; sia $\delta > 0$ il minimo di f in X. Ma allora per ogni $x \in X$ deve esistere $1 \leq j \leq n$ tale che $f_j(x) \geq \delta$, per cui la palla aperta di centro x e raggio δ è tutta contenuta in U_j, come voluto. □

Definizione 1.3.2: Sia $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare nel piano, di sostegno $C = \sigma([a, b])$; se σ non è chiusa, porremo inoltre $C^o = \sigma\bigl((a, b)\bigr)$. Se $\mathbf{n}(t)$ è il versore normale a σ in $\sigma(t) = p \in C$, ed $\varepsilon > 0$, indichiamo con $I_\sigma(p, \varepsilon)$ il segmento $\sigma(t) + (-\varepsilon, \varepsilon)\mathbf{n}(t)$ di lunghezza 2ε centrato in p e ortogonale a σ. Indichiamo inoltre con $N_\sigma(\varepsilon)$ l'unione dei segmenti $I_\sigma(p, \varepsilon)$, al variare di $p \in C^o$ se σ non è chiusa, e al variare di $p \in C$ se σ è chiusa.

Teorema 1.3.3: (Esistenza dell'intorno tubolare) *Sia $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice di classe C^2. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $I_\sigma(p_1, \varepsilon_0) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon_0) = \varnothing$ per ogni $p_1 \neq p_2 \in C = \sigma([a, b])$. Inoltre, se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ l'insieme $N_\sigma(\varepsilon)$ è un intorno aperto del sostegno di σ (esclusi gli estremi se la curva non è chiusa).*

Dimostrazione: Prima di tutto ricordiamo che dire che la curva σ è di classe C^2 in $[a, b]$ vuol dire che si estende a un'applicazione di classe C^2 in un intorno aperto I di $[a, b]$. In particolare, se σ è chiusa la possiamo estendere a un'applicazione periodica di classe C^2 definita su tutto $\mathbb{R}$.

Cominciamo col dimostrare l'esistenza locale dell'intorno tubolare. Sia $F: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$F(t, x) = \sigma(t) + x\mathbf{n}(t), \tag{1.3.1}$$

in modo che $N_\sigma(\varepsilon) = F\bigl([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)\bigr)$ se σ è chiusa, e $N_\sigma(\varepsilon) = F\bigl((a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon)\bigr)$ se σ non è chiusa. Trattandosi di una curva nel piano, la regolarità del versore normale $\mathbf{n}$ è uguale alla regolarità del versore tangente $\mathbf{t}$, che è di classe C^1; quindi l'applicazione F è di classe C^1. Ora, il determinante jacobiano di F in $(t, 0)$ è

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_1'(t) & \sigma_2'(t) \\ \mathbf{n}_1(t) & \mathbf{n}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Fissato $t_0 \in [a, b]$, il Teorema della funzione inversa ci assicura che esistono δ_{t_0}, $\varepsilon_{t_0} > 0$ tali che F ristretta a $(t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}) \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})$ sia invertibile; e questo vuol dire esattamente che $I_\sigma(p_1, \varepsilon_{t_0}) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon_{t_0}) = \varnothing$ per ogni $p_1 = \sigma(t_1) \neq \sigma(t_2) = p_2$ con t_1, $t_2 \in (t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}) = U_{t_0}$. Inoltre, siccome F ristretta a $U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})$ è iniettiva e ha immagine aperta, otteniamo che $\sigma(U_{t_0}) = F\bigl(U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})\bigr) \cap C$ è un aperto di C.

Abbiamo quindi un ricoprimento aperto $\{U_t\}_{t \in [a,b]}$ di $[a, b]$, che è un insieme compatto; estraiamo un sottoricoprimento finito $\{U_{t_1}, \ldots, U_{t_r}\}$. Allora $\mathfrak{U} = \{\sigma(U_{t_1}), \ldots, \sigma(U_{t_r})\}$ è un ricoprimento aperto del sostegno C di σ, che è compatto; sia $\delta > 0$ il numero di Lebesgue di $\mathfrak{U}$. Allora $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{t_1}, \ldots, \varepsilon_{t_k}, \delta/2\}$ è come voluto. Infatti, prendiamo p, $q \in C$ distinti e supponiamo che esista $p_0 \in I_\sigma(p, \varepsilon_0) \cap I_\sigma(q, \varepsilon_0)$. La disuguaglianza triangolare ci dice allora che

$$\|p - q\| \leq \|p - p_0\| + \|p_0 - q\| < 2\varepsilon_0 < \delta,$$

per cui p e q devono appartenere a uno stesso $\sigma(U_{t_j})$. Ma allora $I_\sigma(p, \varepsilon_0) \cap I_\sigma(q, \varepsilon_0) \neq \varnothing$ implica $p = q$, contraddizione, e ci siamo.

In particolare, abbiamo dimostrato che F è globalmente iniettiva su $(a, b) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, e che la sua immagine $N_\sigma(\varepsilon_0)$ è un intorno aperto di $\sigma\bigl((a, b)\bigr)$. Se la curva è chiusa, lo stesso ragionamento ci dice che $N_\sigma(\varepsilon_0)$ è un intorno aperto di tutto il sostegno della curva. □

Definizione 1.3.3: Sia $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice, e sia $\varepsilon_0 > 0$ dato dal teorema precedente. Allora per ogni $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ l'insieme $N_\sigma(\varepsilon)$ è detto *intorno tubolare* di *raggio* ε della curva σ.

Osservazione 1.3.2. Se $q \in N_\sigma(\varepsilon)$, allora il punto $p_0 = \sigma(t_0)$ del sostegno C di σ più vicino a q è l'unico punto $p \in C$ per cui $q \in I_\sigma(p, \varepsilon)$. Infatti, se $t \mapsto \|q - \sigma(t)\|^2$ ha un minimo in t_0, allora derivando troviamo $\bigl(q - \sigma(t_0), \sigma'(t_0)\bigr) = 0$, e quindi $q \in I_\sigma(p_0, \varepsilon)$.

