Elementi di Geometria Differenziale: Geometria Riemanniana

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa
E-mail: abate@dm.unipi.it

Febbraio–Maggio 2005

Capitolo 1

Algebra multilineare

1.1 Prodotto tensoriale

Se V e W sono due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, indicheremo con $\mathrm{Hom}(V,W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\mathbb{K}$-lineari da V in W. In particolare, lo *spazio duale* di V è lo spazio vettoriale $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K})$. Inoltre, useremo spesso il *delta di Kronecker*, che è il simbolo

$$\delta_{hk} = \delta_k^h = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k, \\ 0 & \text{se } h \neq k. \end{cases}$$

Ricordiamo alcune proprietà fondamentali degli spazi $\mathrm{Hom}(V,W)$ e V^*:

Proposizione 1.1.1: *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Allora:*

(i) *L'applicazione che a ogni $L \in \mathrm{Hom}(V,W)$ associa la n-upla $\bigl(L(v_1), \ldots, L(v_n)\bigr) \in W^n$ è un isomorfismo fra $\mathrm{Hom}(V,W)$ e W^n. In particolare, $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = (\dim V)(\dim W)$, e $\dim V^* = \dim V$.*
(ii) *Se indichiamo con $v^h \in V^*$ l'elemento definito da $v^h(v_k) = \delta_k^h$, allora $\mathcal{B}^* = \{v^1, \ldots, v^n\}$ è una base di V^*, detta base duale di V^*.*
(iii) *L'applicazione $\Phi\colon V \to (V^*)^*$ data da $\Phi(v)(\varphi) = \varphi(v)$ è un isomorfismo canonico fra V e il biduale $(V^*)^*$.*
(iv) *Se $(\cdot\,,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{K}$ è un prodotto scalare non-degenere, allora l'applicazione $\Psi\colon V \to V^*$ data da $\Psi(v) = (\cdot, v)$ è un isomorfismo.*

Esercizio 1.1.1. Dimostra la Proposizione 1.1.1.

In particolare, ogni elemento di $\mathrm{Hom}(V,W)$ è univocamente determinato dai valori che assume su una base. Data una n-pla $(w_1, \ldots, w_n) \in W^n$, l'elemento L di $\mathrm{Hom}(V,W)$ che soddisfa la condizione $L(v_j) = w_j$ per $j = 1, \ldots, n$ è definito da

$$L(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$$

per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Vogliamo introdurre costruzioni analoghe e ottenere risultati simili per applicazioni multilineari.

Definizione 1.1.1: Siano $V_1, \ldots, V_n, W$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione $\Phi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ si dice *multilineare* (o *n-lineare*) se è lineare separatamente in ciascuna variabile. L'insieme $M(V_1, \ldots, V_n; W)$ delle applicazioni multilineari da $V_1 \times \cdots \times V_n$ in W è chiaramente uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Per capire meglio il contenuto della prossima proposizione, premettiamo un'osservazione.

Osservazione 1.1.1. Supponiamo dati n numeri interi $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^*$ e uno spazio vettoriale W di dimensione d. Allora lo spazio vettoriale $W^{d_1 \cdots d_n}$ può essere descritto come lo spazio delle "matrici" a n indici, i cui elementi sono vettori di W, e in cui il j-esimo indice varia fra 1 e d_j (per $j = 1, \ldots, n$). In altre parole, ogni vettore $\mathbf{w} \in W^{d_1 \cdots d_n}$ può essere scritto come

$$\mathbf{w} = (w_{\mu_1 \ldots \mu_n})_{(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \{1, \ldots, d_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, d_n\}}$$

con $w_{\mu_1\ldots\mu_n} \in W$ per ogni n-upla $(\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \{1,\ldots,d_1\} \times \cdots \times \{1,\ldots,d_n\}$. In particolare, data una base $\{w_1,\ldots,w_d\}$ di W otteniamo una base di $W^{d_1\cdots d_n}$ considerando i vettori $\mathbf{w}_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu}$ al variare di $\nu_1 \in \{1,\ldots d_1\},\ldots,\nu_n \in \{1,\ldots,d_n\}, \nu \in \{1,\ldots,d\}$, dove l'elemento di posto $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ di $\mathbf{w}_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu}$ è dato da

$$(\mathbf{w}_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu})_{\mu_1\ldots\mu_n} = \delta_{\mu_1\nu_1}\cdots\delta_{\mu_n\nu_n} w_\nu. \tag{1.1.1}$$

In particolare, il vettore $\mathbf{e}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ della base canonica di $\mathbb{K}^{d_1\cdots d_n}$, che ha un 1 al posto $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ e 0 altrove, ha come $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$-esimo elemento il numero

$$(\mathbf{e}_{\nu_1\ldots\nu_n})_{\mu_1\ldots\mu_n} = \delta_{\mu_1\nu_1}\cdots\delta_{\mu_n\nu_n}.$$

Proposizione 1.1.2: *Siano $V_1,\ldots,V_n$ e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, di dimensione rispettivamente $d_1,\ldots,d_n,d$. Per $j=1,\ldots,n$ scegliamo una base $\mathcal{B}_j = \{v_{j,1},\ldots,v_{j,d_j}\}$ di V_j, e sia $\{w_1,\ldots,w_d\}$ una base di W. Allora l'applicazione $A\colon M(V_1,\ldots,V_n;W) \to W^{d_1\cdots d_n}$ data da*

$$A(\Phi) = \bigl(\Phi(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n})\bigr)_{(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\{1,\ldots,d_1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,d_n\}}$$

è un isomorfismo. In particolare,

$$\dim M(V_1,\ldots,V_n;W) = (\dim V_1)\cdots(\dim V_n)\cdot(\dim W),$$

e una base di $M(V_1,\ldots,V_n;W)$ è $\{\Phi_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu}\}_{(\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu)\in\{1,\ldots,d_1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,d_n\}\times\{1,\ldots,d\}}$, dove $\Phi_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu}$ è definita da

$$\Phi_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu}(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n}) = \delta_{\mu_1\nu_1}\cdots\delta_{\mu_n\nu_n} w_\nu.$$

Dimostrazione: L'applicazione A è chiaramente lineare. Ora, per ogni applicazione $\Phi \in M(V_1,\ldots,V_n;W)$ e ogni $v_j = \sum_{\mu=1}^{d_j} a_{j\mu} v_{j,\mu} \in V_j$, si ha

$$\Phi(v_1,\ldots,v_n) = \sum_{\mu_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\mu_n=1}^{d_n} a_{1\mu_1}\cdots a_{n\mu_n}\Phi(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n});$$

in particolare, $A(\Phi) = O$ implica $\Phi = O$, e quindi A è iniettiva. Viceversa, se scegliamo arbitrariamente $w_{\mu_1\ldots\mu_n} \in W$ possiamo definire una $\Phi \in M(V_1,\ldots,V_n;W)$ tale che $\Phi(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n}) = w_{\mu_1\ldots\mu_n}$ ponendo

$$\Phi(v_1,\ldots,v_n) = \sum_{\mu_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\mu_n=1}^{d_n} a_{1\mu_1}\cdots a_{n\mu_n} w_{\mu_1\ldots\mu_n}, \tag{1.1.2}$$

per cui A è surgettiva. Infine, una base di $M(V_1,\ldots,V_n;W)$ si ottiene applicando A^{-1} a una base di $W^{d_1\cdots d_n}$; l'ultima affermazione segue quindi da (1.1.1). □

In altre parole, anche le applicazioni multilineari sono completamente determinate dai valori che assumono su n-uple di elementi delle basi. Quando in seguito costruiremo un'applicazione multilineare prescrivendo il suo valore sulle basi e poi invocando questo risultato, diremo che stiamo *estendendo per multilinearità*.

Esercizio 1.1.2. Siano $V_1,\ldots,V_n$ W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Dimostra che gli spazi $M(V_1,\ldots,V_n;W)$, $\mathrm{Hom}\bigl(V_1, M(V_2,\ldots,V_n;W)\bigr)$ e $M\bigl(V_1,\ldots,V_{n-1};\mathrm{Hom}(V_n,W)\bigr)$ sono canonicamente isomorfi. [*Suggerimento:* se $\Phi \in M(V_1,\ldots,V_n;W)$, considera $\hat\Phi \in \mathrm{Hom}\bigl(V_1, M(V_2,\ldots,V_n;W)\bigr)$ e $\tilde\Phi \in M\bigl(V_1,\ldots,V_{n-1};\mathrm{Hom}(V_n,W)\bigr)$ definite da

$$\hat\Phi(v_1)(v_2,\ldots,v_n) = \tilde\Phi(v_1,\ldots,v_{n-1})(v_n) = \Phi(v_1,\ldots,v_n) \in W$$

per ogni $v_1 \in V_1,\ldots,v_n \in V_n$.]

Vogliamo descrivere ora una procedura che ci permette di trasformare un'applicazione multilineare in una lineare cambiando opportunamente il dominio.

Teorema 1.1.3: *Dati $V_1,\ldots,V_n$ spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$, poniamo $T = M(V_1^*,\ldots,V_n^*;\mathbb{K})$. Sia inoltre $F \in M(V_1,\ldots,V_n;T)$ data da*

$$F(v_1,\ldots,v_n)(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \varphi_1(v_1)\cdots\varphi_n(v_n),$$

per ogni $v_1 \in V_1,\ldots,v_n \in V_n, \varphi_1 \in V_1^*,\ldots,\varphi_n \in V_n^*$. Allora:

(i) *Per ogni spazio vettoriale W su $\mathbb{K}$ e ogni applicazione multilineare $\Phi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{\Phi}\colon T \to W$ tale che $\Phi = \tilde{\Phi} \circ F$ (proprietà universale del prodotto tensoriale).*

(ii) *Se (T', F') è un'altra coppia soddisfacente* (i) *allora esiste un unico isomorfismo $\Psi\colon T \to T'$ tale che $F' = \Psi \circ F$ (unicità del prodotto tensoriale).*

Dimostrazione: (i) Per $j = 1,\ldots,n$ scegliamo una base $\mathcal{B}_j = \{v_{j,1},\ldots,v_{j,d_j}\}$ di V_j, dove $d_j = \dim V_j$, e sia $\mathcal{B}_j^* = \{v_j^1,\ldots,v_j^{d_j}\}$ la corrispondente base duale. Poniamo $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n} = F(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n}) \in T$; siccome

$$\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}(v_1^{\nu_1},\ldots,v_n^{\nu_n}) = \delta_{\mu_1}^{\nu_1}\cdots\delta_{\mu_n}^{\nu_n},$$

la Proposizione 1.1.2 e l'Osservazione 1.1.1 ci dicono che $\{\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}\}$ è una base di T. Ora, se $\tilde{\Phi}$ esiste si deve avere

$$\tilde{\Phi}(\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}) = \tilde{\Phi}\big(F(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n})\big) = \Phi(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n});$$

quindi la Proposizione 1.1.1.(i) ci assicura che esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{\Phi}$ con le proprietà richieste.

(ii) Se applichiamo (i) alla $F'\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to T'$ otteniamo una $\Psi\colon T \to T'$ tale che $\Psi \circ F = F'$. Rovesciando i ruoli di T e T' otteniamo una $\Psi'\colon T' \to T$ tale che $\Psi' \circ F' = F$. Quindi $(\Psi' \circ \Psi) \circ F = F$; ma anche $\mathrm{id}_T \circ F = F$, e l'unicità in (i) implica $\Psi' \circ \Psi = \mathrm{id}_T$. Analogamente si dimostra che $\Psi \circ \Psi' = \mathrm{id}_{T'}$, e ci siamo. □

Definizione 1.1.2: Diremo che due coppie (T_1, F_1) e (T_2, F_2), con T_j spazi vettoriali e $F_j\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to T_j$ applicazioni n-lineari, sono *isomorfe* se esiste un isomorfismo $\Psi\colon T_1 \to T_2$ tale che $F_2 = \Psi \circ F_1$.

Definizione 1.1.3: Una coppia (T, F) soddisfacente le proprietà del Teorema 1.1.3.(i) verrà detta *prodotto tensoriale* di $V_1,\ldots,V_n$, e indicata con $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$; il Teorema 1.1.3.(ii) ci assicura che il prodotto tensoriale è ben definito a meno di isomorfismi. Gli elementi della forma $F(v_1,\ldots,v_n)$, detti *indecomponibili*, verranno indicati con la scrittura $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$.

Osservazione 1.1.2. La dimostrazione del Teorema 1.1.3.(ii) mostra chiaramente come l'unicità del prodotto tensoriale sia conseguenza della proprietà universale.

Osservazione 1.1.3. Il Teorema 1.1.3 e la Proposizione 1.1.2 chiaramente implicano che

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = (\dim V_1)\cdots(\dim V_n).$$

Esercizio 1.1.3. Dimostra che $V \otimes \mathbb{K}$ e $\mathbb{K} \otimes V$ sono canonicamente isomorfi a V per ogni spazio vettoriale V di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$.

Ci possono essere altre realizzazioni concrete del prodotto tensoriale di spazi vettoriali (vedi per esempio l'Esercizio 1.1.5); ma noi lo penseremo sempre come spazio di applicazioni multilineari. In particolare, presi $v_1 \in V_1,\ldots,v_n \in V_n$ allora $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ agisce su $V_1^* \times \cdots \times V_n^*$ con la seguente regola:

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = \varphi_1(v_1)\cdots\varphi_n(v_n)$$

per ogni $\varphi_1 \in V_1^*,\ldots,\varphi_n \in V_n^*$.

Osservazione 1.1.4. Se $\mathcal{B}_j = \{v_{j,1},\ldots,v_{j,d_j}\}$ è una base di V_j, per $j = 1,\ldots,n$, allora una base di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ è composta dagli elementi indecomponibili della forma $v_{1,\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{n,\mu_n}$. In particolare, gli elementi indecomponibili formano un sistema di generatori di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, ma attenzione: non tutti gli elementi di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ sono indecomponibili. Per esempio, tutti gli elementi indecomponibili di $V \otimes V$ sono applicazioni bilineari degeneri (dato $v_1 \otimes v_2 \in V \otimes V$, se prendiamo $\varphi_1 \in V^*$ non nullo tale che $\varphi_1(v_1) = O$, allora $v_1 \otimes v_2(\varphi_1,\cdot) \equiv O$, per cui $v_1 \otimes v_2$ è degenere), e quindi nessuna applicazione bilineare non degenere di $V^* \times V^*$ in $\mathbb{K}$ può essere rappresentata da un singolo elemento indecomponibile.

Osservazione 1.1.5. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$, la multilinearità di F implica che

$$\lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (\lambda v_1) \otimes \cdots \otimes v_n = \cdots = v_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda v_n).$$

Analogamente, se $v_j', v_j'' \in V_j$ si ha

$$v_1 \otimes \cdots \otimes (v_j' + v_j'') \otimes \cdots \otimes v_n = v_1 \otimes \cdots \otimes v_j' \otimes \cdots \otimes v_n + v_1 \otimes \cdots \otimes v_j'' \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Queste regole determinano completamente la manipolazione algebrica degli elementi del prodotto tensoriale, come vedremo nell'Esercizio 1.1.5.

Esercizio 1.1.4. Dato un insieme S, indichiamo con $\mathbb{K}\langle S\rangle$ l'insieme

$$\mathbb{K}\langle S\rangle = \{f\colon S \to \mathbb{K} \mid f(s) \neq 0 \text{ solo per un numero finito di elementi } s \in S\}.$$

(i) Dimostra che $\mathbb{K}\langle S\rangle$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, detto *spazio vettoriale libero generato* da S.
(ii) Identificando ogni $s \in S$ con la funzione in $\mathbb{K}\langle S\rangle$ che vale 1 in s e 0 altrove, dimostra che S è una base di $\mathbb{K}\langle S\rangle$, e quindi che ogni elemento $v \in \mathbb{K}\langle S\rangle$ si scrive in modo unico come combinazione lineare formale finita di elementi di S a coefficienti in $\mathbb{K}$, cioè nella forma

$$v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j s_j$$

per opportuni $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e $s_1, \ldots, s_k \in S$.
(iii) Dimostra che per ogni funzione $\alpha\colon S \to V$ a valori in uno spazio vettoriale V qualsiasi esiste un'unica applicazione lineare $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}\langle S\rangle, V)$ tale che $A|_S = \alpha$ (*proprietà universale dello spazio vettoriale libero*).
(iv) Dimostra che se (W, ι) è una coppia composta da uno spazio vettoriale W e un'applicazione iniettiva $\iota\colon S \to W$ tale che per ogni funzione $\alpha\colon S \to V$ a valori in uno spazio vettoriale V qualsiasi esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{A} \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\tilde{A} \circ \iota = \alpha$ allora esiste un isomorfismo $T\colon \mathbb{K}\langle S\rangle \to W$ tale che $T|_S = \iota$.

Esercizio 1.1.5. Siano $V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, e indichiamo con $\mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_n\rangle$ lo spazio vettoriale libero generato da $V_1 \times \cdots \times V_n$ (vedi l'esercizio precedente). Sia $\mathcal{R}$ il sottospazio di $\mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_n\rangle$ generato dagli elementi della forma

$$\lambda(v_1, \ldots, v_n) - (v_1, \ldots, \lambda v_j, \ldots, v_n),$$
$$(v_1, \ldots, v_j', \ldots, v_n) + (v_1, \ldots, v_j'', \ldots, v_n) - (v_1, \ldots, v_j' + v_j'', \ldots, v_n),$$

e sia $T = \mathbb{R}\langle V_1 \times \cdots \times V_n\rangle/\mathcal{R}$ lo spazio quoziente. Infine, sia $\pi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to T$ l'applicazione che associa a ciascun elemento di $V_1 \times \cdots \times V_n$ la sua classe d'equivalenza in T. Dimostra che (T, π) soddisfa la proprietà universale del prodotto tensoriale, e deduci quindi che se $V_1, \ldots, V_n$ hanno dimensione finita allora (T, π) è isomorfo al prodotto tensoriale $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, F)$.