Esempio 1.3.1. Fissato $2 < \alpha < 3$, sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva data da $\sigma(t) = \bigl(t, f(t)\bigr)$, dove $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^\alpha \sin \frac{1}{t} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \le 0. \end{cases}$$

Siccome

$$\frac{d}{dt}\left(t^\alpha \sin \frac{1}{t}\right) = \alpha t^{\alpha-1} \sin \frac{1}{t} - t^{\alpha-2} \cos \frac{1}{t},$$

la funzione f e la curva σ sono di classe C^1, ma non di classe C^2; vogliamo far vedere che σ (ristretta a un qualsiasi intervallo chiuso contenente l'origine) non ha un intorno tubolare. Prima di tutto, è facile vedere che

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\left(t^{\alpha-1}\left(\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t} - \alpha \sin\frac{1}{t}\right), 1\right)}{\sqrt{1 + t^{2(\alpha-1)}\left(\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t} - \alpha\sin\frac{1}{t}\right)^2}}$$

per $t \ge 0$, e $\mathbf{n}(t) = (0, 1)$ per $t \le 0$. Se la curva σ avesse un intorno tubolare, dovrebbe esistere un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $t > 0$ abbastanza piccolo il segmento che va da $\sigma(t)$ all'asse delle y parallelamente a $\mathbf{n}(t)$ ha lunghezza almeno ε. Ma la lunghezza di questo segmento è

$$\ell(t) = t^{3-\alpha} \frac{\sqrt{1 + t^{2(\alpha-1)}\left(\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t} - \alpha\sin\frac{1}{t}\right)^2}}{\left|\cos\frac{1}{t} - \alpha\sin\frac{1}{t}\right|},$$

e per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un valore di t arbitrariamente vicino a zero per cui $\ell(t) < \varepsilon$, contraddizione.

Per introdurre il secondo ingrediente, l'indice di avvolgimento, ricordo alcuni fatti di topologia algebrica elementare.

Definizione 1.3.4: Indichiamo con $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ il rivestimento universale $\pi(t) = (\cos t, \sin t)$. Se $\phi\colon X \to S^1$ è un'applicazione continua da uno spazio topologico X a valori in S^1, un *sollevamento* di ϕ è un'applicazione continua $\tilde\phi\colon X \to \mathbb{R}$ tale che $\pi \circ \tilde\phi = \phi$.

Definizione 1.3.5: Siano ϕ_0, $\phi_1\colon X \to Y$ due applicazioni continue fra spazi topologici. Un'*omotopia* fra ϕ_0 e ϕ_1 è un'applicazione continua $\Phi\colon [0,1] \times X \to Y$ tale che $\Phi(0, \cdot) \equiv \phi_0$ e $\Phi(1, \cdot) \equiv \phi_1$. Se esiste un'omotopia fra ϕ_0 e ϕ_1, diremo che ϕ_0 e ϕ_1 sono *omotope*. Se $X = [a,b]$ è un intervallo della retta reale e ϕ_0 e ϕ_1 sono chiuse, cioè $\phi_0(a) = \phi_0(b)$ e $\phi_1(a) = \phi_1(b)$, allora richiederemo sempre che l'omotopia Φ sia *di curve chiuse*, cioè $\Phi(\cdot, a) \equiv \Phi(\cdot, b)$.

Ci servirà il seguente teorema di Topologia Algebrica:

Teorema 1.3.4: (i) *Sia $\phi\colon [a,b] \to S^1$ una curva continua, e $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\pi(t_0) = \phi(a)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ di ϕ tale che $\tilde\phi(a) = t_0$.*

(ii) *Sia $\Phi\colon [0,1] \times [a,b] \to S^1$ un'applicazione continua in S^1, e $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\pi(t_0) = \Phi(0, a)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde\Phi\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ di Φ tale che $\tilde\Phi(0, a) = t_0$.*

(iii) *Più in generale, se X è uno spazio topologico semplicemente connesso, $\phi\colon X \to S^1$ è un'applicazione continua, $x_0 \in X$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $\pi(t_0) = \phi(x_0)$, allora esiste un unico sollevamento $\tilde\phi\colon X \to \mathbb{R}$ di ϕ tale che $\tilde\phi(x_0) = t_0$.*

(iv) *Se $\tilde\phi_1$ e $\tilde\phi_2$ sono due sollevamenti di un'applicazione continua $\phi\colon X \to S^1$, dove X è uno spazio topologico connesso, allora esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\tilde\phi_2 - \tilde\phi_1 \equiv 2k\pi$.*

(v) *Se $\phi_0\colon [a,b] \to S^1$ è una curva continua non surgettiva, allora ϕ_0 è omotopa alla curva costante $\phi_1(t) \equiv (1, 0)$.*

Possiamo allora introdurre la seguente

Definizione 1.3.6: Sia $\phi\colon[0,l]\to S^1$ una curva continua chiusa. Se $\tilde\phi\colon[0,l]\to\mathbb{R}$ è un sollevamento di ϕ, allora il *grado* di ϕ è il numero

$$\deg\phi=\frac{1}{2\pi}\bigl(\tilde\phi(l)-\tilde\phi(0)\bigr)\in\mathbb{Z}.$$

Nota che $\deg\phi$ è necessariamente un numero intero, in quanto $\pi\bigl(\tilde\phi(l)\bigr)=\phi(l)=\phi(0)=\pi\bigl(\tilde\phi(0)\bigr)$.

In parole povere, il grado è il numero di giri fatti da ϕ prima di chiudersi. È facile verificare che il grado di ϕ non dipende dal sollevamento scelto, in quanto due sollevamenti diversi differiscono per una costante additiva, grazie al Teorema 1.3.4.(iv). In particolare, una curva costante ha grado zero, in quanto ogni suo sollevamento è costante.

La proprietà principale del grado è:

Proposizione 1.3.5: *Siano ϕ_0, $\phi_1\colon[0,l]\to S^1$ due curve chiuse omotope. Allora*

$$\deg\phi_0=\deg\phi_1.$$

In particolare, se ϕ_0 è omotopa a una costante allora $\deg\phi_0=0$.

Dimostrazione: Sia $\Phi\colon[0,1]\times[0,l]\to S^1$ un'omotopia di curve chiuse fra ϕ_0 e ϕ_1, e poniamo $\phi_s(t)=\Phi(s,t)$; in particolare, tutte le ϕ_s sono curve chiuse. Solleviamo Φ a una $\tilde\Phi\colon[0,1]\times[0,l]\to\mathbb{R}$. Siccome le ϕ_s sono chiuse, $\tilde\Phi(s,0)-\tilde\Phi(s,l)\in 2\pi\mathbb{Z}$ per ogni $s\in[0,1]$. Ma allora $s\mapsto\tilde\Phi(s,0)-\tilde\Phi(s,l)$ è una funzione continua a valori in uno spazio totalmente sconnesso; quindi è necessariamente costante, e

$$2\pi\deg\phi_0=\tilde\Phi(0,0)-\tilde\Phi(0,l)=\tilde\Phi(1,0)-\tilde\Phi(1,l)=2\pi\deg\phi_1.$$

□

Se $\phi\colon[0,l]\to S^1\subset\mathbb{R}^2$ è differenziabile possiamo dare una formula integrale per il sollevamento e il calcolo del grado:

Proposizione 1.3.6: *Sia $\phi=(\phi_1,\phi_2)\colon[0,l]\to S^1$ una curva di classe C^1, e scegliamo $x_0\in\mathbb{R}$ in modo che $\phi(0)=(\cos x_0,\sin x_0)$. Allora la funzione $\tilde\phi\colon[0,l]\to\mathbb{R}$ data da*

$$\tilde\phi(t)=x_0+\int_0^t(\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2)\,ds$$

è il sollevamento di ϕ tale che $\tilde\phi(0)=x_0$.

Dimostrazione: Dobbiamo far vedere che $\cos\tilde\phi\equiv\phi_1$ e $\sin\tilde\phi\equiv\phi_2$, cioè che

$$0\equiv(\phi_1-\cos\tilde\phi)^2+(\phi_2-\sin\tilde\phi)^2=2-2(\phi_1\cos\tilde\phi+\phi_2\sin\tilde\phi),$$

per cui basta verificare che

$$\phi_1\cos\tilde\phi+\phi_2\sin\tilde\phi\equiv1.$$

Questa eguaglianza è vera per $t=0$; quindi basta controllare che la derivata di $\phi_1\cos\tilde\phi+\phi_2\sin\tilde\phi$ sia identicamente nulla. Ma infatti, derivando $\phi_1^2+\phi_2^2\equiv1$ otteniamo

$$\phi_1\phi_1'+\phi_2\phi_2'\equiv0,\tag{1.3.2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}(\phi_1\cos\tilde\phi+\phi_2\sin\tilde\phi)'&=\phi_1'\cos\tilde\phi-\tilde\phi'\phi_1\sin\tilde\phi+\phi_2'\sin\tilde\phi+\tilde\phi'\phi_2\cos\tilde\phi\\&=(\phi_1'+\phi_1\phi_2\phi_2'-\phi_1'\phi_2^2)\cos\tilde\phi+(\phi_2'+\phi_2\phi_1\phi_1'-\phi_2'\phi_1^2)\sin\tilde\phi\\&=\phi_1'(1-\phi_1^2-\phi_2^2)\cos\tilde\phi+\phi_2'(1-\phi_2^2-\phi_1^2)\sin\tilde\phi\\&\equiv0.\end{aligned}$$

□

Corollario 1.3.7: *Sia $\phi = (\phi_1, \phi_2)\colon [0,l] \to S^1$ una curva chiusa di classe C^1. Allora*

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^l (\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2)\, dt.$$

Dimostrazione: Segue dalla proposizione precedente e dalla definizione di grado. □

Se identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ la formula precedente ha un'espressione anche più compatta:

Corollario 1.3.8: *Sia $\phi\colon [0,l] \to S^1 \subset \mathbb{C}$ una curva chiusa di classe C^1. Allora*

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\phi'}{\phi}\, dt.$$

Dimostrazione: Siccome ϕ è a valori in S^1, si ha $1/\phi = \overline{\phi}$, dove $\overline{\phi}$ è il complesso coniugato di ϕ. Scrivendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ abbiamo

$$\phi'\overline{\phi} = (\phi_1 \phi_1' + \phi_2 \phi_2') + i(\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2) = i(\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2),$$

grazie a (1.3.2), e la tesi segue dal corollario precedente. □

Data una curva chiusa continua nel piano, ci sono (almeno) due modi per associarvi una curva a valori in S^1, e quindi un grado. In questo paragrafo ci interessa il primo modo, mentre nel prossimo paragrafo useremo il secondo.

Definizione 1.3.7: Sia $\sigma\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ una curva continua chiusa piana. Scelto un punto $p \notin \sigma([0,l])$ possiamo definire $\phi_p\colon [0,l] \to S^1$ ponendo

$$\phi_p(t) = \frac{\sigma(t) - p}{\|\sigma(t) - p\|}.$$

L'*indice di avvolgimento* di σ relativamente a p è allora definito come $\iota_p(\sigma) = \deg \phi_p$; misura il numero di volte che σ ruota intorno a p.

Le proprietà principali dell'indice di avvolgimento sono contenute nel

Lemma 1.3.9: *Sia $\sigma\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa continua piana, e sia C una componente connessa dell'aperto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \sigma([0,l])$. Allora:*

(i) *$\iota_{p_0}(\sigma) = \iota_{p_1}(\sigma)$ per ogni coppia di punti p_0, $p_1 \in C$;*
(ii) *se C è la componente connessa illimitata di U allora $\iota_p(\sigma) = 0$ per ogni $p \in C$.*

Dimostrazione: (i) Sia $\alpha\colon [0,1] \to C$ una curva con $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$, e definiamo $\Phi\colon [0,1] \times [0,l] \to S^1$ ponendo

$$\Phi(s,t) = \frac{\sigma(t) - \alpha(s)}{\|\sigma(t) - \alpha(s)\|}.$$

La mappa Φ è un'omotopia di curve chiuse fra ϕ_{p_0} e ϕ_{p_1}, e quindi $\iota_{p_0}(\sigma) = \iota_{p_1}(\sigma)$.