La seguente proposizione contiene degli utili isomorfismi canonici fra prodotti tensoriali (e spazi di applicazioni lineari):

Proposizione 1.1.4: *Siano V, W, $V_1, \ldots, V_n$, V_j' spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Allora*
(i) *Sia σ una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$, e $\tilde{F}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}$ data da*

$$\tilde{F}(v_1, \ldots, v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Allora $(V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}, \tilde{F})$ è isomorfo a $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, F)$.
(ii) *Scelto $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, sia $\tilde{F}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_j) \otimes (V_{j+1} \otimes \cdots \otimes V_n)$ data da*

$$\tilde{F}(v_1, \ldots, v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes (v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Allora $\big((V_1 \otimes \cdots \otimes V_j) \otimes (V_{j+1} \otimes \cdots \otimes V_n), \tilde{F}\big)$ *è isomorfo a* $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, F)$.

(iii) *Sia* $\tilde{F}: V_1 \times \cdots \times (V_j \oplus V_j') \times \cdots \times V_n \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_j \otimes \cdots \otimes V_n) \oplus (V_1 \otimes \cdots \otimes V_j' \otimes \cdots \otimes V_n)$ *data da*

$$\tilde{F}(v_1, \ldots, (v_j, v_j'), \ldots, v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_j' \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Allora $\big((V_1 \otimes \cdots \otimes V_j \otimes \cdots \otimes V_n) \oplus (V_1 \otimes \cdots \otimes V_j' \otimes \cdots \otimes V_n), \tilde{F}\big)$ *è isomorfo a* $\big(V_1 \otimes \cdots \otimes (V_j \oplus V_j') \otimes \cdots \otimes V_n, F\big)$.

(iv) *Sia* $\tilde{F}: V^* \times W^* \to (V \otimes W)^*$ *data da*

$$\tilde{F}(\varphi, \psi)(v \otimes w) = \varphi(v)\psi(w).$$

Allora $\big((V \otimes W)^*, \tilde{F}\big)$ *è isomorfo a* $(V^* \otimes W^*, F)$.

(v) *Sia* $\tilde{F}: V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ *data da*

$$\tilde{F}(\varphi, w)(v) = \varphi(v)w.$$

Allora $\big(\mathrm{Hom}(V, W), \tilde{F}\big)$ *è isomorfo a* $(V^* \otimes W, F)$.

(vi) *L'applicazione* $A: M(V_1, V_2; W) \to \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$ *data da*

$$A(\Phi)(v_1 \otimes v_2) = \Phi(v_1, v_2)$$

ed estesa per linearità, è un isomorfismo fra $M(V_1, V_2; W)$ *e* $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$.

Dimostrazione: (i) Essendo $\tilde{F}$ un'applicazione n-lineare, la proprietà universale del prodotto tensoriale ci fornisce una $A: V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}$ lineare e tale che $\tilde{F} = A \circ F$. Ora, l'immagine di A è un sottospazio vettoriale di $V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}$ che include $\tilde{F}(V_1 \times \cdots \times V_n)$; siccome quest'ultimo insieme, contenendo tutti i vettori indecomponibili, genera $V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}$, l'applicazione A è necessariamente surgettiva. Ma $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ e $V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}$ hanno la stessa dimensione, e quindi A è l'isomorfismo cercato.

(ii), (iii) e (iv) si dimostrano in modo assolutamente analogo (esercizio).

Anche la (v) si può dimostrare nello stesso modo, ma possiamo anche scrivere in maniera esplicita l'isomorfismo $A: V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$. Infatti, si verifica subito (esercizio) che estendendo per linearità la

$$A(\varphi \otimes w)(v) = \varphi(v)w$$

otteniamo un isomorfismo che soddisfa $\tilde{F} = A \circ F$. Nota che, a meno di identificare gli spazi vettoriali con i loro biduali, questo è esattamente l'isomorfismo dell'Esercizio 1.1.2 applicato a $V^* \otimes W = M(V, W^*; \mathbb{K})$.

(vi) L'applicazione A è lineare e iniettiva fra spazi vettoriali della stessa dimensione, per cui è un isomorfismo, che realizza esplicitamente la proprietà universale del prodotto tensoriale. □

Osservazione 1.1.6. In particolare, combinando gli ultimi tre isomorfismi vediamo che $M(V_1, V_2; W)$ è canonicamente isomorfo a $V_1^* \otimes V_2^* \otimes W$. Più in generale, con la stessa tecnica si verifica che $M(V_1, \ldots, V_n; W)$ è canonicamente isomorfo a $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$, che a sua volta è canonicamente isomorfo a $M(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{K}) \otimes W$.

Esempio 1.1.1. Uno dei misteri dell'algebra lineare elementare è come mai due nozioni piuttosto diverse, quali le applicazioni lineari fra due spazi vettoriali e le forme bilineari a valori nel campo base, vengono rappresentate dallo stesso tipo di oggetti (le matrici). La soluzione del mistero è la Proposizione 1.1.4.(v). Infatti, dati due spazi vettoriali V e W di dimensione n ed m rispettivamente, la scelta di due basi fornisce un isomorfismo fra lo spazio delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$ e lo spazio delle applicazioni lineari $\mathrm{Hom}(V, W)$. Grazie alla Proposizione 1.1.4, quest'ultimo è canonicamente isomorfo a $V^* \otimes W$, cioè allo spazio delle applicazioni bilineari $M(V, W^*; \mathbb{K})$. Ma la scelta delle basi fornisce anche un isomorfismo di W^* con W, e quindi di $M(V, W^*; \mathbb{K})$ con $M_{m,n}(\mathbb{K})$, per cui siamo passati dalle matrici come applicazioni lineari alle matrici come forme bilineari.

Vi è un'altra interpretazione del prodotto tensoriale in termini matriciali. Dati $u \in \mathbb{K}^m$ e $v \in \mathbb{K}^n$, l'elemento indecomponibile $u \otimes v$ è un'applicazione bilineare di $(\mathbb{K}^m)^* \times (\mathbb{K}^n)^*$ in $\mathbb{K}$, che è rappresentata da una matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. È facile vedere (esercizio) che questa matrice è esattamente $u \cdot v^T$.

Definizione 1.1.4: Dati $u \in \mathbb{K}^m$ e $v \in \mathbb{K}^n$, diremo *prodotto di Kronecker* di u e v la matrice $u \otimes v \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ data da $u \otimes v = u \cdot v^T$, il cui elemento di posto (i,j) è $u^i v^j$. Più in generale, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{h,k}(\mathbb{K})$ sono due matrici, diremo *prodotto di Kronecker* di A e B la matrice

$$A \otimes B = \begin{vmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{1n}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B^T & \cdots & a_{mn}B^T \end{vmatrix} \in M_{mk,nh}(\mathbb{K}).$$

Esercizio 1.1.6. (i) Dimostra che ogni matrice in $M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango 1 è della forma $u \otimes v$ per opportuni $u \in \mathbb{K}^m$ e $v \in \mathbb{K}^n$.

(ii) Dimostra che ogni matrice in $M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango $d \geq 1$ è somma di d matrici di rango 1.

(iii) Interpreta il prodotto di Kronecker di matrici in termini di prodotti tensoriali.

Esempio 1.1.2. Se V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, si vede subito che $V \otimes \mathbb{K}$ è isomorfo a V (esercizio). Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ possiamo invece considerare $V \otimes \mathbb{C}$. Come spazio vettoriale reale, $V \otimes \mathbb{C}$ ha dimensione doppia rispetto a V; ma la cosa interessante è che $V \otimes \mathbb{C}$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, con dimensione (complessa) uguale alla dimensione (reale) di V. Infatti, ogni elemento di $V \otimes \mathbb{C}$ è somma di un numero finito di elementi della forma $v_j \otimes \lambda_j$, con $v_j \in V$ e $\lambda_j \in \mathbb{C}$; quindi possiamo definire il prodotto di un numero complesso λ per un elemento di $V \otimes \mathbb{C}$ ponendo

$$\lambda \cdot \sum_{j=1}^r v_j \otimes \lambda_j = \sum_{j=1}^r v_j \otimes (\lambda\lambda_j),$$

ed è facile verificare che in questo modo si ottiene uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. In particolare, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, una base su $\mathbb{R}$ di $V \otimes \mathbb{C}$ è data da $\{v_1 \otimes 1, v_1 \otimes i, \ldots, v_n \otimes 1, v_n \otimes i\}$, mentre una base su $\mathbb{C}$ è semplicemente data da $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1\}$.

Definizione 1.1.5: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Lo spazio vettoriale complesso $V \otimes \mathbb{C}$ viene detto *complessificazione* di V, e indicato con $V^{\mathbb{C}}$.

1.2 L'algebra tensoriale

In geometria differenziale sono particolarmente utili alcuni spazi ottenuti tramite prodotti tensoriali.

Definizione 1.2.1: Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora possiamo costruire i seguenti spazi vettoriali:

$$T_0^0(V) = T_0(V) = T^0(V) = \mathbb{K}, \qquad T^1(V) = T_0^1(V) = V, \qquad T_1(V) = T_1^0(V) = V^*,$$
$$T^p(V) = T_0^p(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ volte}}, \qquad T_q(V) = T_q^0(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q \text{ volte}}, \qquad T_q^p(V) = T^p(V) \otimes T_q(V),$$
$$T^\bullet(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(V), \qquad T(V) = \bigoplus_{p,q \geq 0} T_q^p(V), \qquad T_\bullet(V) = \bigoplus_{q \geq 0} T_q(V).$$

Chiaramente, $\dim T_q^p(V) = (\dim V)^{p+q}$, mentre $T(V)$ ha dimensione infinita. Un elemento di $T_q^p(V)$ è detto *tensore p-controvariante e q-covariante,* o *tensore di tipo* $\binom{p}{q}$, mentre, per motivi che vedremo fra un attimo, lo spazio $T(V)$ è detto *algebra tensoriale* di V.

Osservazione 1.2.1. Ricordo che $T_q^p(V)$ è lo spazio delle applicazioni multilineari da $(V^*)^p \times V^q$ a $\mathbb{K}$, e in particolare l'azione degli elementi indecomponibili è data da

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^q(\eta^1, \ldots, \eta^p, v_1, \ldots, v_q) = \eta^1(u_1) \cdots \eta^p(u_p) \cdot \omega^1(v_1) \cdots \omega^q(v_q),$$

dove $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q \in V$ e $\omega^1, \ldots, \omega^q, \eta^1, \ldots, \eta^p \in V^*$. Inoltre, l'Esercizio 1.1.2 implica anche che $T_q^p(V)$ è isomorfo allo spazio delle applicazioni multilineari da $(V^*)^p \times V^{q-1}$ a V^*, e a quello delle applicazioni multilineari da $(V^*)^{p-1} \times V^q$ a V. In particolare, $T_1^1(V)$ è isomorfo a $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Ora vogliamo definire su $T(V)$ un prodotto. Se $\alpha \in T^{p_1}_{q_1}(V)$ e $\beta \in T^{p_2}_{q_2}(V)$ definiamo $\alpha \otimes \beta \in T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}(V)$ ponendo

$$\alpha \otimes \beta(\eta^1, \ldots, \eta^{p_1+p_2}, v_1, \ldots, v_{q_1+q_2}) = \alpha(\eta^1, \ldots, \eta^{p_1}, v_1, \ldots, v_{q_1})\beta(\eta^{p_1+1}, \ldots, \eta^{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \ldots, v_{q_1+q_2}).$$

Siccome ogni elemento di $T(V)$ è somma di un numero finito di elementi di questo tipo, per distributività possiamo allora definire un prodotto $\otimes: T(V) \times T(V) \to T(V)$, e $\big(T(V), +, \otimes\big)$ risulta (esercizio) essere un anello con unità $1 \in T^0_0(V)$. Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e v, $w \in T(V)$ abbiamo

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w),$$

e quindi $\big(T(V), +, \otimes, \cdot\big)$ è un'algebra, giustificandone il nome.

Osservazione 1.2.2. Attenzione: il prodotto in $T(V)$ *non* è commutativo. Per esempio, prendiamo $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{e_1, e_2\}$ e base duale $\{e^1, e^2\}$. Allora $e_1 \otimes e_2$ ed $e_2 \otimes e_1$ appartengono a $T^2_0(\mathbb{R}^2)$, e quindi sono applicazioni bilineari su $(\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^*$. Ma

$$e_1 \otimes e_2(e^1, e^2) = e^1(e_1)e^2(e_2) = 1 \neq 0 = e^1(e_2)e^2(e_1) = e_2 \otimes e_1(e^1, e^2),$$

per cui $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$.

Osservazione 1.2.3. Spazi vettoriali isomorfi hanno algebre tensoriali isomorfe. Infatti, sia $L: V \to W$ un isomorfismo fra spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$, e indichiamo con $L^*: W^* \to V^*$ l'isomorfismo duale. Allora $(L^*)^{-1}: V^* \to W^*$ è ancora un isomorfismo, e possiamo definire $T(L): T(V) \to T(W)$ ponendo

$$T(L)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^q) = L(v_1) \otimes \cdots \otimes L(v_p) \otimes (L^*)^{-1}(\omega^1) \otimes \cdots \otimes (L^*)^{-1}(\omega^q)$$

ed estendendo per linearità. Si vede subito che $T(L)$ è un isomorfismo di algebre che conserva il tipo.

Esercizio 1.2.1. Dimostra che per ogni applicazione lineare $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ esistono un unico omomorfismo di algebre $T^\bullet(L): T^\bullet(V) \to T^\bullet(W)$ e un unico omomorfismo di algebre $T_\bullet(L): T_\bullet(W) \to T_\bullet(V)$ che conservano il tipo e tali che $T^\bullet(L)|_V = L$ e $T_\bullet(L)|_{W^*} = L^*$.

Capita spesso che strutture definite sullo spazio vettoriale V possano essere estese all'intera algebra tensoriale. Un esempio tipico è quello del prodotto scalare:

Proposizione 1.2.1: *Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare definito positivo su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Allora esiste un unico prodotto scalare definito positivo $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle: T(V) \times T(V) \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) *$T^p_q(V)$ è ortogonale a $T^h_k(V)$ se $p \neq h$ o $q \neq k$;*
(ii) *$\langle\!\langle \lambda, \mu \rangle\!\rangle = \lambda\mu$ per ogni λ, $\mu \in \mathbb{R} = T^0(V)$;*
(iii) *$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle = \langle v, w \rangle$ per ogni v, $w \in T^1(V) = V$;*
(iv) *$\langle\!\langle v^*, w^* \rangle\!\rangle = \langle v, w \rangle$ per ogni v, $w \in T^1(V)$, dove v^*, $w^* \in T_1(V)$ sono dati da $v^* = \langle \cdot, v \rangle$ e $w^* = \langle \cdot, w \rangle$;*
(v) *$\langle\!\langle \alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle\!\rangle \cdot \langle\!\langle \alpha_2, \beta_2 \rangle\!\rangle$ per ogni α_1, $\beta_1 \in T^{p_1}_{q_1}(V)$ e α_1, $\beta_2 \in T^{p_2}_{q_2}(V)$.*

Dimostrazione: Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$; in particolare, $\{v^*_1, \ldots, v^*_2\}$ è la base duale di V^*. Una base di $T^p_q(V)$ è allora composta da tutti i possibili tensori della forma

$$v_I = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v^*_{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes v^*_{i_{p+q}} \tag{1.2.1}$$

al variare di $I = (i_1, \ldots, i_{p+q}) \in \{1, \ldots, n\}^{p+q}$.

Ora, supponiamo che un prodotto scalare $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ che soddisfi (i)–(v) esista. Allora si vede subito che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{v^*_1, \ldots, v^*_n\}$ sono ortonormali rispetto a $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, e quindi

$$\begin{aligned}\left\langle\!\!\left\langle \sum_I \lambda_I v_I, \sum_J \mu_J v_J \right\rangle\!\!\right\rangle &= \sum_I \sum_J \lambda_I \mu_J \langle\!\langle v_I, v_J \rangle\!\rangle = \sum_I \sum_J \lambda_I \mu_J \langle\!\langle v_{i_1}, v_{j_1} \rangle\!\rangle \cdots \langle\!\langle v^*_{i_{p+q}}, v^*_{j_{p+q}} \rangle\!\rangle \\ &= \sum_I \lambda_I \mu_I,\end{aligned}$$

per cui $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot \rangle\!\rangle$ se esiste è unico.

Per l'esistenza, indichiamo con $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot \rangle\!\rangle$ l'unico prodotto scalare definito positivo su $T(V)$ rispetto a cui gli elementi della forma (1.2.1) formano una base ortonormale. Chiaramente, (i)–(iv) sono soddisfatte; dobbiamo verificare (v). Ma infatti abbiamo

$$\begin{aligned}\left\langle\!\!\left\langle \left(\sum_{I_1}\lambda^1_{I_1}v_{I_1}\right)\otimes\left(\sum_{I_2}\lambda^2_{I_2}v_{I_2}\right), \left(\sum_{J_1}\mu^1_{J_1}v_{J_1}\right)\otimes\left(\sum_{J_2}\mu^2_{J_2}v_{J_2}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle&\\ =\sum_{I_1,I_2,J_1,J_2}\lambda^1_{I_1}\lambda^2_{I_2}\mu^1_{J_1}\mu^2_{J_2}\langle\!\langle v_{I_1}\otimes v_{I_2}, v_{J_1}\otimes v_{J_2}\rangle\!\rangle&\\ =\sum_{I_1,I_2}\lambda^1_{I_1}\lambda^2_{I_2}\mu^1_{I_1}\mu^2_{I_2}&\\ =\left\langle\!\!\left\langle\sum_{I_1}\lambda^1_{I_1}v_{I_1},\sum_{J_1}\mu^1_{J_1}v_{J_1}\right\rangle\!\!\right\rangle\cdot\left\langle\!\!\left\langle\sum_{I_2}\lambda^2_{I_2}v_{I_2},\sum_{J_2}\mu^2_{J_2}v_{J_2}\right\rangle\!\!\right\rangle&,\end{aligned}$$

e ci siamo. □

Concludiamo questo paragrafo introducendo una famiglia di applicazioni lineari tipiche dell'algebra tensoriale:

Definizione 1.2.2: La *contrazione* su $T^p_q(V)$ di tipo $\binom{i}{j}$ con $1\le i\le p$ e $1\le j\le q$ è l'applicazione lineare $\mathcal{C}^i_j\colon T^p_q(V)\to T^{p-1}_{q-1}(V)$ definita sugli elementi indecomponibili da

$$\mathcal{C}^i_j(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^q)=\omega^j(v_i)\,v_1\otimes\cdots\otimes\widehat{v_i}\otimes\cdots\otimes v_p\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\widehat{\omega^j}\otimes\cdots\otimes\omega^q$$

(dove l'accento circonflesso indica elementi omessi nel prodotto tensoriale), ed esteso per linearità.