(ii) Siccome $[0,l]$ è compatto, il sostegno di σ è contenuto in un disco chiuso D di centro l'origine e raggio $R > 0$ abbastanza grande (e, in particolare, esiste una sola componente connessa illimitata di U). Sia $p_0 \in C \setminus D$; allora le linee congiungenti p_0 a punti del sostegno di σ sono tutte contenute nel settore di vertice p_0 e lati le semirette per p_0 tangenti a D. Questo vuol dire che l'immagine di ϕ_{p_0} è contenuta in un sottoinsieme proprio di S^1, e quindi ϕ_{p_0} è omotopa a una curva costante. Siccome il grado di una curva costante è nullo, otteniamo $\iota_{p_0}(\sigma) = 0$. □

Nel caso di curve differenziabili, il Corollario 1.3.8 fornisce una formula integrale per il calcolo dell'indice di avvolgimento:

Lemma 1.3.10: *Sia $\sigma\colon[0,l]\to\mathbb{C}$ una curva di classe C^1 chiusa piana, e $p_0\notin C=\sigma([0,l])$. Allora l'indice di avvolgimento di σ relativamente a p_0 è dato da*

$$\iota_{p_0}(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{z-p_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^l\frac{\sigma'}{\sigma-p_0}\,dt.$$

Dimostrazione: Poniamo $\phi=(\sigma-p_0)/\|\sigma-p_0\|$. Un veloce conto mostra che

$$\frac{\phi'}{\phi}=i\,\mathrm{Im}\,\frac{\sigma'}{\sigma-p_0};$$

quindi per avere la tesi basta dimostrare che l'integrale della parte reale di $\sigma'/(\sigma-p_0)$ è nullo. Ma infatti

$$\frac{d}{dt}\log\|\sigma(t)-p_0\|=\mathrm{Re}\,\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)-p_0},$$

e quindi

$$\int_0^l\mathrm{Re}\,\frac{\sigma'}{\sigma-p_0}\,dt=\log\|\sigma(l)-p_0\|-\log\|\sigma(0)-p_0\|=0.$$

□

Abbiamo quanto serve per dimostrare il

Teorema 1.3.11: (di Jordan per curve regolari) *Sia $\sigma\colon[0,l]\to\mathbb{R}^2$ una curva piana, regolare, chiusa e semplice, di classe C^2, e indichiamo con $C=\sigma([0,l])$ il suo sostegno. Allora $\mathbb{R}^2\setminus C$ ha esattamente due componenti connesse, e C è la loro frontiera comune.*

Dimostrazione: Scegliamo $\varepsilon>0$ in modo che $N_\sigma(\varepsilon)$ sia un intorno tubolare di σ. Indichiamo con T_+ (rispettivamente, T_-) l'insieme dei punti di $N_\sigma(\varepsilon)$ della forma $\sigma(t)+\delta\mathbf{n}(t)$ con $\delta>0$ (rispettivamente, $\delta<0$). È chiaro che $N_\sigma(\varepsilon)\setminus C=T_+\cup T_-$. Inoltre, sia T_+ che T_- sono connessi. Infatti, dati $\sigma(t_1)+\delta_1\mathbf{n}(t_1)$, $\sigma(t_2)+\delta_2\mathbf{n}(t_2)\in T_+$, il cammino che partendo da $\sigma(t_1)+\delta_1\mathbf{n}(t_1)$ si muove prima parallelamente a σ fino a raggiungere $\sigma(t_2)+\delta_1\mathbf{n}(t_2)$ e poi parallelamente a $\mathbf{n}(t_2)$ fino a raggiungere $\sigma(t_2)+\delta_2\mathbf{n}(t_2)$ è tutto contenuto in T_+; e in modo analogo si dimostra che T_- è connesso.

Dimostriamo prima di tutto che $\mathbb{R}^2\setminus C$ ha al massimo due componenti connesse. Infatti, sia K una componente connessa di $\mathbb{R}^2\setminus C$; chiaramente $\varnothing\neq\partial K\subseteq C$. D'altra parte, se $p\in C$ esiste un intorno di p contenente solo punti di C, di T_+ e di T_-. Quindi o T_+ o T_- (o entrambi) intersecano K; essendo connessi, abbiamo che $K\supset T_+$ oppure $K\supset T_-$, e in particolare $\partial K\supseteq C$. Ne segue che ci sono al massimo due componenti connesse del complementare del sostegno di σ, e che il loro bordo coincide con C.

Per dimostrare invece che ci sono almeno due componenti connesse del complementare di C, scegliamo $t_0\in(0,l)$, e per $0\le|\delta|<\varepsilon$ poniamo $p_\delta=\sigma(t_0)+\delta\mathbf{n}(t_0)$. Chiaramente, $p_\delta\in T_+$ (rispettivamente $p_\delta\in T_-$) se $\delta>0$ (rispettivamente, $\delta<0$); quindi, essendo $T_\pm$ connessi, il valore di $\iota_{p_\delta}(\sigma)$ dipende solo dal segno di δ. In particolare, il numero intero

$$\Delta=\iota_{p_\delta}(\sigma)-\iota_{p_{-\delta}}(\sigma)$$

è indipendente da $\delta>0$. Dunque per concludere la dimostrazione ci basta far vedere che $\Delta\neq0$; infatti in tal caso il Lemma 1.3.9 ci dice che necessariamente p_δ e $p_{-\delta}$ devono appartenere a componenti connesse distinte di $\mathbb{R}^2\setminus C$.

Ora, identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, e supponiamo σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Allora il versore normale di σ si ottiene ruotando $\dot\sigma$ di $\pi/2$ radianti, operazione che nel campo complesso equivale a moltiplicare per i, per cui possiamo scrivere $\mathbf{n}=i\dot\sigma$. Dunque per ogni $\delta>0$ otteniamo

$$\left(\frac{1}{\sigma(t)-p_\delta}-\frac{1}{\sigma(t)-p_{-\delta}}\right)\dot\sigma(t)=\frac{2i\delta\dot\sigma(t_0)\dot\sigma(t)}{\bigl(\sigma(t)-\sigma(t_0)\bigr)^2+\delta^2\dot\sigma(t_0)^2}.$$

Siccome σ è di classe C^1 e $\dot\sigma(t_0)\neq 0$, possiamo scrivere $\sigma(t)-\sigma(t_0)=(t-t_0)\dot\sigma(t_0)[1+r(t)]$, dove $r(t)\to 0$ quando $t\to t_0$. Quindi