Per esempio, $\mathcal{C}^1_1\colon T^1_1(V)\to\mathbb{K}$ è data sugli elementi indecomponibili da

$$\mathcal{C}^1_1(v\otimes\omega)=\omega(v),$$

mentre $\mathcal{C}^1_2\colon T^2_2(V)\to T^1_1(V)$ è data sugli elementi indecomponibili da

$$\mathcal{C}^1_2(v_1\otimes v_2\otimes\omega^1\otimes\omega^2)=\omega^2(v_1)\,v_2\otimes\omega^1.$$

1.3 Algebra esterna

L'Osservazione 1.2.3 ci dice che ogni automorfismo L di uno spazio vettoriale T induce un automorfismo $T(L)$ dell'algebra tensoriale $T(V)$. I sottospazi di $T(V)$ che sono mandati in se stessi da ogni automorfismo del tipo $T(L)$ sono chiaramente intrinsecamente associati allo spazio vettoriale V (e non a una sua particolare realizzazione), e quindi ci aspettiamo che siano particolarmente interessanti.

Definizione 1.3.1: Un sottospazio vettoriale S di $T(V)$ che sia invariante sotto l'azione di $T(L)$ per ogni automorfismo L di V, cioè tale che $T(L)(S)=S$ per ogni automorfismo L di V, è detto *spazio tensoriale.*

I principali esempi di spazi tensoriali sono dati dall'insieme dei tensori simmetrici e dall'insieme dei tensori alternanti. *Attenzione:* da qui in poi assumeremo sempre che *il campo* $\mathbb{K}$ *abbia caratteristica zero* (e gli esempi principali da tenere in mente sono $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Osservazione 1.3.1. Indicheremo con $\mathfrak{S}_p$ il *gruppo simmetrico* su p elementi, cioè il gruppo delle permutazioni di $\{1,\dots,p\}$. È noto che ogni permutazione $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ si può scrivere come prodotto di trasposizioni; questa scrittura non è unica, ma la parità del numero delle trasposizioni necessarie per scrivere σ lo è. In altre parole, se $\sigma=\tau_1\cdots\tau_r$ è una decomposizione di $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ come prodotto di trasposizioni, il *segno* $\operatorname{sgn}(\sigma)$ di σ dato da

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^r\in\{+1,-1\}$$

è ben definito indipendentemente dalla particolare decomposizione di σ come prodotto di trasposizioni scelta per calcolarlo. In particolare si ha $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ e $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$ per ogni σ, $\tau\in\mathfrak{S}_p$.

Definizione 1.3.2: Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione p-lineare $\varphi: V \times \cdots \times V \to W$ è *simmetrica* se

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \varphi(v_1, \ldots, v_p)$$

per ogni p-upla $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ e ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, p\}$. Lo *spazio tensoriale* $S_p(V)$ (rispettivamente, $S^p(V)$) dei *tensori simmetrici p-covarianti* (rispettivamente, *p-controvarianti*) è allora il sottospazio di $T_p(V)$ (rispettivamente, $T^p(V)$) costituito dalle applicazioni multilineari simmetriche a valori in $\mathbb{K}$.

Definizione 1.3.3: Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione p-lineare $\varphi: V \times \cdots \times V \to W$ è *alternante* (o *antisimmetrica*) se

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \varphi(v_1, \ldots, v_p)$$

per ogni p-upla $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ e ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, p\}$. Lo *spazio tensoriale* $\bigwedge_p(V)$ (rispettivamente, $\bigwedge^p(V)$) dei *tensori alternanti p-covarianti* (rispettivamente, *p-controvarianti*) è allora il sottospazio di $T_p(V)$ (rispettivamente, $T^p(V)$) costituito dalle applicazioni multilineari alternanti a valori in $\mathbb{K}$.

Esercizio 1.3.1. Dimostra che per ogni applicazione p-lineare $\varphi: V \times \cdots \times V \to W$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) φ è simmetrica;

(ii) il valore di φ non cambia scambiando due argomenti, cioè

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = \varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$ e $1 \le i < j \le p$;

(iii) se $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ sono le coordinate di φ rispetto alla base $\{v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_p}\}$ di $T_p(V)$, dove $\{v^1, \ldots, v^n\}$ è una base di V^*, allora $\varphi_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = \varphi_{i_1 \ldots i_p}$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Esercizio 1.3.2. Dimostra che per ogni applicazione p-lineare $\varphi: V \times \cdots \times V \to W$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) φ è alternante;

(ii) il valore di φ cambia di segno scambiando due argomenti, cioè

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$ e $1 \le i < j \le p$;

(iii) φ si annulla ogni volta che due argomenti sono uguali, cioè

$$\varphi(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_p) = 0$$

per ogni $v_1, \ldots, v, \ldots, v_p \in V$;

(iv) $\varphi(v_1, \ldots, v_p) = 0$ non appena i vettori $v_1, \ldots, v_p \in V$ sono linearmente dipendenti;

(v) se $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ sono le coordinate di φ rispetto alla base $\{v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_p}\}$ di $T_p(V)$, dove $\{v^1, \ldots, v^n\}$ è una base di V^*, allora $\varphi_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) \varphi_{i_1 \ldots i_p}$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Esercizio 1.3.3. Dimostra che gli spazi $S^p(V)$, $S_p(V)$, $\bigwedge^p(V)$ e $\bigwedge_p(V)$ sono effettivamente spazi tensoriali.

Ora, il prodotto tensoriale di due tensori simmetrici o alternanti non è necessariamente simmetrico o alternante.

Esempio 1.3.1. Sia $V = \mathbb{R}^2$, e indichiamo con $\{e_1, e_2\}$ la base canonica, e con $\{e^1, e^2\}$ la corrispondente base duale. Chiaramente, e_1, $e_2 \in V = \bigwedge^1 V = S^1(V) = V$, mentre $e_1 \otimes e_2 \notin \bigwedge^2 V \cup S^2(V)$. Infatti,

$$e_1 \otimes e_2(e^1, e^2) = e^1(e_1)e^2(e_2) = 1 \neq 0 = \pm e^1(e_2)e^2(e_1) = \pm e_1 \otimes e_2(e^2, e^1).$$

Esercizio 1.3.4. Dimostra che $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \in \bigwedge^2 V$ e che $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \in S^2(V)$ per ogni coppia v_1, $v_2 \in V$ di elementi di uno spazio vettoriale V.

Quest'ultimo esercizio fa sospettare che sia possibile definire un prodotto sui tensori alternanti (o simmetrici) in modo da ottenere un tensore alternante (o simmetrico). Per introdurlo, cominciamo con lo studiare meglio i tensori alternanti e simmetrici.

Proposizione 1.3.1: *Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, e $\phi\colon \mathcal{B}^p \to W$ una qualsiasi applicazione a valori in un altro spazio vettoriale W. Allora ϕ si può estendere a una applicazione p-lineare alternante (rispettivamente, simmetrica) $\Phi\colon V \times \cdots \times V \to W$ se e solo se*

$$\phi(v_{\mu_{\sigma(1)}}, \ldots, v_{\mu_{\sigma(p)}}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\phi(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p}) \tag{1.3.1}$$

(rispettivamente, $\phi(v_{\mu_{\sigma(1)}}, \ldots, v_{\mu_{\sigma(p)}}) = \phi(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p})$) per ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, p\}$, e ogni p-upla $(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p})$ di elementi di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione: Per la Proposizione 1.1.2, ogni $\phi\colon \mathcal{B}^p \to W$ si estende in modo unico a un'applicazione p-lineare a valori in W tramite la (1.1.2), dove $w_{\mu_1 \ldots \mu_p} = \phi(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p})$, ed è chiaro che l'estensione è alternante se e solo se vale la (1.3.1). Il ragionamento nel caso simmetrico è identico. □

Osservazione 1.3.2. In questo paragrafo d'ora in poi tratteremo solo i tensori alternanti e simmetrici controvarianti; risultati del tutto analoghi valgono anche per i tensori alternanti e simmetrici covarianti, in quanto $S_p(V) = S^p(V^*)$ e $\bigwedge_p(V) = \bigwedge^p(V^*)$. Inoltre, saremo principalmente interessati al caso alternante.

La Proposizione 1.3.1 implica che una $\varphi \in \bigwedge^p V$ è completamente determinata dai valori che assume sulle p-uple della forma $(v^{i_1}, \ldots, v^{i_p})$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$, dove $\mathcal{B}^* = \{v^1, \ldots, v^n\}$ è una base di V^*. Analogamente, una $\phi \in S^p(V)$ è completamente determinata dai valori che assume sulle p-uple della forma $(v^{i_1}, \ldots, v^{i_p})$ con $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$. Quindi

Corollario 1.3.2: *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \ge 1$ sul campo $\mathbb{K}$, e $p \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\dim S^p(V) = \binom{n+p-1}{p},$$

$$\dim \bigwedge^p V = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{se } 0 \le p \le n, \\ 0 & \text{se } p > n. \end{cases}$$

In particolare,

$$\dim \bigoplus_{0 \le p \le n} \bigwedge^p V = 2^n.$$

Dimostrazione: Per quanto visto, la dimensione di $\bigwedge^p V$ è uguale alla cardinalità dell'insieme delle p-uple $(i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$, cardinalità che è ben nota essere $\binom{n}{p}$ per $0 \le p \le n$ e 0 altrimenti. In particolare,

$$\dim \bigoplus_{0 \le p \le n} \bigwedge^p V = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Analogamente, la dimensione di $S^p(V)$ è uguale alla cardinalità dell'insieme delle p-uple $(i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$. Ora, si ha $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$ se e solo se

$$1 \le i_1 < i_2 + 1 < i_3 + 2 < \cdots < i_p + p - 1 \le n + p - 1.$$

Quindi l'insieme delle p-uple $(i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$ ha la stessa cardinalità dell'insieme delle p-uple $(j_1, \ldots, j_p)$ con $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n + p - 1$, e la tesi segue dal fatto che quest'ultimo insieme ha cardinalità $\binom{n+p-1}{p}$. □

Osservazione 1.3.3. In particolare, se V ha dimensione n allora $\dim \bigwedge^n V = 1$. Non è difficile trovare un generatore di $\bigwedge^n V$: fissata una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$, definiamo $\omega \in \bigwedge^n V$ ponendo

$$\omega(\varphi^1, \ldots, \varphi^n) = \det\bigl(\varphi^i(v_j)\bigr)$$

per ogni $\varphi^1, \ldots, \varphi^n \in V^*$. Siccome ω valutato sulla base duale di V^* è uguale al determinante della matrice identica, cioè 1, ne deduciamo che $\omega \ne O$; e quindi ogni altro elemento di $\bigwedge^n V$ è un multiplo di ω.

Esercizio 1.3.5. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V, e $1 \le p \le n$. Preso un multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$, definiamo $v_I \in \bigwedge^p V$ ponendo

$$v_I(\varphi^1, \ldots, \varphi^p) = \det\bigl(\varphi^h(v_{i_k})\bigr)$$

per ogni $\varphi^1, \ldots, \varphi^p \in V^*$. Dimostra che la famiglia delle applicazioni p-alternanti v_I al variare di I è una base di $\bigwedge^p V$.

Definizione 1.3.4: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. L'*algebra esterna* di V è lo spazio tensoriale

$$\bigwedge V = \bigoplus_{0 \le p \le n} \bigwedge^p V,$$

mentre l'*algebra simmetrica* di V è lo spazio tensoriale

$$S(V) = \bigoplus_{p \ge 0} S^p(V).$$

Abbiamo già osservato che $\bigwedge V$ e $S(V)$ non sono sottoalgebre di $T(V)$. Vogliamo allora introdurre un nuovo prodotto su $\bigwedge V$ e un nuovo prodotto su $S(V)$ in modo da renderli delle algebre. Cominciamo con la

Definizione 1.3.5: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. L'*operatore di antisimmetrizzazione* è l'applicazione lineare $\mathcal{A}\colon T^\bullet(V) \to \bigwedge V$ definita da

$$\mathcal{A}(\alpha)(\phi^1, \ldots, \phi^p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(\phi^{\sigma(1)}, \ldots, \phi^{\sigma(p)})$$

per ogni $\alpha \in T^p(V)$, e $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$. Analogamente, l'*operatore di simmetrizzazione* $\mathcal{S}\colon T^\bullet(V) \to S(V)$ è dato da

$$\mathcal{S}(\alpha)(\phi^1, \ldots, \phi^p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \alpha(\phi^{\sigma(1)}, \ldots, \phi^{\sigma(p)})$$

per ogni $\alpha \in T^p(V)$, e $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$.

Per ogni $\tau \in \mathfrak{S}_p$ si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha)(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p)}) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(\phi^{\tau(\sigma(1))}, \ldots, \phi^{\tau(\sigma(p))}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}\rho)\, \alpha(\phi^{\rho(1)}, \ldots, \phi^{\rho(p)}) = \operatorname{sgn}(\tau)\mathcal{A}(\alpha)(\phi^1, \ldots, \phi^p),\end{aligned}$$

per cui l'immagine di $\mathcal{A}$ è effettivamente contenuta in $\bigwedge V$. È inoltre evidente che $\mathcal{A}$ è lineare, e che è l'identità ristretta a $\bigwedge V$.

Esercizio 1.3.6. Dimostra che $\mathcal{S}\colon T^\bullet(V) \to S(V)$ è lineare, ha immagine contenuta in $S(V)$, ed è l'identità ristretta a $S(V)$.

Esercizio 1.3.7. Dato $\alpha \in T^p(V)$ dimostra che $\mathcal{S}(\alpha)$ è l'unico tensore p-controvariante simmetrico tale che $\mathcal{S}(\alpha)(\phi, \ldots, \phi) = \alpha(\phi, \ldots, \phi)$ per tutti i $\phi \in V^*$.

Definizione 1.3.6: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$. Allora il *prodotto esterno* di α e β è il $(p+q)$-tensore alternante dato da

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) \in \bigwedge^{p+q} V.$$

Estendendo per bilinearità otteniamo il *prodotto esterno* $\wedge\colon \bigwedge V \times \bigwedge V \to \bigwedge V$. La quadrupla $(\bigwedge V, +, \wedge, \cdot)$ è detta *algebra esterna* di V.

Definizione 1.3.7: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, $\alpha \in S^p(V)$ e $\beta \in S^q(V)$. Allora il *prodotto simmetrico* di α e β è il $(p+q)$-tensore simmetrico dato da

$$\alpha \odot \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathcal{S}(\alpha \otimes \beta) \in S^{p+q}(V).$$

Estendendo per bilinearità otteniamo il *prodotto simmetrico* $\odot\colon S(V) \times S(V) \to S(V)$. La quadrupla $\big(S(V), +, \odot, \cdot\big)$ è detta *algebra simmetrica* di V.

Osservazione 1.3.4. Attenzione: in alcuni testi il prodotto esterno è definito dalla formula

$$\alpha \wedge \beta = \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) \in \textstyle\bigwedge^{p+q} V$$

per ogni $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$. Analogamente, in alcuni testi (non necessariamente gli stessi) il prodotto simmetrico è definito dalla formula $\alpha \odot \beta = \mathcal{S}(\alpha \otimes \beta)$.

Proposizione 1.3.3: *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Allora la quadrupla $(\bigwedge V, +, \wedge, \cdot)$ è un'algebra con unità e anticommutativa, nel senso che è un'algebra con unità tale che*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \tag{1.3.2}$$

per ogni $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$.

Dimostrazione: La distributività di $\wedge$ rispetto alla somma e al prodotto per scalari seguono subito dalla definizione e dalla linearità di $\mathcal{A}$, ed è chiaro che $1 \in \bigwedge^0 V$ è un'unità. Rimangono da dimostrare l'associatività e l'anticommutatività (1.3.2).

Cominciamo con l'associatività. Prendiamo $\alpha \in \bigwedge^p V$, $\beta \in \bigwedge^q V$, $\gamma \in \bigwedge^r V$ e $\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r} \in V^*$. Allora

$$\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r}) \\
&\quad = \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}\mathcal{A}\big((\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma\big)(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r}) \\
&\quad = \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\tau)(\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q+r)}) \\
&\quad = \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\tau)(\alpha \wedge \beta)(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q)})\gamma(\phi^{\tau(p+q+1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q+r)}) \\
&\quad = \frac{1}{(p+q)!}\frac{1}{p!q!r!} \times \\
&\qquad \times \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(\phi^{\sigma_\tau(1)}, \ldots, \phi^{\sigma_\tau(p)})\beta(\phi^{\sigma_\tau(p+1)}, \ldots, \phi^{\sigma_\tau(p+q)})\gamma(\phi^{\tau(p+q+1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q+r)}),
\end{aligned}$$

dove $\big(\sigma_\tau(1), \ldots, \sigma_\tau(p+q)\big)$ è la $(p+q)$-upla ottenuta applicando la permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$ alla $p+q$-upla $\big(\tau(1), \ldots, \tau(p+q)\big)$. Ora, è chiaro che $\big(\sigma_\tau(1), \ldots, \sigma_\tau(p+q), \tau(p+q+1), \ldots, \tau(p+q+r)\big)$ è ancora una permutazione di $(1, \ldots, p+q+r)$, il cui segno è esattamente $\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$. Inoltre, ogni permutazione in $\mathfrak{S}_{p+q+r}$ può essere ottenuta tramite questo procedimento in esattamente $(p+q)!$ modi diversi; quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r}) \\
&\quad = \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\rho)\alpha(\phi^{\rho(1)}, \ldots, \phi^{\rho(p)})\beta(\phi^{\rho(p+1)}, \ldots, \phi^{\rho(p+q)})\gamma(\phi^{\rho(p+q+1)}, \ldots, \phi^{\rho(p+q+r)}).
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

In maniera analoga si dimostra che quest'ultima espressione è uguale a $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r})$, e l'associatività è verificata.

Rimane da dimostrare la anticommutatività. Se $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$ abbiamo

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\tau)\alpha(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p)})\beta(\phi^{\tau(p+1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q)}),\\ &= (-1)^{pq}\frac{1}{p!q!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\rho)\alpha(\phi^{\rho(q+1)}, \ldots, \phi^{\rho(q+p)})\beta(\phi^{\rho(1)}, \ldots, \phi^{\rho(q)})\\ &= (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q}),\end{aligned}$$

per ogni $\phi^1, \ldots, \phi^{p+q} \in V^*$, e ci siamo. □

Esercizio 1.3.8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Dimostra che la quadrupla $\big(S(V), +, \odot, \cdot\big)$ è un'algebra con unità commutativa.

Osservazione 1.3.5. Ripetendo il ragionamento che ha portato alla (1.3.3) si dimostra che per ogni r-upla $\alpha_1 \in \bigwedge^{k_1} V, \ldots, \alpha_r \in \bigwedge^{k_r} V$ e per ogni $\phi^1, \ldots, \phi^{k_1+\cdots+k_r} \in V^*$ si ha

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r(\phi^1, \ldots, \phi^{k_1+\cdots+k_r})\\ &\quad = \frac{1}{k_1! \cdots k_r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{k_1+\cdots+k_r}} \operatorname{sgn}(\tau)\, \alpha_1(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(k_1)}) \cdots \alpha_r(\phi^{\tau(k_1+\cdots+k_{r-1}+1)}, \ldots, \phi^{\tau(k_1+\cdots+k_r)}).\end{aligned}$$

In particolare,

$$\begin{aligned}v_1 \wedge \cdots \wedge v_p(\phi^1, \ldots, \phi^p) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau)\, \phi^{\tau(1)}(v_1) \cdots \phi^{\tau(p)}(v_p)\\ &= \det\big(\phi^h(v_k)\big)\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$ e $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$.

Esercizio 1.3.9. Dimostra che

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau)\, v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(p)}$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$.

Esercizio 1.3.10. Dimostra che il prodotto esterno è l'unica applicazione da $\bigwedge V \times \bigwedge V$ in $\bigwedge V$ che sia associativa, bilineare, anticommutativa e soddisfi (1.3.4).

Osservazione 1.3.6. L'anticommutatività implica chiaramente che se $\alpha \in \bigwedge^p V$ con p dispari allora $\alpha \wedge \alpha = O$. Questo non è più vero se p è pari: per esempio, se $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ si ha

$$\alpha \wedge \alpha = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq O.$$

Avendo a disposizione il prodotto esterno non è difficile trovare una base dell'algebra esterna:

Proposizione 1.3.4: *Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora una base di $\bigwedge^p V$ è data da*

$$\mathcal{B}_p = \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n\}.$$

Dimostrazione: Siccome $\mathcal{B}_p$ contiene $\dim \bigwedge^p V$ elementi, ci basta dimostrare che sono linearmente indipendenti. Sia $\{v^1, \ldots, v^n\}$ la base duale di V^*; la Proposizione 1.1.2 ci dice che per vedere se gli elementi di $\mathcal{B}_p$ sono linearmente indipendenti basta calcolare il loro valore sulle p-uple di elementi della base duale e verificare che si ottengono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{K}^{n^p}$. Siccome i $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$ sono alternanti, è sufficiente calcolarne il valore su p-uple $(v^{j_1},\dots,v^{j_p})$ con $1\le j_1<\cdots<j_p\le n$. Usando (1.3.4) otteniamo quindi

$$
\begin{aligned}
v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_p}(v^{j_1},\dots,v^{j_p}) &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}\operatorname{sgn}(\tau)v^{j_{\tau(1)}}(v_{i_1})\cdots v^{j_{\tau(p)}}(v_{i_p})\\
&= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}\operatorname{sgn}(\tau)\delta_{i_1}^{j_{\tau(1)}}\cdots\delta_{i_p}^{j_{\tau(p)}}\\
&= \begin{cases}0 & \text{se } (j_1,\dots,j_p)\ne(i_1,\dots,i_p),\\ 1 & \text{se } (j_1,\dots,j_p)=(i_1,\dots,i_p),\end{cases}
\end{aligned}
$$

in quanto $i_1<\cdots<i_p$ e l'unica permutazione che conserva l'ordine è l'identità, e ci siamo. □

Esercizio 1.3.11. Sia $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V. Per ogni multi-indice $I=(i_1,\dots,i_p)$ con $1\le i_1<\cdots<i_p\le n$ dimostra che $v_I=v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_p}$, dove $v_I\in\bigwedge^p(V)$ è definito nell'Esercizio 1.3.5.

Osservazione 1.3.7. Sia $(v_1,\dots,v_p)$ una p-upla di elementi di uno spazio vettoriale V. Se due di questi elementi coincidono, l'anticommutatività implica che $v_1\wedge\cdots\wedge v_p=O$. Più in generale, si vede subito (esercizio) che $v_1\wedge\cdots\wedge v_p=O$ se $v_1,\dots,v_p$ sono linearmente dipendenti. Viceversa, se $\{v_1,\dots,v_p\}$ sono linearmente indipendenti, possiamo completarli a una base di V e la Proposizione 1.3.4 ci assicura che $v_1\wedge\cdots\wedge v_p\ne O$. In effetti, l'elemento $v_1\wedge\cdots\wedge v_p$ risulta essere univocamente determinato (a meno di una costante moltiplicativa non nulla) dal p-piano generato da $\{v_1,\dots,v_p\}$. Più precisamente, sia $\{w_1,\dots,w_p\}$ un'altra base dello stesso p-piano, e sia $A=(a_h^k)\in GL(p,\mathbb{K})$ la matrice tale che $w_h=a_h^1v_1+\cdots+a_h^pv_p$ per $h=1,\dots,p$. Allora

$$w_1\wedge\cdots\wedge w_p=(\det A)\,v_1\wedge\cdots\wedge v_p.$$

Infatti se $\phi^1,\dots,\phi^p\in V^*$ si ha

$$
\begin{aligned}
w_1\wedge\cdots\wedge w_p(\phi^1,\dots,\phi^p) &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}\operatorname{sgn}(\tau)\phi^{\tau(1)}(w_1)\cdots\phi^{\tau(p)}(w_p)\\
&= \sum_{j_1=1}^p\cdots\sum_{j_p=1}^p a_1^{j_1}\cdots a_p^{j_p}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}\operatorname{sgn}(\tau)\phi^{\tau(1)}(v_{j_1})\cdots\phi^{\tau(p)}(v_{j_p})\\
&= \sum_{j_1=1}^p\cdots\sum_{j_p=1}^p a_1^{j_1}\cdots a_p^{j_p}v_{j_1}\wedge\cdots\wedge v_{j_p}(\phi^1,\dots,\phi^p)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\operatorname{sgn}(\sigma)a_1^{\sigma(1)}\cdots a_p^{\sigma(p)}v_1\wedge\cdots\wedge v_p(\phi^1,\dots,\phi^p)\\
&= \det(A)v_1\wedge\cdots\wedge v_p(\phi^1,\dots,\phi^p),
\end{aligned}
$$

grazie all'anticommutatività.

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi.

Esercizio 1.3.12. Dimostra che per ogni $\omega\in\bigwedge^n V$, $T\in\operatorname{Hom}(V^*,V^*)$ e $\phi^1,\dots,\phi^n\in V^*$, dove $n=\dim V$, si ha $\omega\bigl(T(\phi^1),\dots,T(\phi^n)\bigr)=(\det T)\omega(\phi^1,\dots,\phi^n)$.

Esercizio 1.3.13. Dimostra che $T^2(V)=S^2(V)\oplus\bigwedge^2 V$, e che $e_1\otimes e_2\otimes e_3\notin S^3(\mathbb{R}^3)\oplus\bigwedge^3\mathbb{R}^3$, dove $\{e_1,e_2,e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.3.14. Se V e W sono spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, dimostra che ogni applicazione lineare $L\in\operatorname{Hom}(V,W)$ si estende a un'applicazione lineare $\tilde{L}\in\operatorname{Hom}(\bigwedge V,\bigwedge W)$ tale che $\tilde{L}(1)=1$ e $\tilde{L}(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)=L(v_1)\wedge\cdots\wedge L(v_p)$ per ogni $v_1,\dots,v_p\in V$.

Esercizio 1.3.15. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e $F\colon V^p\to\bigwedge^p V$ l'applicazione p-lineare alternante data da $F(v_1,\dots,v_p)=v_1\wedge\cdots\wedge v_p$. Dimostra che la coppia $(\bigwedge^p V,F)$ è l'unica coppia (a meno di isomorfismi) che soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni applicazione p-lineare alternante $A\colon V^p\to W$ a valori in uno spazio vettoriale W esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{A}\colon\bigwedge^p V\to W$ tale che $A=\tilde{A}\circ F$.

Esercizio 1.3.16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Dimostra che $(\bigwedge^p V)^*$ è isomorfo a $\bigwedge^p(V^*)$. (*Suggerimento:* Usa l'esercizio precedente e l'applicazione $\Phi\colon (V^*)^p \to (\bigwedge^p V)^*$ definita da

$$\Phi(\phi^1,\dots,\phi^p)(v_1\wedge\cdots\wedge v_p) = \det\bigl(\phi^i(v_j)\bigr)$$

per $v_1,\dots,v_p \in V$ e $\phi^1,\dots,\phi^p \in V^*$.)

Esercizio 1.3.17. Se $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare sullo spazio vettoriale V, sia $\langle\!\langle\cdot\,,\cdot\rangle\!\rangle$ il prodotto scalare su $T(V)$ costruito nella Proposizione 1.2.1. Dimostra che

$$\langle\!\langle v_1\wedge\cdots\wedge v_p, w_1\wedge\cdots\wedge w_p\rangle\!\rangle = p!\det(\langle v_i, w_j\rangle)$$

per ogni $v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_p \in V$.

Esercizio 1.3.18. Enuncia e dimostra per l'algebra simmetrica $S(V)$ risultati analoghi a quelli contenuti nei quattro esercizi precedenti.

Esercizio 1.3.19. Sia $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dimostra che per ogni u, $w \in \mathbb{R}^3 = \bigwedge^1\mathbb{R}^3$ le coordinate di $u\wedge v \in \bigwedge^2\mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\{e_2\wedge e_3, e_3\wedge e_1, e_1\wedge e_2\}$ sono esattamente le coordinate del classico prodotto vettore di u e v rispetto alla base canonica.

1.4 Tensori simplettici

Dedichiamo quest'ultimo paragrafo a un tipo particolare di 2-tensori covarianti alternanti, utili in diverse questioni di geometria differenziale e di fisica matematica. Di nuovo, lavoriamo su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero.

Definizione 1.4.1: Un 2-tensore covariante $\omega \in T_2(V)$ è detto *non-degenere* se $\omega(v,w)=0$ per ogni $w\in V$ implica $v=O$. Un *tensore simplettico* è un 2-tensore covariante alternante non-degenere. Una coppia (V,ω) dove V è uno spazio vettoriale e $\omega\in\bigwedge_2 V$ è un tensore simplettico, è detta *spazio vettoriale simplettico.*

Esercizio 1.4.1. Sia $\omega\in T_2(V)$ un 2-tensore covariante su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) ω è non-degenere.
(ii) L'applicazione $\tilde\omega\colon V\to V^*$ data da $\tilde\omega(v)(w)=\omega(v,w)$ per ogni v, $w\in V$ è un isomorfismo.
(iii) Scelta una base $\{v^1,\dots,v^n\}$ di V^*, la matrice (ω_{hk}) delle coordinate di ω rispetto alla base $\{v^h\otimes v^k\}$ di $T_2(V)$ è invertibile.

Esempio 1.4.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2n$. Scegliamo una base $\{v_1,w_1,\dots,v_n,w_n\}$, e indichiamo con $\{v^1,w^1,\dots,v^n,w^n\}$ la corrispondente base duale. Sia allora $\omega\in\bigwedge_2 V$ dato da

$$\omega=\sum_{j=1}^n v^j\wedge w^j. \tag{1.4.1}$$

Vogliamo dimostrare che ω è un tensore simplettico. Prima di tutto, la sua azione sugli elementi della base è data da

$$\omega(v_i,w_j)=-\omega(w_j,v_i)=\delta_{ij},\qquad \omega(v_i,v_j)=\omega(w_i,w_j)=0 \tag{1.4.2}$$

per ogni $1\le i,j\le n$. Supponiamo allora che $v=\sum_i(a^iv_i+b^iw_i)\in V$ sia tale che $\omega(v,w)=0$ per ogni $w\in V$. In particolare $0=\omega(v,v_j)=-b^j$ e $0=\omega(v,w_j)=a^j$ per $1\le j\le n$; quindi $v=O$ e ω è non-degenere.

Definizione 1.4.2: Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico. Il *complemento simplettico* di un sottospazio $W\subseteq V$ è il sottospazio

$$W^\perp=\{v\in V\mid \omega(v,w)=0 \text{ per ogni } w\in W\}.$$

Contrariamente al caso dei complementi ortogonali, non è detto che $W\cap W^\perp=\{O\}$. Per esempio, se $\dim W=1$ allora l'antisimmetria di ω implica che $W\subseteq W^\perp$. Questa osservazione suggerisce di classificare i sottospazi di uno spazio vettoriale simplettico come segue:

Definizione 1.4.3: Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico. Un sottospazio $W \subseteq V$ di V sarà detto *simplettico* se $W \cap W^\perp = \{O\}$; *isotropo* se $W \subseteq W^\perp$; *coisotropo* se $W \supseteq W^\perp$; *Lagrangiano* se $W = W^\perp$.

Esercizio 1.4.2. Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico, e $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Dimostra che:
(i) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.
(ii) $(W^\perp)^\perp = W$.
(iii) W è simplettico se e solo se $\omega|_{W\times W}$ è non-degenere.
(iv) W è isotropo se e solo se $\omega|_{W\times W} = O$.
(v) W è Lagrangiano se e solo se $\omega|_{W\times W} = O$ e $\dim V = 2\dim W$.

L'unico risultato che dimostriamo sui tensori simplettici è che possono sempre essere espressi nella forma indicata dall'Esempio 1.4.2.

Proposizione 1.4.1: *Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico. Allora $\dim V = 2n$ è pari, ed esiste una base di V rispetto a cui ω è data da* (1.4.1).

Dimostrazione: Si verifica facilmente che ω è della forma (1.4.1) rispetto a una base $\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ di V se e solo se l'azione di ω sui vettori della base è data da (1.4.2). Dimostreremo allora che esiste una base per cui (1.4.2) vale procedendo per induzione su $m = \dim V$.

Per $m = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che (V,ω) sia uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $m \geq 1$, e che la proposizione sia vera per tutti gli spazi vettoriali simplettici di dimensione minore di m. Sia $v_1 \in V$ un vettore non nullo. Essendo ω non-degenere, esiste un vettore $w_1 \in V$ tale che $\omega(v_1, w_1) \neq 0$; a meno di moltiplicare w_1 per una costante, possiamo anche supporre che $\omega(v_1, w_1) = 1$. Siccome ω è alternante, v_1 e w_1 sono linearmente indipendenti.

Sia W il sottospazio generato da v_1 e w_1. L'Esercizio 1.4.2.(i) ci assicura che $\dim W^\perp = m - 2$. Siccome $\omega|_{W\times W}$ è chiaramente non-degenere, l'Esercizio 1.4.2.(iii) implica che W è simplettico; ma allora $W \cap W^\perp = \{O\}$ e quindi, grazie all'Esercizio 1.4.2.(ii), anche $W^\perp$ è simplettico. Per l'ipotesi induttiva, $\dim W^\perp$ è pari, ed esiste una base $\{v_2, w_2, \dots, v_n, w_n\}$ di $W^\perp$ che soddisfa (1.4.2). Ma allora $\{v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_n, w_n\}$ è una base di V che soddisfa (1.4.2), e ci siamo. $\square$

Definizione 1.4.4: Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico. Una base $\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ di V rispetto a cui ω è data da (1.4.1) è detta *base simplettica* di V.

Esercizio 1.4.3. Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$. Dimostra che per ogni sottospazio simplettico (rispettivamente, isotropo, coisotropo, Lagrangiano) W di V esiste una base simplettica $\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ di V tale che:
(i) se W è simplettico allora $W = \mathrm{Span}(v_1, w_1, \dots, v_k, w_k)$ per qualche $1 \leq k \leq n$;
(ii) se W è isotropo allora $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ per qualche $1 \leq k \leq n$;
(iii) se W è coisotropo allora $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k)$ per qualche $1 \leq k \leq n$;
(iv) se W è Lagrangiano allora $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

Capitolo 2

Varietà

2.1 Varietà differenziabili

Una varietà topologica è un insieme localmente fatto come un aperto di $\mathbb{R}^n$; se inoltre due realizzazioni diverse di un pezzo dell'insieme come aperto di $\mathbb{R}^n$ determinano le stesse funzioni C^∞, abbiamo una varietà differenziabile.

Vediamo come concretizzare la frase precedente (che detta così non ha molto senso).

Definizione 2.1.1: Sia M un insieme. Una *n-carta* (U, φ) di M è un'applicazione *bigettiva* $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, dove U è un sottoinsieme di M e V è un *aperto* di $\mathbb{R}^n$. Se $p \in U$ diremo che (U, φ) è una carta *in* p; se inoltre $\varphi(p) = O \in \mathbb{R}^n$ diremo che la carta è *centrata* in p. Se scriviamo in coordinate $\varphi(q) = \bigl(x^1(q), \ldots, x^n(q)\bigr)$, diremo che $(x^1, \ldots, x^n)$ sono le *coordinate locali* nella carta data. L'inversa $\varphi^{-1}\colon V \to U$ è detta *parametrizzazione locale* (in p).

Definizione 2.1.2: Due n-carte (U, φ) e (V, ψ) su M sono *compatibili* se $U \cap V = \varnothing$, oppure $U \cap V \neq \varnothing$, gli insiemi $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$, e $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ è un diffeomorfismo di classe C^∞. Il diffeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1}$ viene detto *cambiamento di carta* (o *cambiamento di coordinate*).