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sigma(t)-p_\delta}-\frac{1}{\sigma(t)-p_{-\delta}}\right)\dot\sigma(t) &= \frac{2i\delta}{(t-t_0)^2[1+r(t)]^2+\delta^2}\,\frac{\dot\sigma(t)}{\dot\sigma(t_0)}\\ &= \frac{2i\delta}{(t-t_0)^2+\delta^2}\,\frac{(t-t_0)^2+\delta^2}{(t-t_0)^2[1+r(t)]^2+\delta^2}\left[1+\frac{\dot\sigma(t)-\dot\sigma(t_0)}{\dot\sigma(t_0)}\right]\\ &= \frac{2i\delta}{(t-t_0)^2+\delta^2}+R(t),\end{aligned}$$

con

$$R(t)=\frac{2i\delta}{(t-t_0)^2+\delta^2}\left[s(t)-r(t)\bigl(2+r(t)\bigr)\bigl(1+s(t)\bigr)\frac{(t-t_0)^2}{(t-t_0)^2[1+r(t)]^2+\delta^2}\right],$$

dove $s(t)=\bigl(\dot\sigma(t)-\dot\sigma(t_0)\bigr)/\dot\sigma(t_0)\to 0$ per $t\to t_0$. In particolare, per ogni $\eta>0$ esiste $\lambda>0$ (indipendente da δ) tale che

$$|R(t)|<\eta\,\frac{2\delta}{(t-t_0)^2+\delta^2}$$

non appena $|t-t_0|<\lambda$. Fissato $0<\eta<1/6$, prendiamo il $\lambda>0$ corrispondente e indichiamo con $\hat C$ la parte di C parametrizzata da σ ristretta a $|t-t_0|>\lambda$. Possiamo allora scrivere

$$\Delta=\iota_{p_\delta}(\sigma)-\iota_{p_{-\delta}}(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat C}\left(\frac{1}{z-p_\delta}-\frac{1}{z-p_{-\delta}}\right)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda}\left(\frac{2i\delta}{(t-t_0)^2+\delta^2}+R(t)\right)dt.$$

Per quanto osservato prima, Δ è un numero intero indipendente da δ. Facciamo allora tendere δ a zero nel secondo membro. Il primo integrale converge a zero, in quanto l'integrando non ha singolarità in $\hat C$. Per il secondo integrale, tramite il cambiamento di variabile $t-t_0=\delta s$ vediamo prima di tutto che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda}\frac{2i\delta}{(t-t_0)^2+\delta^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\lambda/\delta}^{\lambda/\delta}\frac{1}{1+s^2}\,ds\to\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+s^2}\,ds=1$$

per $\delta\to 0$. Inoltre,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda}R(t)\,dt\right|<\frac{\eta}{\pi}\int_{-\lambda/\delta}^{\lambda/\delta}\frac{1}{1+s^2}\,ds\le\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+s^2}\,ds=\eta.$$

Mettendo tutto questo insieme otteniamo quindi che prendendo δ abbastanza piccolo possiamo stimare

$$|\Delta-1|\le\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\hat C}\left(\frac{1}{z-p_\delta}-\frac{1}{z-p_{-\delta}}\right)dz\right|+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda}\frac{2\delta}{(t-t_0)^2+\delta^2}\,dt-1\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{t_0-\lambda}^{t_0+\lambda}R(t)\,dt\right|<3\eta<\frac{1}{2}.$$

Ma Δ è un numero intero; quindi necessariamente $\Delta=1$, e abbiamo finito. □

Osservazione 1.3.3. Una curva regolare, semplice e chiusa contenuta in una superficie S che non è un piano potrebbe non dividere la superficie S in esattamente due parti. Si può adattare il concetto di intorno tubolare in modo da far funzionare la prima parte della dimostrazione, e dimostrare che il complementare del sostegno della curva ha al più due componenti connesse. Possono però avvenire due fenomeni nuovi. Potrebbe essere impossibile definire in maniera coerente il versore normale alla curva, per cui non è più possibile distinguere T_+ da T_-, ed è quello che succede in superfici non orientabili quali il nastro di Möbius (il concetto di orientabilità di una superficie verrà definito nel paragrafo 2.4). Oppure, la stessa componente connessa potrebbe contenere sia T_+ che T_- (è il caso di $S=S^1\times S^1$, il toro). In entrambi i casi, il complementare della curva è connesso.

Come abbiamo già osservato precedentemente, il complementare di un compatto nel piano ha esattamente una sola componente connessa illimitata. Questo fatto (e la dimostrazione del Teorema 1.3.11) suggeriscono la seguente

Definizione 1.3.8: Sia $\sigma: [0, l] \to \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan (regolare di classe C^2) nel piano. L'unica componente connessa limitata del complementare del sostegno di σ è detta *interno* di σ. Il Lemma 1.3.9.(ii) e la dimostrazione del Teorema 1.3.11 ci dicono che l'indice di avvolgimento di σ relativamente a un punto qualsiasi del suo interno dev'essere uguale a ± 1. Diremo che σ è *orientata positivamente* (rispettivamente, *orientata negativamente*) se l'indice è $+1$ (rispettivamente, -1).

Osservazione 1.3.4. Nella dimostrazione del Teorema 1.3.11 abbiamo visto che $\iota_{p_\delta}(\sigma) - \iota_{p_{-\delta}}(\sigma) = 1$ sempre; inoltre $\iota_{p_{\pm\delta}}(\sigma) \neq 0$ se e solo se $p_{\pm\delta}$ appartiene all'interno di σ, e in quel caso si deve avere $\iota_{p_{\pm\delta}}(\sigma) = \pm 1$. Ora, p_δ appartiene all'interno di σ se e solo se $\mathbf{n}(t_0)$ punta verso l'interno di σ, che accade se e solo se σ è percorsa in senso antiorario. Quindi σ è orientata positivamente (negativamente) se e solo è percorsa in senso antiorario (in senso orario).

Concludiamo questo paragrafo con una serie di interessanti complementi ed esercizi.

Definizione 1.3.9: Una curva continua $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è detta *regolare (di classe C^k) a tratti* se esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare (di classe C^k) per $j = 1, \ldots, r$. Diremo inoltre che σ è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* se ristretta a ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$ lo è.

Esercizio 1.3.1. Dimostra che il complementare del sostegno di una curva di Jordan regolare di classe C^2 a tratti ha esattamente due componenti connesse.

Esercizio 1.3.2. Dimostra il *Teorema dell'arco di Jordan:* se $C \subset \mathbb{R}^2$ è il sostegno di una curva piana $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regolare di classe C^2 a tratti semplice non chiusa, allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ è connesso.