Vale la pena di sottolineare esplicitamente che il punto cruciale di questa definizione è il fatto che il cambiamento di carta (che a priori è soltanto una bigezione) *è un diffeomorfismo* C^∞. In altre parole, due carte compatibili ricreano su M la *stessa* struttura differenziabile, lo stesso modo di calcolare le derivate (oltre che, in particolare, la stessa topologia). È proprio questa compatibilità C^∞ la chiave che permetterà di usare ricoprimenti aperti formati da carte compatibili per definire in maniera efficiente e significativa il concetto di varietà differenziabile come qualcosa localmente fatto come un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 2.1.1. Se (U, φ) è una n-carta in $p \in M$, e $\chi\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo con l'immagine, allora $(U, \chi \circ \varphi)$ è ancora una n-carta in p, compatibile con qualsiasi carta compatibile con (U, φ). In particolare, se χ è la traslazione $\chi(x) = x - \varphi(p)$, ponendo $\tilde{\varphi} = \chi \circ \varphi = \varphi - \varphi(p)$ otteniamo una carta $(U, \tilde{\varphi})$ centrata in p e compatibile con qualsiasi carta compatibile con (U, φ).

Osservazione 2.1.2. Se (U, φ) è una n-carta in $p \in M$ e $W \subset \varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente $\varphi(p)$, allora anche $\bigl(\varphi^{-1}(W), \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\bigr)$ è una n-carta in p, compatibile con qualsiasi carta compatibile con (U, φ). In particolare, possiamo trovare carte piccole quanto ci pare.

Definizione 2.1.3: Un *atlante* di *dimensione* n su un insieme M è una famiglia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di n-carte a due a due compatibili e tali che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Una *varietà* (*differenziabile*) di *dimensione* n è una coppia $(M, \mathcal{A})$, dove M è un insieme e $\mathcal{A}$ è un atlante di dimensione n su M.

Osservazione 2.1.3. In queste note parleremo solo di varietà di classe C^∞, ma è chiaro che lo stesso approccio può essere usato per definire varietà di classe C^k con $k \in \mathbb{N}$ (o varietà analitiche reali, o varietà olomorfe), semplicemente richiedendo che i cambiamenti di carta siano diffeomorfismi di classe C^k (o analitici reali, od olomorfi) invece che C^∞.

A volte nella definizione di varietà differenziabile si richiede che l'atlante $\mathcal{A}$ sia massimale (rispetto all'inclusione) nella famiglia di tutti gli atlanti sull'insieme M. I prossimi esercizi mostrano che questa richiesta non è necessaria, in quanto ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale:

Esercizio 2.1.1. Diremo che due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ su uno stesso insieme M sono *compatibili* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è ancora un atlante su M. Dimostra che quella di compatibilità è una relazione d'equivalenza fra gli atlanti su M, e che due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono compatibili se e solo se ogni carta di A è compatibile con tutte le carte di $\mathcal{B}$, e ogni carta di $\mathcal{B}$ è compatibile con tutte le carte di $\mathcal{A}$.

Esercizio 2.1.2. Sia $\mathcal{A}$ un atlante di dimensione n su un insieme M, e (U, φ), (V, ψ) due n-carte di M, entrambe compatibili con tutte le carte di $\mathcal{A}$. Dimostra che allora (U, φ) e (V, ψ) sono compatibili fra loro.

Esercizio 2.1.3. Sia $\mathcal{A}$ un atlante di dimensione n su M. Dimostra che esiste un unico atlante $\tilde{\mathcal{A}}$ massimale (rispetto all'inclusione) che contiene $\mathcal{A}$, ottenuto considerando tutte le carte locali compatibili con quelle di $\mathcal{A}$. A volte, l'atlante $\tilde{\mathcal{A}}$ viene detto *struttura differenziabile* indotta da $\mathcal{A}$.

Spesso e volentieri la definizione di varietà differenziabile prevede che l'insieme M sia uno spazio topologico, nel qual caso i domini delle carte locali devono essere degli aperti e le carte locali degli omeomorfismi con l'immagine. In realtà, il prossimo esercizio mostra come la struttura di varietà così come l'abbiamo definita noi induce necessariamente una topologia su M anche quando M nasce semplicemente come insieme:

Esercizio 2.1.4. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di dimensione n su un insieme M. Dimostra che nel seguente modo si definisce una topologia su M: diremo che $A \subseteq M$ è aperto se e solo se $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ per ogni carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$. Dimostra inoltre che questa è l'unica topologia su M per cui tutti gli U_α sono aperti e tutte le φ_α sono degli omeomorfismi con l'immagine. Questa topologia è detta *indotta* dalla struttura di varietà differenziabile.

Definizione 2.1.4: Sia M uno spazio topologico. Diremo che una n-carta (U, φ) su M è *compatibile* con la topologia data se U è aperto in M e φ è un omeomorfismo con l'immagine. Diremo che un atlante $\mathcal{A}$ su M è *compatibile* con la topologia data se tutte le sue carte lo sono, per cui induce su M la topologia data.

Se nel seguito ci troveremo a definire una struttura di varietà differenziabile su uno spazio topologico, a meno di avviso contrario *supporremo sempre che la struttura di varietà differenziabile induca la topologia data,* e non un'altra; gli atlanti saranno sempre compatibili con la topologia.

Osservazione 2.1.4. Si può dimostrare che se uno spazio topologico M ammette una struttura di varietà differenziabile di dimensione n *non può* ammettere anche una struttura di varietà differenziabile di dimensione $m \neq n$. Questo segue dal fatto che due aperti di spazi euclidei di diversa dimensione non possono mai essere omeomorfi, che è un risultato noto come *Teorema dell'invarianza della dimensione.*

Osservazione 2.1.5. Per motivi che discuteremo nel prossimo paragrafo, *supporremo sempre che la topologia indotta sulle nostre varietà sia di Hausdorff e a base numerabile.* È facile (vedi l'Esempio 2.1.5 più oltre) costruire esempi di varietà non Hausdorff; costruire esempi di varietà Hausdorff non a base numerabile è molto più delicato, ma sfortunatamente esistono.

Osservazione 2.1.6. Chiaramente, la topologia di una varietà ha le stesse proprietà locali della topologia di $\mathbb{R}^n$. In particolare, è localmente compatta, localmente connessa e localmente connessa per archi (per cui le componenti connesse sono aperte e coincidono con le componenti connesse per archi).

Esempio 2.1.1. Un aperto U di $\mathbb{R}^n$ è banalmente una varietà n-dimensionale, con un atlante $\mathcal{A} = \{(U, \mathrm{id}_U)\}$ costituito da un'unica carta.

Esempio 2.1.2. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione qualsiasi. Allora il *grafico* Γ_F di F, che è l'insieme

$$\Gamma_F = \bigl\{ \bigl(x, F(x)\bigr) \in \mathbb{R}^{n+m} \bigm| x \in U \bigr\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

è una varietà n-dimensionale, con un atlante costituito dall'unica carta $\varphi\colon \Gamma_F \to U$ data da $\varphi\bigl(x, F(x)\bigr) = x$. *Attenzione:* la topologia indotta da questa struttura di varietà differenziabile coincide con la topologia di Γ_F come sottospazio di $\mathbb{R}^{n+m}$ se e solo se F è continua (esercizio). Vedremo inoltre nell'Esericizio 2.5.2 che Γ_F è (in un senso naturale che definiremo nel paragrafo 2.5) una sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+m}$ se e solo se F è C^∞.

Esempio 2.1.3. Se M è una varietà e $U \subseteq M$ è aperto (rispetto alla topologia indotta, ovviamente), allora anche U ha una naturale struttura di varietà, della stessa dimensione. Infatti, se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante di M, allora $\{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U})\}$ è un atlante per U.

Esempio 2.1.4. Se M è una varietà m-dimensionale, e N è una varietà n-dimensionale, allora $M \times N$ ha una struttura naturale di varietà $(m+n)$-dimensionale. Infatti, se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante di M, e $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ è un atlante di N, allora $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ è un atlante di $M \times N$, dove l'applicazione $\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^{n+m}$ è definita da $\varphi_\alpha \times \psi_\beta(x, y) = \big(\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\big)$.

Esempio 2.1.5. Sia $M = \mathbb{R} \cup \{0'\}$, dove $0'$ è un punto non appartenente a $\mathbb{R}$. Possiamo definire su M una struttura di varietà differenziabile di dimensione 1 con le seguenti due carte: $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$ e $(\mathbb{R}^* \cup \{0'\}, \varphi)$, dove $\varphi : \mathbb{R}^* \cup \{0'\} \to \mathbb{R}$ è data da

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{se } x = 0'. \end{cases}$$

Si verifica subito che $\{(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R}), (\mathbb{R}^* \cup \{0'\}, \varphi)\}$ è un atlante per M, ma la topologia indotta non è di Hausdorff: i punti 0 e $0'$ non hanno intorni disgiunti. Se ripetiamo l'operazione aggiungendo, invece di un punto solo, una quantità più che numerabile di punti otteniamo una varietà non a base numerabile, ma neanche di Hausdorff.

Esempio 2.1.6. Chiaramente, $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})\}$ è un atlante sulla retta reale. Anche $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$, dove $\varphi(t) = t^3$, è un atlante su $\mathbb{R}$, che induce la stessa topologia, ma le due carte $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$ e $(\mathbb{R}, \varphi)$ *non* sono compatibili. Quindi persino sulla retta possiamo definire due diverse strutture di varietà differenziabili. In realtà, vedremo che queste due strutture sono diverse ma diffeomorfe, per cui possono sostanzialmente essere identificate (vedi l'Esempio 2.2.2).

Esempio 2.1.7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$; vogliamo definire una naturale struttura di varietà n-dimensionale su V. Fissata una base $\mathcal{B}$ di V, indichiamo con $\varphi_\mathcal{B} : V \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione che associa a ogni vettore $v \in V$ le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{A} = \{(V, \varphi_\mathcal{B})\}$ è un atlante di V costituito da una sola carta. Due basi diverse inducono atlanti compatibili: infatti, se $\mathcal{C}$ è un'altra base di V, il cambiamento di coordinate $\varphi_\mathcal{C} \circ \varphi_\mathcal{B}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non è altro che l'applicazione lineare definita dalla matrice di cambiamento di base.

Esempio 2.1.8. Il *gruppo generale lineare* $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti reali è una varietà di dimensione n^2, in quanto è un aperto dello spazio $M_{n,n}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici $n \times n$ a coefficienti reali, spazio che possiamo ovviamente identificare con $\mathbb{R}^{n^2}$. Più in generale, lo spazio $GL(V)$ degli automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione n su $\mathbb{R}$ è una varietà di dimensione n^2. Infatti, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, indichiamo con $\varphi_\mathcal{B} : GL(V) \to GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ l'applicazione che associa a ogni automorfismo $L \in GL(V)$ la matrice che lo rappresenta rispetto alla base $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{A} = \big\{\big(GL(V), \varphi_\mathcal{B}\big)\big\}$ è un atlante di $GL(V)$ costituito da una sola carta. Due basi diverse inducono atlanti compatibili: infatti, se $\mathcal{C}$ è un'altra base di V, il cambiamento di coordinate $\varphi_\mathcal{C} \circ \varphi_\mathcal{B}^{-1} : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ non è altro che l'applicazione $X \mapsto B^{-1} X B$, dove $B \in GL(n, \mathbb{R})$ è la matrice di cambiamento di base.

Definizione 2.1.5: La *sfera* n-dimensionale di *raggio* $R > 0$ (e centro l'origine) è definita da

$$S^n_R = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = R\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

La *palla* n-dimensionale di *raggio* $R > 0$ (e centro l'origine) è invece definita da

$$B^n_R = \{y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < R\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Quando $R = 1$, scriveremo S^n al posto di S^n_1 e B^n al posto di B^n_1.

Esempio 2.1.9. La sfera S^n_R ammette una naturale struttura di varietà n-dimensionale, compatibile con la topologia indotta da $\mathbb{R}^{n+1}$. Per dimostrarlo, dobbiamo costruire un atlante; in effetti ne costruiremo tre, uno in questo esempio e due negli esempi successivi, tutti compatibili. Per il primo atlante poniamo

$$U^\pm_j = \{x \in S^n_R \mid \pm x^j > 0\},$$

per $j = 1, \ldots, n+1$, in modo che $S^n_R = \bigcup_{j=1}^{n+1} (U^+_j \cup U^-_j)$, e definiamo $\varphi^\pm_j : U^\pm_j \to B^n_R \subset \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\varphi^\pm_j(x) = (x^1, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^n).$$

Chiaramente

$$(\varphi_j^{\pm})^{-1}(y) = \left(y^1, \ldots, y^{j-1}, \pm\sqrt{R^2 - \|y\|^2}, y^j, \ldots, y^n\right),$$

per cui ciascuna $\varphi_j^{\pm}$ è una bigezione fra $U_j^{\pm}$ e B_R^n, e le coppie $(U_j^{\pm}, \varphi_j^{\pm})$ sono delle n-carte. Inoltre ciascun $U_j^{\pm}$ è aperto in S_R^n, e ciascuna $\varphi_j^{\pm}$ è un omeomorfismo con l'immagine; quindi per concludere ci basta verificare che queste carte sono a due a due compatibili. Per semplicità, verificheremo la compatibilità fra (U_1^+, φ_1^+) e (U_2^-, φ_2^-); la compatibilità fra le altre carte si verifica in modo del tutto analogo. Prima di tutto,

$$U_1^+ \cap U_2^- = \{x \in S_R^n \mid x^1 > 0, x^2 < 0\},$$

per cui

$$\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^-) = \{y \in B_R^n \mid y^1 < 0\} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2^-(U_1^+ \cap U_2^-) = \{y \in B_R^n \mid y^1 > 0\}$$

sono aperti di $\mathbb{R}^n$. Inoltre,

$$\varphi_2^- \circ (\varphi_1^+)^{-1}(y) = \left(\sqrt{R^2 - \|y\|^2}, y^2, \ldots, y^n\right)$$

è un diffeomorfismo di classe C^∞ fra $\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^-)$ e $\varphi_2^-(U_1^+ \cap U_2^-)$, e la compatibilità è verificata.

Esempio 2.1.10. L'atlante su S_R^n costruito nell'esempio precedente conteneva $2(n+1)$ carte; vogliamo ora costruire un atlante di S_R^n compatibile col precedente e che contenga solo due carte. L'idea è che le carte locali sono date dalle proiezioni stereografiche. Sia $N = (0, \ldots, 0, R) \in S_R^n$ il polo nord, e indichiamo con $\varphi_N \colon S_R^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ la *proiezione stereografica,* cioè l'applicazione che a ciascun $p \in S_R^n \setminus \{N\}$ associa l'intersezione della retta passante per N e p con l'iperpiano $\{x^{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (iperpiano che identifichiamo con $\mathbb{R}^n$ nel modo ovvio).

La retta per N e $p = (p^1, \ldots, p^n, p^{n+1}) \in S_R^n \setminus \{N\}$ è parametrizzata da $t \mapsto N + t(p - N)$. Quindi interseca l'iperpiano $\{x^{n+1} = 0\}$ quando t soddisfa l'equazione $R + t(p^{n+1} - R) = 0$, per cui la proiezione stereografica è data da

$$\varphi_N(p) = \frac{R}{R - p^{n+1}}(p^1, \ldots, p^n).$$

Per mostrare che φ_N è un omeomorfismo fra $S_R^n \setminus \{N\}$ ed $\mathbb{R}^n$ calcoliamo l'inversa. Se $\varphi_N(p) = x$ dobbiamo avere $x^j = Rp^j/(R - p^{n+1})$ per $j = 1, \ldots, n$. Elevando al quadrato, sommando e ricordando che $p \in S_R^n$ otteniamo

$$\|x\|^2 = \frac{R^2}{(R - p^{n+1})^2}(R^2 - |p^{n+1}|^2).$$

Questa equazione in p^{n+1} ha solo due soluzioni: $p^{n+1} = R$, che dev'essere esclusa in quanto corrisponde a $p = N$, e

$$p^{n+1} = R\,\frac{\|x\|^2 - R^2}{\|x\|^2 + R^2}.$$

Quindi

$$\varphi_N^{-1}(x) = \left(\frac{2R^2 x^1}{\|x\|^2 + R^2}, \ldots, \frac{2R^2 x^n}{\|x\|^2 + R^2}, R\,\frac{\|x\|^2 - R^2}{\|x\|^2 + R^2}\right)$$

è l'inversa di φ_N, per cui $(S_R^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ è una n-carta compatibile con la topologia di S_R^n.

Ci serve un'altra carta per coprire il polo nord; useremo la proiezione stereografica $\varphi_S \colon S_R^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ dal polo sud $S = (0, \ldots, 0, -R) \in S_R^n$. Ragionando come prima troviamo

$$\varphi_S(p) = \frac{R}{R + p^{n+1}}(p^1, \ldots, p^n) \qquad \text{e} \qquad \varphi_S^{-1}(x) = \left(\frac{2R^2 x^1}{R^2 + \|x\|^2}, \ldots, \frac{2R^2 x^n}{R^2 + \|x\|^2}, R\,\frac{R^2 - \|x\|^2}{R^2 + \|x\|^2}\right).$$

Le due carte $(S_R^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ e $(S_R^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$ sono compatibili. Infatti $S_R^n \setminus \{N\} \cap S_R^n \setminus \{S\} = S_R^n \setminus \{N, S\}$,

$$\varphi_N(S_R^n \setminus \{N, S\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{O\} = \varphi_S(S_R^n \setminus \{N, S\}),$$

e

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{R^2}{\|x\|^2}\,x = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x).$$

Infine, vogliamo verificare la compatibilità di questo atlante con quello introdotto nell'esempio precedente. Cominciamo con le carte $(S^n_R \setminus \{N\}, \varphi_N)$ e $(U^\pm_j, \varphi^\pm_j)$ per $j = 1, \ldots, n$. Abbiamo

$$S^n_R \setminus \{N\} \cap U^\pm_j = \{p \in S^n_R \mid p^{n+1} \neq R, \pm p^j > 0\},$$
$$\varphi_N(S^n_R \setminus \{N\} \cap U^\pm_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm x^j > 0\}, \qquad \varphi^\pm_j(S^n_R \setminus \{N\} \cap U^\pm_j) = B^n_R.$$

Quindi

$$\varphi_N \circ (\varphi^\pm_j)^{-1}(x) = \frac{R}{R - x^n}(x^1, \ldots, x^{j-1}, \pm\sqrt{R^2 - \|x\|^2}, x^j, \ldots, x^{n-1})$$

è di classe C^∞. Anche $\varphi^\pm_j \circ \varphi_N^{-1}$ è di classe C^∞, in quanto è ottenuta togliendo una coordinata a φ_N^{-1}, che è di classe C^∞ quando è considerata come applicazione a valori in $\mathbb{R}^{n+1}$. Per verificare la compatibilità fra $(S^n_R \setminus \{N\}, \varphi_N)$ e $(U^+_{n+1}, \varphi^+_{n+1})$ basta notare che

$$S^n_R \setminus \{N\} \cap U^+_{n+1} = \{p \in S^n_R \mid 0 < p^{n+1} < R\},$$
$$\varphi_N(S^n_R \setminus \{N\} \cap U^+_{n+1}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > R\}, \qquad \varphi^+_{n+1}(S^n_R \setminus \{N\} \cap U^\pm_j) = B^n_R \setminus \{O\},$$

e che

$$\varphi_N \circ (\varphi^+_{n+1})^{-1}(x) = \frac{R}{R - \sqrt{R^2 - \|x\|^2}}\, x, \qquad \text{e} \qquad \varphi^+_{n+1} \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{2R^2}{R^2 + \|x\|^2}\, x.$$

La compatibilità fra $(S^n_R \setminus \{N\}, \varphi_N)$ e $(U^-_{n+1}, \varphi^-_{n+1})$, come pure la compatibilità fra $(S^n_R \setminus \{S\}, \varphi_S)$ e le altre carte, si verifica in modo analogo.