L'interno di una curva di Jordan ha una struttura topologica ben precisa:

Teorema 1.3.12: *Sia $\sigma: [0, l] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice chiusa di sostegno C. Allora l'interno di C è semplicemente connesso.*

Dimostrazione: Il sostegno K di una curva chiusa contenuta nell'interno U di C è un compatto, e quindi ha distanza positiva da C, cioè $\min\{\|x - y\| \mid x \in K, y \in C\} > 0$. Questo significa che possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che K sia disgiunto da $N_\varepsilon(\sigma)$, e quindi costruire una poligonale semplice contenuta in $N_\varepsilon(\sigma)$ il cui interno contenga K. Di conseguenza ci basta dimostrare che l'interno di una qualsiasi poligonale semplice è semplicemente connesso.

Procediamo per induzione sul numero n dei lati della poligonale. Se $n = 3$ abbiamo un triangolo, che essendo convesso è chiaramente semplicemente connesso.

Supponiamo allora che l'interno di una qualsiasi poligonale semplice con n lati sia semplicemente connesso, e sia P una poligonale semplice con $n + 1$ lati. Se P è convessa non c'è nulla da dimostrare. Se invece non è convessa, possiamo trovare una retta ℓ che interseca P in due vertici non consecutivi, e tale che P sia tutta contenuta in uno dei semipiani determinati da ℓ. Infatti, prendiamo una retta qualsiasi che non interseca P, e trasliamola fino al primo momento in cui interseca P, necessariamente in un vertice; a questo punto ruotiamola, se necessario, fino a che non interseca P in un altro vertice. Essendo P non convesso, a meno di ruotare la retta di partenza al più $n + 1$ volte, possiamo essere sicuri che questo secondo vertice non è consecutivo, e quindi abbiamo trovato la retta ℓ cercata.

Scegliamo due vertici p_j e p_k di P contenuti in ℓ e tali che nessun altro vertice di P fra quelli compresi fra p_j e p_k appartenga a ℓ. Possiamo allora formare due nuove poligonali P' e P'', entrambe con meno lati di P: la poligonale P' è formata sostituendo la spezzata da p_j a p_k con il segmento da p_j a p_k, mentre la poligonale P'' è formata proprio dalla spezzata e dal segmento. Per ipotesi induttiva, gli interni di P' e P'' sono semplicemente connessi.

Sia ora σ una curva chiusa il cui sostegno L sia contenuto nell'interno di P. La prima osservazione è che σ è omotopa a una poligonale chiusa (non necessariamente semplice) contenuta nell'interno di P. Infatti, per compattezza possiamo ricoprire L con un numero finito di dischi contenuti nell'interno di P, ciascuno dei quali interseca L in un connesso. All'interno di ciascuno di questi dischi possiamo deformare con una omotopia lineare l'intersezione con L a un segmento, e in questo modo otteniamo una poligonale τ omotopa a σ nell'interno di P.

Siccome l'interno di P' è semplicemente connesso, esiste un'omotopia T che deforma τ a un punto nell'interno di P'. Con un ragionamento analogo al precedente si vede che possiamo supporre che tutte le curve $\tau_s = T(s,\cdot)$ siano poligonali. Per concludere ci basta far vedere che possiamo deformare T a una omotopia di τ con una curva costante all'interno di P.

Sia allora $s \in (0,1)$ tale che la poligonale τ_s non sia contenuta nell'interno di P. Questo vuol dire che deve attraversare la spezzata S che collega p_j con p_k. Siccome l'interno di P'' è semplicemente connesso, possiamo deformare con continuità ciascun pezzo di τ_s contenuto nell'interno di P'' a una spezzata contenuta in S senza muovere gli estremi; e poi possiamo deformare quest'ultima a una spezzata contenuta nell'interno di P. Chiaramente questa operazione può essere effettuata mantenendo la dipendenza continua dal parametro s, e quindi otteniamo una nuova omotopia fra τ e una curva costante nell'interno di P, come voluto. □

Esercizio 1.3.3. Dimostra che l'interno di una curva di Jordan regolare di classe C^2 a tratti è semplicemente connesso.

Osservazione 1.3.5. Si può dimostrare che l'interno di una curva di Jordan continua è omeomorfo a un disco aperto. Questo è conseguenza di un risultato molto più generale, che dice che ogni aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo a un disco aperto. In realtà si può dimostrare anche molto di più: ogni aperto semplicemente connesso del piano distinto dal piano stesso è *biolomorfo* a un disco aperto (*Teorema di uniformizzazione di Riemann.*)

1.4 Il teorema delle tangenti

L'obiettivo di questo paragrafo è dimostrare un altro teorema di teoria globale delle curve, che sarà utile anche in seguito.

Osservazione 1.4.1. I risultati di questo paragrafo valgono per curve regolari di classe C^1 a tratti.

Iniziamo introducendo il secondo modo con cui si può associare un grado a una curva chiusa piana.

Definizione 1.4.1: Sia $\sigma\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare chiusa piana, e sia $\mathbf{t}\colon [0,l] \to S^1$ il versore tangente di σ. L'*indice di rotazione* di σ è il numero intero

$$\rho(\sigma) = \deg \mathbf{t} \in \mathbb{Z}\ .$$

Misura il numero di giri del versore tangente a σ.

Esercizio 1.4.1. Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare chiusa piana. Dimostra che

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\sigma_1'\sigma_2'' - \sigma_1''\sigma_2'}{\|\sigma'\|^3}\,dt.$$

In realtà, in futuro avremo bisogno dell'indice di rotazione per curve regolari a tratti; quindi introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.4.2: Sia $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare a tratti, e scegliamo una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

di $[a,b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ sia regolare per $j = 1,\dots,k$. Supponiamo anche che σ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in ciascuno dei segmenti in cui è regolare, e poniamo

$$\dot\sigma(t_j^-) = \lim_{t\to t_j^-} \dot\sigma(t)$$

per $j = 1,\dots,k$, e

$$\dot\sigma(t_j^+) = \lim_{t\to t_j^+} \dot\sigma(t)$$

per $j = 0, \dots, k-1$. Inoltre, se σ è chiusa poniamo anche $\dot\sigma(t_0^-) = \dot\sigma(t_k^-)$ e $\dot\sigma(t_k^+) = \dot\sigma(t_0^+)$. Diremo che t_j è una *cuspide* se $\dot\sigma(t_j^-) = -\dot\sigma(t_j^+)$. Se t_j non è una cuspide, l'*angolo esterno* $\varepsilon_j \in (-\pi, \pi)$ è l'angolo fra $\dot\sigma(t_j^-)$ e $\dot\sigma(t_j^+)$, preso positivo se $\{\dot\sigma(t_j^-), \dot\sigma(t_j^+)\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^2$, negativo altrimenti. I punti in cui l'angolo esterno è diverso da zero saranno detti *vertici* della curva. Infine, un *poligono curvilineo* è una curva regolare a tratti semplice chiusa parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e priva di cuspidi.