Esercizio 2.1.5. Dimostra che non esiste un atlante su S^n_R compatibile con la topologia naturale di S^n_R e composto da una sola carta.

Esempio 2.1.11. Il terzo atlante che consideriamo su S^n_R ha più carte del precedente ma, come vedremo in seguito, è molto più comodo per fare i conti. Per $j = 1, \ldots, n$ poniamo $U_j = S^n_R \setminus \{p^j = 0, p^{j+1} \geq 0\}$, mentre per $j = n + 1$ poniamo $U_{n+1} = S^n_R \setminus \{p^{n+1} = 0, p^1 \geq 0\}$. Sia poi $V \subset \mathbb{R}^n$ l'aperto

$$V = \{(\theta^1, \ldots, \theta^n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \theta^1 < 2\pi, 0 < \theta^j < \pi \text{ per } j = 2, \ldots, n\}.$$

Definiamo $\psi_j: V \to U_j$ per $j = 1, \ldots, n + 1$ con

$$\psi_j(\theta^1, \ldots, \theta^n) = R\,\tau_j\bigl(\sin\theta^1 \cdots \sin\theta^n, \cos\theta^1 \sin\theta^2 \cdots \sin\theta^n, \cos\theta^2 \sin\theta^3 \cdots \sin\theta^n, \ldots, \cos\theta^{n-1} \sin\theta^n, \cos\theta^n\bigr),$$

dove $\tau_j: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ è la permutazione ciclica delle coordinate data da

$$\tau_j(p^1, \ldots, p^{n+1}) = (p^{n+3-j}, p^{n+4-j}, \ldots, p^{n+1}, p^1, \ldots, p^{n+2-j}).$$

Si verifica senza troppa difficoltà che ciascuna ψ_j è di rango costante n (come applicazione a valori in $\mathbb{R}^{n+1}$) e una bigezione continua fra V e U_j. Con un po' più di difficoltà (oppure usando l'Esercizio 2.5.3) si verifica che è un omeomorfismo con l'immagine, per cui (U_j, ψ_j^{-1}) è una n-carta di S^n_R, e che $\psi_h^{-1} \circ \psi_k$ è di classe C^∞ per ogni $1 \leq h, k \leq n + 1$. Siccome $U_1 \cup \cdots \cup U_{n+1} = S^n_R$, abbiamo trovato un nuovo atlante $\{(U_j, \psi_j^{-1})\}$, le cui carte forniscono le *coordinate sferiche* sulla sfera. Non è difficile anche controllare che questo atlante è compatibile con quelli introdotti negli esempi precedenti.

Esercizio 2.1.6. Verifica in dettaglio che le coordinate sferiche forniscono un atlante compatibile con quelli degli Esempi 2.1.9 e 2.1.10.

Vediamo ora un esempio di varietà che non nasce come sottoinsieme di un qualche $\mathbb{R}^N$.

Esempio 2.1.12. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ammette una naturale struttura di varietà n-dimensionale. Infatti, per $j = 0, \ldots, n$ poniamo $U_j = \{[x^0 : \cdots : x^n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x^j \neq 0\}$, dove $[x^0 : \cdots : x^n]$ indicano le coordinate omogenee, e definiamo $\varphi_j: U_j \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\varphi_j([x^0 : \cdots : x^n]) = (x^0/x^j, \ldots, x^{j-1}/x^j, x^{j+1}/x^j, \ldots, x^n/x^j),$$

in modo che
$$\varphi_j^{-1}(y) = [y^1 : \cdots : y^{j-1} : 1 : y^j : \cdots : y^n].$$
Le carte (U_0, φ_0) e (U_1, φ_1) sono compatibili: infatti,
$$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^1 \neq 0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1) \quad \text{e} \quad \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(y) = (1/y^1, y^2/y^1, \ldots, y^n/y^1) = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(y).$$
In modo analogo si verifica la compatibilità delle altre carte, per cui $\{(U_j, \varphi_j)\}$ è un atlante.

Esercizio 2.1.7. Indichiamo con $\pi: S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la restrizione della proiezione naturale di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ data da $\pi(x^0, \ldots, x^n) = [x^0 : \cdots : x^n]$. Dimostra che π è un omeomorfismo se $n = 1$, ed è il rivestimento universale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ se $n > 1$.

Per introdurre un'altra classe di esempi ci serve una definizione.

Definizione 2.1.6: Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione C^∞ definita su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $p \in \Omega$ è detto *punto critico* di F se $dF_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non è surgettivo. Un *valore critico* è l'immagine di un punto critico. Un *valore regolare* è un punto di $F(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m$ che non è un valore critico. Indicheremo con $\mathrm{Crit}(F) \subseteq \Omega$ l'insieme dei punti critici di F.

Esercizio 2.1.8. Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione C^∞ definita su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dimostra che $\mathrm{Crit}(F)$ è un chiuso di Ω.

Osservazione 2.1.7. Il famoso teorema di Sard asserisce che l'insieme dei valori critici di un'applicazione differenziabile ha sempre misura nulla in $\mathbb{R}^m$.

Richiamiamo inoltre il seguente teorema di Analisi:

Teorema 2.1.1: (della funzione inversa) *Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k, con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $p_0 \in \Omega$ tale che*
$$\det \mathrm{Jac}\, F(p_0) \neq 0.$$
Allora esistono un intorno $U \subset \Omega$ di p_0 e un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di $F(p_0)$ tale che $F|_U: U \to V$ sia un diffeomorfismo con inversa di classe C^k.

Allora:

Proposizione 2.1.2: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ aperto, e $F: \Omega \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^∞. Se $a \in F(\Omega)$, allora $M_a = F^{-1}(a) \setminus \mathrm{Crit}(F)$ ha una naturale struttura di varietà n-dimensionale, compatibile con la topologia indotta da $\mathbb{R}^{m+n}$. In particolare, se a è un valore regolare allora questo vale per $F^{-1}(a) = \{p \in \Omega \mid F(p) = a\}$.*

Dimostrazione: Sia $p_0 \in M_a$. Siccome p_0 non è un punto critico di F, lo Jacobiano di F ha rango massimo m in p_0 per cui, a meno di permutare le coordinate, possiamo supporre che
$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+1}}(p_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+m}}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+1}}(p_0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+m}}(p_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$
Sia allora $G: \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ data da $G(x) = \bigl(x^1, \ldots, x^n, F(x)\bigr)$; chiaramente, $\det \mathrm{Jac}(G)(p_0) \neq 0$. Possiamo quindi applicare il teorema della funzione inversa e trovare intorni $\tilde{U} \subseteq \Omega \setminus \mathrm{Crit}(F)$ di p_0 e $W \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ di $G(p_0)$ tali che $G|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \to W$ sia un diffeomorfismo. Posto $H = (h^1, \ldots, h^{m+n}) = G^{-1}$ abbiamo
$$(y^1, \ldots, y^{n+m}) = G \circ H(y) = \bigl(h^1(y), \ldots, h^n(y), F\bigl(H(y)\bigr)\bigr)$$
per cui $h^i(y) = y^i$, per $i = 1, \ldots, n$ e
$$\forall y \in W \qquad F\bigl(y^1, \ldots, y^n, h^{n+1}(y), \ldots, h^{n+m}(y)\bigr) = (y^{n+1}, \ldots, y^{n+m}); \tag{2.1.1}$$
in particolare $\bigl(y^1, \ldots, y^n, h^{n+1}(y), \ldots, h^{n+m}(y)\bigr) \in \tilde{U}$ per ogni $y \in W$. Poniamo $U = M_a \cap \tilde{U}$; allora l'insieme
$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, a) \in W\}$$
è chiaramente un aperto di $\mathbb{R}^n$, e possiamo definire $\psi: V \to \mathbb{R}^{n+m}$ con $\psi(x) = \bigl(x, h^{n+1}(x, a), \ldots, h^{n+m}(x, a)\bigr)$. La (2.1.1) ci dice che $\psi(V) = F^{-1}(a) \cap \tilde{U} = U$, e quindi $\varphi = \psi^{-1}$ è una carta locale di $F^{-1}(a)$ in p_0. Notiamo esplicitamente che $\varphi(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ è la proiezione sulle prime n coordinate.

Rimane da dimostrare che due carte φ, $\tilde{\varphi}$ ottenute in questo modo sono compatibili. Ma per quanto visto $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = \tilde{\varphi} \circ \psi$ ha come coordinate alcune delle coordinate di ψ, e quindi è di classe C^∞. □

Esempio 2.1.13. Sia $F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ la funzione data da $F(x)=\|x\|^2$. Allora l'unico valore critico di F è lo zero, e quindi $S^n_R=F^{-1}(R^2)$ è (di nuovo!) una varietà n-dimensionale. Ovviamente, l'atlante fornito dalla proposizione precedente è compatibile con quelli già incontrati (esercizio).

Esempio 2.1.14. Il determinante è una funzione di classe C^∞ sullo spazio $M_{n,n}(\mathbb{R})$ delle matrici $n\times n$ a coefficienti reali. Se $X=(x^j_i)\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ non è difficile verificare (esercizio) che

$$\frac{\partial\det}{\partial x^j_i}(X)=(-1)^{i+j}\det(X^j_i),$$

dove $X^j_i\in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$ è il minore (i,j) di X, ottenuto cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima di X. Quindi i punti critici della funzione determinante det sono le matrici i cui minori di ordine $n-1$ abbiano tutti determinante nullo, cioè

$$\mathrm{Crit}(\det)=\{A\in M_{n,n}(\mathbb{R})\mid \operatorname{rk}A\le n-2\}.$$

Il determinante di una matrice di rango $n-2$ è zero, per cui 0 è l'unico valore critico di det. Dunque il *gruppo speciale lineare*

$$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M_{n,n}(\mathbb{R})\mid \det A=1\}$$

è una varietà di dimensione n^2-1.

Esercizio 2.1.9. Indichiamo con $S(n,\mathbb{R})\subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici simmetriche a coefficienti reali; chiaramente, possiamo identificare $S(n,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Sia $F:M_{n,n}(\mathbb{R})\to S(n,\mathbb{R})$ l'applicazione data da $F(X)=X^TX$. Dimostra che

$$dF_X(A)=X^TA+A^TX$$

per ogni $A,\ X\in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sia $O(n)=\{X\in M_{n,n}(\mathbb{R})\mid X^TX=I_n\}$ il *gruppo ortogonale;* dimostra che per ogni $X\in O(n)$ il differenziale $dF_X:M_{n,n}(\mathbb{R})\to S(n,\mathbb{R})$ è surgettivo, e deduci che $O(n)$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n(n-1)/2$. Dimostra infine che il gruppo *speciale ortogonale* $SO(n,\mathbb{R})=O(n)\cap SL(n,\mathbb{R})$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n(n-1)/2-1$.

2.2 Applicazioni differenziabili

Nella matematica contemporanea, ogni volta che si introduce una nuova classe di oggetti (per esempio, le varietà), si cerca non appena possibile di definire anche le applicazioni ammissibili fra questi oggetti. Nel caso delle varietà, si tratta delle applicazioni differenziabili.

Definizione 2.2.1: Siano M, N due varietà. Un'applicazione $F:M\to N$ è *differenziabile* (o *di classe* C^∞) in $p\in M$ se esistono una carta (U,φ) in p e una carta (V,ψ) in $F(p)$ tali che $F(U)\subseteq V$ e la composizione $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ è di classe C^∞ in un intorno di $\varphi(p)$. Se F è differenziabile in ogni punto di M diremo che è *differenziabile* (o *di classe* C^∞). Un'applicazione differenziabile bigettiva con inversa differenziabile è detta *diffeomorfismo.* L'insieme delle funzioni differenziabili da M in $\mathbb{R}$ verrà indicato con $C^\infty(M)$.

Osservazione 2.2.1. Un'applicazione $F:M\to N$ differenziabile in $p\in M$ è automaticamente continua in p. Infatti, sia A un intorno aperto di $F(p)$ in N; dobbiamo dimostrare che $F^{-1}(A)$ è un intorno di p. Scegliamo una carta (U,φ) in p e una carta (V,ψ) in $F(p)$ tali che $F(U)\subseteq V$ e la composizione $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ sia di classe C^∞. Per definizione di topologia indotta dalla struttura di varietà, $A\cap V$ è aperto in V, e quindi $\psi(A\cap V)$ è aperto in $\psi(V)$. Ma allora

$$\varphi\bigl(F^{-1}(A\cap V)\bigr)=(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})^{-1}\bigl(\psi(A\cap V)\bigr)$$

è aperto in $\varphi(U)$, e quindi $F^{-1}(A\cap V)$ è aperto in U, e quindi in M.

Il motivo per cui la Definizione 2.2.1 è una buona definizione è che per decidere se un'applicazione è differenziabile una carta vale l'altra:

Proposizione 2.2.1: *Sia $F: M \to N$ differenziabile in p. Allora per ogni carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ in p e ogni carta $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ in $F(p)$ la composizione $\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ è di classe C^∞ in $\tilde{\varphi}(p)$.*

Dimostrazione: Siano (U, φ) e (V, ψ) carte in p e $F(p)$ tali che $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ sia di classe C^∞ in $\varphi(p)$. Allora

$$\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi^{-1})$$

è di classe C^∞ in $\tilde{\varphi}(p)$ in quanto composizione di applicazioni di classe C^∞. □

La composizione di applicazioni differenziabili è differenziabile:

Proposizione 2.2.2: *Siano $F: M \to N$ e $G: N \to S$ due applicazioni differenziabili fra varietà. Allora anche la composizione $G \circ F: M \to S$ è differenziabile.*

Dimostrazione: Preso $p \in M$, sappiamo che per ogni carta (U, φ) in p, (V, ψ) in $F(p)$ e (W, χ) in $G\big(F(p)\big)$ le applicazioni $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ e $\chi \circ G \circ \psi^{-1}$ sono di classe C^∞. Ma allora anche

$$\chi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\chi \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$$

è di classe C^∞, e ci siamo. □

Esempio 2.2.1. Sia $\varphi: U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta locale di una varietà M. Allora φ è un diffeomorfismo fra U e V. Infatti è chiaramente un omeomorfismo, e le ovvie identità $\mathrm{id} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}$ e $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}$ dicono esattamente che φ e φ^{-1} sono di classe C^∞.

Esiste anche una versione locale del concetto di diffeomorfismo:

Definizione 2.2.2: Un'applicazione $F: M \to N$ fra varietà è un *diffeomorfismo locale* se ogni $p \in M$ ha un intorno aperto $U \subset M$ tale che $F(U)$ sia aperto in N e $F|_U: U \to F(U)$ sia un diffeomorfismo.

Possiamo ora dare un esempio promesso prima:

Esempio 2.2.2. Siano $\mathcal{A}$ e $\tilde{\mathcal{A}}$ i due atlanti su $\mathbb{R}$ introdotti nell'Esempio 2.1.6. Allora $F: (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{A}})$ data da $F(t) = t^{1/3}$ è un diffeomorfismo. Infatti è invertibile, e siccome

$$\varphi \circ F \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R})^{-1}(t) = t = \mathrm{id}_\mathbb{R} \circ F^{-1} \circ \varphi^{-1}(t)$$

sia F che F^{-1} sono di classe C^∞ rispetto a queste strutture differenziabili. Nota che $F: (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A})$ *non* è differenziabile (mentre l'inversa lo è).

Osservazione 2.2.2. Per anni un grosso problema della geometria differenziale è stato se esistessero su un qualche $\mathbb{R}^n$ due strutture differenziabili non diffeomorfe. La risposta finale è piuttosto sorprendente: per $n \neq 4$, lo spazio $\mathbb{R}^n$ ha un'unica (a meno di diffeomorfismi) struttura differenziabile, mentre Donaldson e Freedman nel 1984 hanno dimostrato che $\mathbb{R}^4$ ha un'infinità più che numerabile di strutture differenziabili distinte, a due a due non diffeomorfe! Un altro risultato soprendente, dovuto a Kervaire e Milnor, è che S^7 ha esattamente 28 strutture differenziabili non diffeomorfe. Infine, è noto per ogni $n \geq 4$ esistono varietà topologiche compatte di dimensione n che non ammettono alcuna struttura di varietà differenziabile compatibile con la topologia data, mentre Munkres e Moise hanno dimostrato che ogni varietà topologica di dimensione al più 3 ammette esattamente una sola (a meno di diffeomorfismi) struttura di varietà differenziabile compatibile con la topologia data.

La prossima definizione identifica una classe particolarmente importante di varietà.

Definizione 2.2.3: Un *gruppo di Lie* è un gruppo G fornito anche di una struttura di varietà differenziabile tale che il prodotto $G \times G \to G$ e l'inverso $G \to G$ siano applicazioni di classe C^∞.

Esercizio 2.2.1. Sia G un gruppo fornito di una struttura di varietà differenziabile tale che l'applicazione $\mu: G \times G \to G$ data da $\mu(g, h) = gh^{-1}$ sia di classe C^∞. Dimostra che G è un gruppo di Lie.

Esempio 2.2.3. Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con la somma usuale è un gruppo di Lie. Più in generale, un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita considerato con la struttura di varietà introdotta nell'Esempio 2.1.7 è un gruppo di Lie rispetto alla somma.

Esempio 2.2.4. Il gruppo generale lineare $GL(n,\mathbb{R})$ con il prodotto usuale è un gruppo di Lie.

Esempio 2.2.5. I gruppi $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{R}^2$ col prodotto sono gruppi di Lie.

Esercizio 2.2.2. Dimostra che S^1, inteso come l'insieme dei numeri complessi di modulo unitario, e col prodotto di numeri complessi, è un gruppo di Lie.

Esercizio 2.2.3. Dimostra che se $G_1, \dots, G_r$ sono gruppi di Lie, allora il prodotto cartesiano $G_1 \times \cdots \times G_r$ considerato col prodotto componente per componente è un gruppo di Lie. In particolare, il *toro* n-dimensionale $T^n = S^1 \times \cdots \times S^n$ è un gruppo di Lie abeliano.

Esercizio 2.2.4. Dimostra che $SL(n,\mathbb{R})$ e $O(n)$ sono gruppi di Lie.

Definizione 2.2.4: Un *omomorfismo* di gruppi di Lie è un'applicazione $F: G \to H$ fra gruppi di Lie che sia differenziabile e un omomorfismo di gruppi. Un *isomorfismo di gruppi di Lie* è un diffeomorfismo che è anche un isomorfismo di gruppi.

Esempio 2.2.6. L'esponenziale $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, in quanto è differenziabile e si ha $e^{t+s} = e^t \cdot e^s$.

Esempio 2.2.7. Il rivestimento universale $\pi: \mathbb{R} \to S^1$ dato da $\pi(t) = e^{it}$ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Più in generale, l'applicazione $\pi: \mathbb{R}^n \to T^n$ data da $\pi(t^1, \dots, t^n) = (e^{it^1}, \dots, e^{it^n})$ è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Esempio 2.2.8. Il determinante $\det: GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Esercizio 2.2.5. Verifica le affermazioni contenute negli esempi precedenti.

Esercizio 2.2.6. Sia $\exp: M_{n,n}(\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ l'*applicazione esponenziale* definita da

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

dove A^k è il prodotto di A per se stessa k volte. Dimostra che exp è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Definizione 2.2.5: Se G è un gruppo di Lie e $h \in G$, la *traslazione sinistra* $L_h: G \to G$ e la *traslazione destra* $R_h: G \to G$ sono rispettivamente definite da $L_h(x) = hx$ e $R_h(x) = xh$. Sono chiaramente diffeomorfismi di G con se stesso, ma non degli isomorfismi di gruppo di Lie. Invece, il *coniugio* $C_h: G \to G$ definito da $C_h(x) = hxh^{-1}$ è un isomorfismo di gruppi di Lie.

I gruppi di Lie appaiono spesso come gruppi di simmetria di una varietà:

Definizione 2.2.6: Sia G un gruppo di Lie, e M una varietà. Un'*azione* (*differenziabile*) di G su M è un'applicazione $\theta: G \times M \to M$ di classe C^∞ tale che

$$\theta\bigl(g_1, \theta(g_2, p)\bigr) = \theta(g_1 g_2, p) \qquad \text{e} \qquad \theta(e, p) = p$$

per tutti i g_1, $g_2 \in G$ e $p \in M$, dove $e \in G$ è l'elemento neutro di G. Per ogni $g \in G$ sia $\theta_g: M \to M$ data da $\theta_g(p) = \theta(g, p)$; allora si ha $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$ e $\theta_e = \mathrm{id}_M$. Diremo che l'azione è *fedele* se $\theta_{g_1} \equiv \theta_{g_2}$ implica $g_1 = g_2$.

Esempio 2.2.9. Il gruppo $GL(n,\mathbb{R})$ agisce su $\mathbb{R}^n$ per moltiplicazione.

Esempio 2.2.10. Un gruppo di Lie agisce su se stesso in (almeno) due modi: per traslazione sinistra, e per coniugio.

Definizione 2.2.7: Sia $\theta\colon G\times M\to M$ un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M. L'*orbita* di un punto $p\in M$ è l'insieme $G\cdot p=\{\theta_g(p)\mid g\in G\}$. Si vede facilmente (esercizio) che le orbite costituiscono una partizione di M, cioè che "essere in una stessa orbita" è una relazione d'equivalenza. Indicheremo con M/G lo spazio quoziente delle orbite, e diremo che l'azione è *transitiva* se esiste un'unica orbita, cioè se per ogni p, $q\in M$ esiste $g\in G$ tale che $\theta_g(p)=q$.

Lo spazio delle orbite M/G, in quanto quoziente di uno spazio topologico, ha una struttura naturale di spazio topologico. Una domanda naturale è se ha una struttura di varietà differenziabile. La risposta in generale è no: M/G potrebbe non essere neppure una varietà topologica.

Esempio 2.2.11. Il gruppo ortogonale $O(n)$ agisce per moltiplicazione su $\mathbb{R}^n$, e si vede facilmente (esercizio) che $\mathbb{R}^n/O(n)$ è omeomorfo alla semiretta $[0,+\infty)$.

Ci sono però delle condizioni che assicurano che lo spazio delle orbite è ancora una varietà. Non avremo occasione di dimostrare questo teorema, ma almeno possiamo enunciarlo.

Definizione 2.2.8: Sia $\theta\colon G\times M\to M$ un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M. Il *gruppo di isotropia* G_p di un punto $p\in M$ è il sottogruppo di G costituito dagli elementi di G che fissano p, cioè

$$G_p=\{g\in G\mid \theta_g(p)=p\}.$$

Diremo che G agisce *liberamente* su M se il gruppo d'isotropia di ogni punto si riduce al solo elemento identico, cioè se $\theta_g(p)\neq p$ per ogni $p\in M$ e $g\in G\setminus\{e\}$.

Definizione 2.2.9: Una funzione continua $f\colon X\to Y$ fra spazi topologici è *propria* se l'immagine inversa di ogni compatto in Y è compatta in X, cioè se $f^{-1}(K)$ è compatto in X per ogni compatto $K\subseteq Y$.

Definizione 2.2.10: Diremo che un'azione $\theta\colon G\times M\to M$ di un gruppo di Lie G su una varietà M è *propria* se l'applicazione $\Theta\colon G\times M\to M\times M$ data da $\Theta(g,p)=\bigl(\theta_g(p),p\bigr)$ è propria (che è una cosa diversa dal richiedere che θ sia propria).

Allora si può dimostrare il seguente

Teorema 2.2.3: *Sia $\theta\colon G\times M\to M$ un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M, e indichiamo con $\pi\colon M\to M/G$ la proiezione naturale sullo spazio delle orbite. Supponiamo che l'azione sia libera e propria. Allora esiste un'unica struttura di varietà differenziabile su M/G, compatibile con la topologia quoziente, e tale che π sia differenziabile. Rispetto a questa struttura, M/G ha dimensione* $\dim M-\dim G$.

Concludiamo questa sezione parlando di rivestimenti.

Definizione 2.2.11: Un'applicazione differenziabile $\pi\colon\tilde M\to M$ fra varietà è un *rivestimento liscio* se è surgettiva e ogni $p\in M$ possiede un intorno aperto U connesso tale che π ristretta a una qualsiasi componente connessa $\tilde U$ di $\pi^{-1}(U)$ sia un diffeomorfismo fra $\tilde U$ e U.

Un rivestimento liscio è, in particolare, un rivestimento nel senso topologico del termine, ma il viceversa non è detto che sia vero.

Esercizio 2.2.7. Sia $\pi\colon\tilde M\to M$ un rivestimento topologico fra varietà. Dimostra che π è un rivestimento liscio se e solo se (è differenziabile ed) è un diffeomorfismo locale. Trova un esempio di rivestimento topologico fra varietà che sia differenziabile ma non sia un rivestimento liscio.

Il risultato che ci interessa in questo momento è il seguente:

Proposizione 2.2.4: *Sia $\pi\colon\tilde M\to M$ un rivestimento topologico di una varietà n-dimensionale M. Allora esiste un'unica struttura di varietà differenziabile di dimensione n su $\tilde M$ tale che π sia un rivestimento liscio.*

Dimostrazione: Supponiamo che esista una struttura di varietà differenziabile su $\tilde M$ tale che π sia un rivestimento liscio. Preso $\tilde p\in\tilde M$, sia $U\subseteq M$ un intorno ben rivestito di $p=\pi(\tilde p)$; possiamo chiaramente supporre che U sia il dominio di una carta φ centrata in p. Sia $\tilde U$ la componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ contenente $\tilde p$; essendo π un rivestimento liscio, $(\tilde U,\varphi\circ\pi|_{\tilde U})$ è una n-carta di $\tilde M$ appartenente alla struttura differenziabile data. L'unione delle carte ottenute in questo modo al variare di $\tilde{p} \in \tilde{M}$ è un atlante di $\tilde{M}$, e quindi la struttura di varietà differenziabile su $\tilde{M}$, se esiste, è unica.

Viceversa, anche senza supporre che $\tilde{M}$ abbia una struttura di varietà differenziabile, è chiaro che le coppie $(\tilde{U}, \varphi \circ \pi|_{\tilde{U}})$ così costruite sono delle n-carte su $\tilde{M}$; per dimostrare che formano un atlante di $\tilde{M}$ dobbiamo dimostrare che sono compatibili. Ma infatti, sia $(\tilde{V}, \psi \circ \pi|_{\tilde{V}})$ un'altra carta costruita in questo modo e tale che $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \varnothing$. Allora $U \cap V \neq \varnothing$, dove $V = \pi(\tilde{V})$, e quindi

$$\psi \circ \pi|_{\tilde{U}\cap\tilde{V}} \circ (\varphi \circ \pi|_{\tilde{U}\cap\tilde{V}})^{-1} = \psi \circ (\varphi|_{U\cap V})^{-1}$$

è di classe C^∞ dove definita, come voluto. □

Esercizio 2.2.8. Sia $\pi\colon \tilde{M} \to M$ un rivestimento di spazi topologici. Dimostra che se M è di Hausdorff a base numerabile allora anche $\tilde{M}$ è di Hausdorff a base numerabile.

Concludiamo questo paragrafo con un ultimo esercizio:

Esercizio 2.2.9. Sia G un gruppo di Lie connesso. Dimostra che esiste un gruppo di Lie semplicemente connesso $\tilde{G}$ e un rivestimento liscio $\pi\colon \tilde{G} \to G$ che è anche un omomorfismo di gruppi di Lie.

2.3 Partizioni dell'unità

Nel seguito ci serviranno funzioni differenziabili con proprietà particolari. Cominciamo col far vedere che per ogni compatto di una varietà differenziabile possiamo trovare una funzione differenziabile che sia identicamente uguale a 1 sul compatto, e identicamente nulla fuori da un intorno arbitrario del compatto. Ci serve una piccola definizione:

Definizione 2.3.1: Sia M uno spazio topologico. Il *supporto* di una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ è l'insieme chiuso

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

Proposizione 2.3.1: *Sia $K \subseteq M$ un sottoinsieme compatto di una varietà n-dimensionale M, e sia $V \supseteq K$ un intorno aperto di K. Allora esiste una funzione $g \in C^\infty(M)$ tale che $g|_K \equiv 1$ e $\mathrm{supp}(g) \subset V$. In particolare, $g|_{M\setminus V} \equiv 0$.*

Dimostrazione: Sia $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

e $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da

$$\eta(x) = \frac{h(1 - \|x\|^2)}{h(1 - \|x\|^2) + h(\|x\|^2 - 1/4)}. \tag{2.3.1}$$

Si vede subito che $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta(\mathbb{R}^n) \subseteq [0,1]$, $\eta|_{B_{1/2}} \equiv 1$, $\eta(x) > 0$ per ogni $x \in B_1$ e $\eta|_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \equiv 0$.

Ora, per ogni $p \in K$ scegliamo una carta locale (U_p, φ_p) centrata in p tale che $\overline{U_p} \subset V$ e con inoltre $\varphi_p(U_p) = B_2 \subset \mathbb{R}^n$. Essendo K compatto, possiamo trovare $p_1, \ldots, p_k \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k \varphi_{p_j}^{-1}(B_{1/2}) \subset \bigcup_{j=1}^k U_{p_j} = W \subset V.$$

Definiamo $g_j\colon M \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g_j(q) = \begin{cases} \eta\big(\varphi_{p_j}(q)\big) & \text{se } q \in U_{p_j}, \\ 0 & \text{se } q \notin U_{p_j}; \end{cases}$$

essendo $g_j|_{\varphi_{p_j}^{-1}(B_2\setminus B_1)} \equiv 0$, abbiamo $g_j \in C^\infty(M)$. Allora poniamo

$$g(q) = 1 - \prod_{j=1}^{k}\bigl(1 - g_j(q)\bigr).$$

Chiaramente $g \in C^\infty(M)$. Se $q \in K$ allora esiste un j fra 1 e k tale che $\varphi_{p_j}^{-1}(B_{1/2})$, per cui $g_j(q) = 1$ e quindi $g(q) = 1$. Se invece $q \notin W$ necessariamente $g_1(q) = \cdots = g_k(q) = 0$, per cui $g(q) = 0$. In altre parole, abbiamo $g|_K \equiv 1$ e $g|_{M\setminus W} \equiv 0$, come voluto, □

Corollario 2.3.2: *Sia M una varietà, $p \in M$ e $V \subseteq M$ un intorno di p. Allora esiste una $h \in C^\infty(M)$ tale che $h(p) = 0$ e $h|_{M\setminus V} \equiv 1$.*

Dimostrazione: Applicando la proposizione precedente a $K = \{p\}$ otteniamo una funzione $g \in C^\infty(M)$ tale che $g(p) = 1$ e $g|_{M\setminus V} \equiv 0$. Allora $h = 1 - g$ è come voluto. □

Grazie a questo risultato siamo anche in grado di estendere funzioni C^∞ definite solo su un compatto a funzioni C^∞ definite su tutta la varietà. Per far ciò, ci basta definire in maniera opportuna le funzioni C^∞ su un compatto:

Definizione 2.3.2: Sia $K \subseteq M$ un compatto di una varietà M. Indicheremo con $C^\infty(K)$ l'insieme delle funzioni $f\colon K \to \mathbb{R}$ continue che ammettono un'estensione di classe C^∞ a un intorno aperto di K, cioè tali che esistano un intorno aperto U di K e una $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ con $\tilde{f}|_K \equiv f$.

Corollario 2.3.3: *Sia M una varietà, $K \subseteq M$ compatto, $f \in C^\infty(K)$, e $W \supseteq K$ un intorno aperto di K. Allora esiste una $\hat{f} \in C^\infty(M)$ tale che $\hat{f}|_K \equiv f$ e $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset W$. In particolare, $\hat{f}|_{M\setminus W} \equiv 0$.*

Dimostrazione: Sia $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}$ un'estensione di f a un intorno aperto U del compatto K, e sia $g \in C^\infty(M)$ la funzione data dalla Proposizione 2.3.1 prendendo $V = U \cap W$. Poniamo

$$\hat{f}(q) = \begin{cases} g(q)\tilde{f}(q) & \text{se } q \in U, \\ 0 & \text{se } q \in M \setminus \overline{V}; \end{cases}$$

siccome $\operatorname{supp}(g) \subset U \cap W$, la funzione $\hat{f}$ è come voluto. □

Nel seguito, ci capiterà di dover incollare oggetti definiti solo localmente. Avremo un ricoprimento aperto di una varietà, un oggetto locale definito su ciascun aperto del ricoprimento, e vorremmo incollare questi oggetti in modo da ottenere un singolo oggetto globale definito su tutta la varietà. Lo strumento principe per effettuare questo incollamento è dato dalle *partizioni dell'unità,* che esistono solo su varietà di Hausdorff a base numerabile, e che adesso definiamo.

Definizione 2.3.3: Diremo che un ricoprimento (non necessariamente aperto) $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ di uno spazio topologico X è *localmente finito* se ogni $p \in X$ ha un intorno $U \subseteq X$ tale che $U \cap U_\alpha \neq \varnothing$ solo per un numero finito di indici α. Un ricoprimento $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}$ è un *raffinamento* di $\mathfrak{U}$ se per ogni β esiste un α tale che $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

Definizione 2.3.4: Una *partizione dell'unità* su una varietà M è una famiglia $\{\rho_\alpha\} \subset C^\infty(M)$ tale che
(a) $\rho_\alpha \geq 0$ su M per ogni indice α;
(b) $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}$ è un ricoprimento localmente finito di M;
(c) $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$.

Diremo poi che la partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ è *subordinata* al ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ se $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ per ogni indice α.

Osservazione 2.3.1. La proprietà (b) della definizione di partizione dell'unità implica che nell'intorno di ciascun punto di M solo un numero finito di elementi della partizione dell'unità sono diversi da zero; quindi la somma nella proprietà (c) è ben definita, in quanto in ciascun punto di M solo un numero finito di addendi sono non nulli. Inoltre, siccome M è a base numerabile, sempre la proprietà (b) implica (perché?) che $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \neq \varnothing$ solo per una quantità al più numerabile di indici α. In particolare, se la partizione dell'unità è subordinata a un ricoprimento composto da una quantità più che numerabile di aperti, allora $\rho_\alpha \equiv 0$ per tutti gli indici tranne al più una quantità numerabile. Questo non deve stupire, in quanto in uno spazio topologico a base numerabile da ogni ricoprimento aperto si può sempre estrarre un sottoricoprimento numerabile (proprietà di Lindelöf).