Definizione 1.4.3: Sia $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un poligono curvilineo nel piano, e $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ una partizione di $[a,b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$. Definiamo la funzione *angolo di rotazione* $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nel seguente modo: sia $\theta\colon [a,t_1) \to \mathbb{R}$ il sollevamento di $\dot\sigma\colon [a,t_1) \to S^1$ scelto in modo che $\theta(a) \in (-\pi, \pi]$. In altre parole, θ è la determinazione continua dell'angolo fra l'asse x e $\dot\sigma$ che inizia in $(-\pi, \pi]$. Poniamo poi

$$\theta(t_1) = \lim_{t \to t_1^-} \theta(t) + \varepsilon_1,$$

dove ε_1 è l'angolo esterno in t_1. Definiamo analogamente θ su $[t_1, t_2)$, cioè $\theta\colon [t_1,t_2) \to \mathbb{R}$ è il sollevamento di $\dot\sigma\colon [t_1,t_2) \to S^1$ che parte da $\theta(t_1)$, e poniamo nuovamente

$$\theta(t_2) = \lim_{t \to t_2^-} \theta(t) + \varepsilon_2,$$

dove ε_2 è l'angolo esterno in t_2. Continuando in questo modo definiamo θ su tutto l'intervallo $[a,b)$; poniamo infine

$$\theta(b) = \lim_{t \to b^-} \theta(t) + \varepsilon_k,$$

dove ε_k è l'angolo esterno in $b = t_k$. Allora diremo *indice di rotazione* della curva σ il numero

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(a)\big).$$

Siccome $\dot\sigma(t_k^+) = \dot\sigma(t_0^+)$, l'indice di rotazione dev'essere un numero intero. Chiaramente, se invertiamo l'orientazione della curva allora l'indice di rotazione cambia di segno.

Il risultato principale di questo paragrafo è il seguente teorema di Hopf:

Teorema 1.4.1: (delle tangenti, o *Umlaufsatz*) *L'indice di rotazione di un poligono curvilineo è* ± 1.

Dimostrazione: Cominciamo supponendo che il poligono curvilineo $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, parametrizzato rispetto alla lunghezza d'arco, non abbia vertici; in particolare, $\dot\sigma$ è continua e $\dot\sigma(a) = \dot\sigma(b)$. Siccome σ è chiusa, possiamo estenderla per periodicità a una curva, che continueremo a denotare con $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, periodica di periodo $b - a$, con derivata continua. Inoltre indichiamo con (σ_1, σ_2) le due coordinate di σ.

Se $[\tilde a, \tilde b]$ è un qualunque intervallo di lunghezza $b - a$, chiaramente $\rho(\sigma|_{[\tilde a,\tilde b]}) = \rho(\sigma|_{[a,b]})$; quindi possiamo scegliere il nostro intervallo $[a,b]$ in modo che $\sigma_2(t)$ abbia minimo per $t = a$; inoltre, a meno di traslazioni possiamo anche supporre che $\sigma(a) = O$. Dunque il sostegno di σ è contenuto nel semipiano superiore, e $\dot\sigma_2(a) = 0$, per cui a meno di invertire l'orientazione della curva abbiamo $\dot\sigma(a) = \dot\sigma(b) = e_1$, il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Indichiamo con $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ l'angolo di rotazione, cioè il sollevamento di $\dot\sigma$ che parte da $\theta(a) = 0$. Vogliamo definire un *angolo secante* $\eta\colon T \to \mathbb{R}$ (dove T è il triangolo $T = \{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le t_1 \le t_2 \le b\}$), che rappresenti l'angolo fra l'asse x e il vettore da $\sigma(t_1)$ a $\sigma(t_2)$. Per far ciò, definiamo $H\colon T \to S^1$ ponendo

$$H(t_1,t_2) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{\|\sigma(t_2) - \sigma(t_1)\|} & \text{se } t_1 < t_2 \text{ e } (t_1,t_2) \ne (a,b); \\ \dot\sigma(t_1) & \text{se } t_1 = t_2; \\ -\dot\sigma(a) & \text{se } (t_1,t_2) = (a,b). \end{cases}$$

L'applicazione H è continua lungo il segmento $t_1 = t_2$ in quanto

$$\lim_{(t_1,t_2)\to(t,t)} H(t_1,t_2) = \lim_{(t_1,t_2)\to(t,t)} \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{t_2 - t_1} \Bigg/ \left\| \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{t_2 - t_1} \right\| = \frac{\dot\sigma(t)}{\|\dot\sigma(t)\|} = H(t,t).$$

Analogamente, H è continua in (a,b): infatti

$$\lim_{(t_1,t_2)\to(a,b)} H(t_1,t_2) = \lim_{(t_1,t_2)\to(a,b)} \frac{\sigma(t_2)-\sigma(t_1+b-a)}{\|\sigma(t_2)-\sigma(t_1+b-a)\|} = \lim_{(s,t_2)\to(b,b)} -\frac{\sigma(s)-\sigma(t_2)}{\|\sigma(s)-\sigma(t_2)\|}$$
$$= -\frac{\dot\sigma(b)}{\|\dot\sigma(b)\|} = H(a,b).$$

Essendo T semplicemente connesso, possiamo sollevare H a un'unica $\eta\colon T\to\mathbb{R}$ continua tale che $\eta(a,a)=0$; la funzione η è il nostro angolo secante. In particolare, anche $t\mapsto\eta(t,t)$ è un sollevamento di $\dot\sigma$; siccome $\theta(a)=0=\eta(a,a)$, dobbiamo avere $\theta(t)=\eta(t,t)$ per ogni t, e quindi

$$\rho(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\bigl(\theta(b)-\theta(a)\bigr)=\frac{1}{2\pi}\,\eta(b,b).$$

Vogliamo trovare il valore di $\eta(b,b)$ percorrendo gli altri due lati del triangolo T. Per costruzione il vettore $\sigma(t)-\sigma(a)$ è sempre puntato verso il semipiano superiore; quindi $\eta(a,t)\in[0,\pi]$ per ogni $t\in[a,b]$. In particolare, essendo $H(a,b)=-\dot\sigma(a)=-e_1$, dobbiamo avere $\eta(a,b)=\pi$. Analogamente, il vettore $\sigma(b)-\sigma(t)$ è sempre puntato verso il semipiano inferiore; essendo $\eta(a,b)=\pi$, dobbiamo avere $\eta(t,b)\in[\pi,2\pi]$ per ogni $t\in[a,b]$. In particolare, essendo $H(b,b)=\dot\sigma(b)=e_1$, troviamo $\eta(b,b)=2\pi$, e la tesi è dimostrata nel caso di poligono curvilineo liscio.

Ora supponiamo che σ abbia dei vertici; per dimostrare il teorema ci basta trovare un poligono curvilineo liscio che abbia lo stesso indice di rotazione di σ. Per far ciò, cambieremo σ vicino a ciascun vertice in modo da renderla regolare ovunque.

Sia allora $\sigma(t_i)$ un vertice di angolo esterno ε_i, e scegliamo un numero positivo $0<\alpha<\frac{1}{2}(\pi-|\varepsilon_i|)$; usando la periodicità di σ, a meno di cambiare l'intervallo di definizione possiamo anche supporre che $t_i\ne a$, b. Per come abbiamo definito l'angolo di rotazione, si ha

$$\lim_{t\to t_i^+}\theta(t)=\theta(t_i)\qquad\text{e}\qquad\lim_{t\to t_i^-}\theta(t)=\theta(t_i)-\varepsilon_i.$$

Quindi possiamo trovare un $\delta>0$ tale che $\bigl|\theta(t)-\bigl(\theta(t_i)-\varepsilon_i\bigr)\bigr|<\alpha$ quando $t_{i-1}<t_i-\delta<t<t_i$ e $|\theta(t)-\theta(t_i)|<\alpha$ quando $t_i<t<t_1+\delta<t_{i+1}$. In particolare,

$$|\theta(t)-\theta(s)|\le 2\alpha+|\varepsilon_i|<\pi \tag{1.4.1}$$

per ogni s, $t\in(t_i-\delta,t_i+\delta)$. Dunque l'angolo di rotazione di σ varia meno di π in questo intervallo.

L'immagine C tramite σ di $[a,b]\setminus(t_i-\delta,t_i+\delta)$ è un compatto non contenente $\sigma(t_i)$; quindi possiamo trovare $r>0$ tale che $C\cap\overline{B\bigl(\sigma(t_i),r\bigr)}=\varnothing$. Siano t^*, $t^{**}\in(t_i-\delta,t_i+\delta)$ rispettivamente il primo e l'ultimo valore di t per cui $\sigma(t)\in\partial B\bigl(\sigma(t_i),r\bigr)$; in particolare, $\dot\sigma(t^*)$ punta verso l'interno di (o è tangente a) $\partial B\bigl(\sigma(t_i),r\bigr)$, mentre $\dot\sigma(t^{**})$ punta verso l'esterno di (o è tangente a) $\partial B\bigl(\sigma(t_i),r\bigr)$. Rimpiazziamo il pezzo di σ da t^* a t^{**} con (vedi il prossimo esercizio) una curva regolare τ contenuta in $\overline{B\bigl(\sigma(t_i),r\bigr)}$, tangente a σ in $\sigma(t^*)$ e $\sigma(t^{**})$, e il cui versore tangente rimanga sempre in un semipiano aperto contenente $\dot\sigma(t^*)$ e $\dot\sigma(t^{**})$. In particolare, la variazione dell'angolo di rotazione di τ da t^* a t^{**} è compresa fra $-\pi$ e π, e rappresenta l'angolo fra $\dot\sigma(t^*)$ e $\dot\sigma(t^{**})$; quindi, grazie alla (1.4.1) questa variazione è esattamente uguale a $\theta(t^{**})-\theta(t^*)$. In altre parole, il poligono curvilineo ottenuto inserendo τ al posto di $\sigma|_{[t^*,t^{**}]}$ ha esattamente lo stesso indice di rotazione di σ. Ripetendo l'operazione in tutti i vertici di σ otteniamo un poligono curvilineo liscio con lo stesso indice di rotazione di σ, e ci siamo. $\square$

Esercizio 1.4.2. Siano dati un numero $r>0$ e due punti distinti p_1, $p_2\in\partial B(O,r)\subset\mathbb{R}^2$. Scegliamo poi due vettori v_1, $v_2\in S^1$ tali che $v_1\ne -v_2$, $(v_1,p_1)\le 0$ e $(v_2,p_2)\ge 0$. Dimostra che esiste una curva regolare $\tau\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco il cui sostegno sia tutto contenuto in $\overline{B(O,r)}$, tale che $\sigma(a)=p_1$, $\dot\sigma(a)=v_1$, $\sigma(b)=p_2$ e $\dot\sigma(b)=v_2$, e tale che esista un semipiano aperto contenente $\dot\sigma(s)$ per ogni $s\in[a,b]$. (*Suggerimento:* nella maggior parte dei casi un'iperbole funziona.)

Definizione 1.4.4: Diremo che un poligono curvilineo è *orientato positivamente* se il suo indice di rotazione è $+1$.

Osservazione 1.4.2. Una curva di Jordan σ regolare di classe C^2 è orientata positivamente secondo la Definizione 1.3.8 se e solo se lo è anche secondo questa definizione. Infatti, l'Osservazione 1.3.4 ci dice che σ è orientata positivamente secondo la Definizione 1.3.8 se e solo se il versore normale punta verso il suo interno. Nella situazione in cui ci siamo posti all'inizio della dimostrazione del Teorema precedente, l'interno di σ dev'essere necessariamente nel semipiano superiore; quindi σ è orientata positivamente secondo la Definizione 1.3.8 se e solo se il versore normale a σ in $\sigma(a)$ è $(0,1)$, e quindi se e solo se $\dot{\sigma}(a) = (1,0)$ senza bisogno di cambiare orientazione, e dunque, grazie al resto della dimostrazione, se e solo se l'indice di rotazione di σ è $+1$. Quindi le due definizioni sono perfettamente compatibili.