Il nostro obiettivo è dimostrare l'esistenza di partizioni dell'unità subordinate a qualsiasi ricoprimento aperto di una varietà. Questo risultato sarà conseguenza del seguente

Lemma 2.3.4: *Sia M una varietà di Hausdorff a base numerabile, e $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di M. Allora esiste un atlante numerabile localmente finito $\mathcal{A} = \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}$ tale che:*

(i) *$\{V_\beta\}$ è un raffinamento di $\mathfrak{U}$;*
(ii) *$\varphi_\beta(V_\beta) = B_2$ per ogni β;*
(iii) *posto $W_\beta = \varphi_\beta^{-1}(B_{1/2})$, anche $\{W_\beta\}$ è un ricoprimento di M.*

Dimostrazione: La varietà M è localmente compatta e a base numerabile; quindi possiamo trovare una base numerabile $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che ogni $\overline{P_j}$ sia compatto. Definiamo ora una famiglia crescente di compatti K_j per induzione. Poniamo $K_1 = \overline{P_1}$. Se K_j è definito, sia $r \in \mathbb{N}$ il minimo intero maggiore o uguale a j per cui si abbia $K_j \subset \bigcup_{i=1}^r P_i$, e poniamo

$$K_{j+1} = \overline{P_1} \cup \cdots \cup \overline{P_r}.$$

In questo modo abbiamo $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$ e $M = \bigcup_j K_j$.

Ora, per ogni $p \in (\operatorname{int}(K_{j+2}) \setminus K_{j-1}) \cap U_\alpha$ scegliamo una carta $(V_{\alpha,j,p}, \varphi_{\alpha,j,p})$ centrata in p e tale che $V_{\alpha,j,p} \subset (\operatorname{int}(K_{j+2}) \setminus K_{j-1}) \cap U_\alpha$ e $\varphi_{\alpha,j,p}(V_{\alpha,j,p}) = B_2$. Poniamo $W_{\alpha,j,p} = \varphi_{\alpha,j,p}^{-1}(B_{1/2})$. Ora, al variare di α e p gli aperti $W_{\alpha,j,p}$ formano un ricoprimento aperto di $K_{j+1} \setminus \operatorname{int}(K_j)$, che è compatto; quindi possiamo estrarne un sottoricoprimento finito $\{W_{j,r}\}$. Unendo questi ricoprimenti al variare di j otteniamo un ricoprimento aperto numerabile $\{W_\beta\}$ di M; se indichiamo con (V_β, φ_β) la carta corrispondente a W_β, dobbiamo solo dimostrare che l'atlante $\mathcal{A} = \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}$ è localmente finito per concludere. Ma infatti per ogni $p \in M$ possiamo trovare un indice j tale che $p \in \operatorname{int}(K_j)$, e per costruzione solo un numero finito dei V_β intersecano $\operatorname{int}(K_j)$. □

Teorema 2.3.5: *Sia M una varietà di Hausdorff a base numerabile. Allora ogni ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di M ammette una partizione dell'unità subordinata a esso.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{A} = \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta\in B}$ l'atlante dato dal Lemma 2.3.4, e $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ data da (2.3.1). Poniamo

$$g_\beta(q) = \begin{cases} \eta\bigl(\varphi_\beta(q)\bigr) & \text{se } q \in V_\beta, \\ 0 & \text{se } q \notin \varphi_\beta^{-1}(B_1); \end{cases}$$

si vede subito che $g_\beta \in C^\infty(M)$ e che $\{\operatorname{supp}(g_\beta)\}_{\beta\in B}$ è un ricoprimento localmente finito di M che raffina $\mathfrak{U}$. Quindi ponendo

$$\tilde{\rho}_\beta = \frac{g_\beta}{\sum_{\beta'\in B} g_{\beta'}}$$

otteniamo una partizione dell'unità $\{\tilde{\rho}_\beta\}_{\beta\in B}$ tale che per ogni $\beta \in B$ esiste un $\alpha(\beta) \in A$ per cui si ha $\operatorname{supp}(\tilde{\rho}_\beta) \subset U_{\alpha(\beta)}$. Ma allora ponendo

$$\rho_\alpha = \sum_{\substack{\beta\in B \\ \alpha(\beta)=\alpha}} \tilde{\rho}_\beta$$

si verifica subito (esercizio) che $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\mathfrak{U}$, come voluto. □

2.4 Spazio tangente

Avendo definito il concetto di funzioni (e applicazioni) differenziabili, il meno che possiamo fare è cercare di derivarle. Come vedremo, questo equivale più o meno all'introdurre il concetto di vettore tangente.

Definizione 2.4.1: Sia M una varietà, e $p \in M$. Sulla famiglia

$$\mathcal{F} = \{(U, f) \mid U \text{ intorno aperto di } p,\ f \in C^\infty(U)\}$$

poniamo la relazione d'equivalenza $\sim$ così definita: $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste un aperto $W \subseteq U \cap V$ contenente p tale che $f|_W \equiv g|_W$. L'insieme $C^\infty(p) = \mathcal{F}/\sim$ è detto *spiga dei germi di funzioni differenziabili* in p, e un elemento $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ è detto *germe* in p. Un elemento (U, f) della classe di equivalenza $\mathbf{f}$ è detto *rappresentante* di $\mathbf{f}$. Se sarà necessario ricordare su quale varietà stiamo lavorando, scriveremo $C^\infty_M(p)$ invece di $C^\infty(p)$.

Esercizio 2.4.1. Dimostra che per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e ogni intorno $V \subseteq M$ di p esiste un rappresentante di $\mathbf{f}$ definito su tutto M e nullo al di fuori di V.

L'insieme $C^\infty(p)$ ha una naturale struttura di algebra:

Lemma 2.4.1: *Sia $p \in M$ un punto di una varietà M, e $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ due germi in p. Siano inoltre (U_1, f_1), (U_2, f_2) due rappresentanti di $\mathbf{f}$, e (V_1, g_1), (V_2, g_2) due rappresentanti di $\mathbf{g}$. Allora:*

(i) $(U_1 \cap V_1, f_1 + g_1)$ *è equivalente a* $(U_2 \cap V_2, f_2 + g_2)$*;*
(ii) $(U_1 \cap V_1, f_1 g_1)$ *è equivalente a* $(U_2 \cap V_2, f_2 g_2)$*;*
(iii) $(U_1, \lambda f_1)$ *è equivalente a* $(U_2, \lambda f_2)$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
(iv) $f_1(p) = f_2(p)$.

Dimostrazione: Cominciamo con (i). Siccome $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, esiste un intorno aperto $W \subseteq U_1 \cap U_2$ di p tale che $f_1|_W \equiv f_2|_W$. Analogamente, siccome $(V_1, g_1) \sim (V_2, g_2)$, esiste un intorno aperto $\tilde{W} \subseteq V_1 \cap V_2$ di p tale che $g_1|_{\tilde{W}} \equiv g_2|_{\tilde{W}}$. Ma allora $(f_1+f_2)|_{W\cap\tilde{W}} \equiv (g_1+g_2)|_{W\cap\tilde{W}}$, e quindi $(U_1\cap V_1, f_1+g_1) \sim (U_2\cap V_2, f_2+g_2)$ in quanto $W \cap \tilde{W} \subseteq U_1 \cap V_1 \cap U_2 \cap V_2$.

La dimostrazione di (ii) è analoga, e la (iii) e la (iv) sono ovvie. □

Definizione 2.4.2: Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in C^\infty(p)$ due germi in un punto $p \in M$. Indicheremo con $\mathbf{f} + \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, f + g)$, dove (U, f) è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{f}$ e (V, g) è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{g}$. Analogamente indicheremo con $\mathbf{fg} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U \cap V, fg)$, e, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ il germe rappresentato da $(U, \lambda f)$. Il Lemma 2.4.1 ci assicura che queste definizioni sono ben poste, ed è evidente che $C^\infty(p)$ con queste operazioni è un'algebra. Infine, per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ definiamo il suo valore $\mathbf{f}(p) \in \mathbb{R}$ in p ponendo $\mathbf{f}(p) = f(p)$ per un qualsiasi rappresentante (U, f) di $\mathbf{f}$.

Infine, sia $F\colon M \to N$ un'applicazione di classe C^∞, e siano (V_1, g_1) e (V_2, g_2) sono due rappresentanti di un germe $\mathbf{g} \in C^\infty\big(F(p)\big)$. Allora è evidente (esercizio) che $\big(F^{-1}(V_1), g_1\circ F\big)$ e $\big(F^{-1}(V_2), g_2\circ F\big)$ rappresentano lo stesso germe in p, che quindi dipende solo da $\mathbf{g}$ (e da F). Dunque possiamo introdurre la seguente

Definizione 2.4.3: Dati un'applicazione differenziabile fra varietà $F\colon M \to N$ e un punto $p \in M$, indicheremo con $F_p^*\colon C^\infty\big(F(p)\big) \to C^\infty(p)$ l'applicazione che associa a un germe $\mathbf{g} \in C^\infty\big(F(p)\big)$ di rappresentante (V, g) il germe $F_p^*(\mathbf{g}) = \mathbf{g}\circ F \in C^\infty(p)$ di rappresentante $\big(F^{-1}(V), g\circ F\big)$. Si verifica subito che F_p^* è un omomorfismo di algebre.

Esercizio 2.4.2. Dimostra che $(\mathrm{id}_M)_p^* = \mathrm{id}$ per ogni punto p di una varietà M, e che se $F\colon M \to N$ e $G\colon N \to S$ sono applicazioni differenziabili fra varietà allora $(G \circ F)_p^* = F_p^* \circ G_{F(p)}^*$ per ogni $p \in M$. In particolare deduci che se (U, φ) è una carta in $p \in M$ allora $\varphi_p^*\colon C^\infty\big(\varphi(p)\big) \to C^\infty(p)$ è un isomorfismo di algebre.

Siamo giunti alla definizione di vettore tangente:

Definizione 2.4.4: Sia M una varietà. Una *derivazione* in un punto $p \in M$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $X\colon C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ che soddisfa la *regola di Leibniz*

$$\forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p) \qquad\qquad X(\mathbf{fg}) = \mathbf{f}(p)X(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)X(\mathbf{f}).$$

Lo *spazio tangente* T_pM a M in p è, per definizione, l'insieme di tutte le derivazioni in p. Un elemento $X \in T_pM$ è detto *vettore tangente* a M in p. Chiaramente, T_pM è uno spazio vettoriale.

Osservazione 2.4.1. Se $U \subseteq M$ è aperto, abbiamo $T_pU = T_pM$ per ogni $p \in U$, in quanto $C_U^\infty(p)$ si identifica (perché?) in modo naturale con $C_M^\infty(p)$.

ESEMPIO 2.4.1. A qualsiasi vettore $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ possiamo associare la derivata parziale nella direzione di v definita da

$$\frac{\partial}{\partial v} = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Chiaramente, $\partial/\partial v$ definisce una derivazione di $C^\infty(p)$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$. In questo modo otteniamo un'immersione naturale di $\mathbb{R}^n$ in $T_pU = T_p\mathbb{R}^n$, immersione che dimostreremo essere un isomorfismo.

Esempio 2.4.2. Sia $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ una carta in p; vogliamo definire un vettore tangente $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \in T_pM$, che generalizza alle varietà la nozione di derivata parziale in una direzione coordinata. Dato $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$, sia (U, f) un suo rappresentante: definiamo allora

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (\mathbf{f}) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\bigl(\varphi(p)\bigr). \tag{2.4.1}$$

È facile verificare (esercizio) che questa definizione non dipende dal rappresentante, e che $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ è effettivamente una derivazione. A volte scriveremo $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^j}(p)$ invece di $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (\mathbf{f})$. Inoltre, se non ci sarà pericolo di confusione, scriveremo anche $\partial_j|_p$ o $\partial_j(p)$ per $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$.

Esempio 2.4.3. Sia $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curva C^∞ con $\sigma(0) = p$. Il *vettore tangente* $\sigma'(0)$ alla curva in p è definito ponendo

$$\sigma'(0)(\mathbf{f}) = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt}(0),$$

dove (U, f) è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{f}$. Chiaramente (esercizio) questa definizione non dipende dal rappresentante scelto, e $\sigma'(0)$ è una derivazione. Se $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ è una qualunque carta centrata in p, scrivendo $\varphi \circ \sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ troviamo

$$\frac{d(f \circ \sigma)}{dt}(0) = \frac{d\bigl((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \sigma)\bigr)}{dt}(0) = \sum_{j=1}^n (\sigma^j)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (\mathbf{f}),$$

per cui

$$\sigma'(0) = \sum_{j=1}^n (\sigma^j)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p ,$$

e abbiamo ottenuto un'effettiva generalizzazione del concetto di vettore tangente a una curva in $\mathbb{R}^n$. In particolare, $\partial/\partial x^j|_p$ è il vettore tangente alla curva $\sigma(t) = \varphi^{-1}(te_j)$, dove e_j è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Questi due esempi sono casi particolari di una costruzione molto più generale:

Definizione 2.4.5: Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile fra varietà. Dato $p \in M$, il *differenziale* $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ di F in p è l'applicazione lineare definita da

$$\forall X \in T_pM \qquad dF_p(X) = X \circ F_p^*,$$

dove $F_p^*\colon C^\infty\bigl(F(p)\bigr) \to C^\infty(p)$ è l'omomorfismo introdotto nella Definizione 2.4.3. In altre parole,

$$dF_p(X)(\mathbf{g}) = X(\mathbf{g} \circ F)$$

per ogni $\mathbf{g} \in C^\infty\bigl(F(p)\bigr)$. A volte si scrive $(F_*)_p$ per dF_p.

Osservazione 2.4.2. È facile verificare che

$$\sigma'(0) = d\sigma_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \right)$$

per ogni curva $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, e che

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \right)$$

per ogni carta locale $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ in $p \in M$.

Il differenziale gode delle proprietà che uno si aspetta:

Proposizione 2.4.2: (i) *Se M è una varietà e $p\in M$ allora $d(\mathrm{id}_M)_p=\mathrm{id}_{T_pM}$.*
(ii) *Se $F\colon M\to N$ e $G\colon N\to S$ sono due applicazioni differenziabili fra varietà e $p\in M$ allora*

$$d(G\circ F)_p=dG_{F(p)}\circ dF_p.$$

In particolare, se $F\colon M\to N$ è un diffeomorfismo allora dF_p è invertibile e $(dF_p)^{-1}=d(F^{-1})_{F(p)}$.

Dimostrazione: (i) Infatti $\mathbf{f}\circ\mathrm{id}_M=\mathbf{f}$ per ogni germe $\mathbf{f}\in C^\infty(p)$.
(ii) Prendiamo $X\in T_pM$ e $\mathbf{f}\in C^\infty\big((G\circ F)(p)\big)$. Allora

$$\begin{aligned}d(G\circ F)_p(X)(\mathbf{f})&=X\big((G\circ F)_p^*(\mathbf{f})\big)=X\big(\mathbf{f}\circ(G\circ F)\big)\\&=X\big(F_p^*(\mathbf{f}\circ G)\big)=dF_p(X)\big(G_{F(p)}^*(\mathbf{f})\big)=\big(dG_{F(p)}\circ dF_p\big)(X)(\mathbf{f}).\end{aligned}$$

□

Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare che lo spazio tangente in un punto a una varietà n-dimensionale è uno spazio vettoriale di dimensione finita esattamente n. Per far ciò ci serve il seguente

Lemma 2.4.3: *Sia $x_o=(x_o^1,\ldots,x_o^n)\in\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}\in C^\infty(x_o)$. Allora esistono germi $\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n\in C^\infty(x_o)$ tali che $\mathbf{g}_j(x_o)=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x^j}(x_o)$ e*

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}(x_o)+\sum_{j=1}^n(\mathbf{x}^j-x_o^j)\mathbf{g}_j,$$

dove $\mathbf{x}^j\in C^\infty(x_o)$ è il germe rappresentato dalla j-esima funzione coordinata.

Dimostrazione: Scelto un rappresentante (U,f) di $\mathbf{f}$ tale che U sia stellato rispetto a x_o, scriviamo

$$f(x)-f(x_o)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}f\big(x_o+t(x-x_o)\big)\,dt=\sum_{j=1}^n(x^j-x_o^j)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^j}\big(x_o+t(x-x_o)\big)\,dt.$$

Allora basta prendere come $\mathbf{g}_j$ il germe rappresentato dalla coppia (U,g_j) con

$$g_j(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^j}\big(x_o+t(x-x_o)\big)\,dt.$$

□

Proposizione 2.4.4: (i) *Sia $x_o=(x_o^1,\ldots,x_o^n)\in\mathbb{R}^n$. Allora l'applicazione $\iota\colon\mathbb{R}^n\to T_{x_o}\mathbb{R}^n$ definita da*

$$\iota(v)=\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{x_o}=\sum_{j=1}^n v^j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_o}$$

è un isomorfismo.
(ii) *Sia M una varietà di dimensione n, e $p\in M$. Allora T_pM è uno spazio vettoriale di dimensione n. In particolare, se $\varphi=(x^1,\ldots,x^n)$ è una carta in p, allora $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ è una base di T_pM.*

Dimostrazione: (i) Dobbiamo dimostrare che ι è bigettiva. È iniettiva: se $v\ne O$ dobbiamo avere $v^h\ne 0$ per qualche h; ma allora

$$\iota(v)(\mathbf{x}^h)=\sum_{j=1}^n v^j\frac{\partial x^h}{\partial x^j}(x_o)=v^h\ne 0,$$

e quindi $\iota(v)\ne O$. È surgettiva: dato $X\in T_{x_o}\mathbb{R}^n$ poniamo $v^j=X(\mathbf{x}^j)$ e $v=(v^1,\ldots,v^n)$. Vogliamo dimostrare che $X=\iota(v)$. Prima di tutto notiamo che

$$X(1)=X(1\cdot 1)=2\cdot X(1)\Rightarrow X(1)=0,$$

e quindi $X(c) = 0$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Sia allora $\mathbf{f} \in C^\infty(x_o)$; se applichiamo il Lemma 2.4.3 otteniamo

$$X(\mathbf{f}) = X\bigl(\mathbf{f}(x_o)\bigr) + \sum_{j=1}^n X\bigl((\mathbf{x}^j - {x_o}^j)\mathbf{g}_j\bigr) = \sum_{j=1}^n X(\mathbf{x}^j - x_o^j)\mathbf{g}_j(x_o) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^j}(x_o) = \iota(v)(\mathbf{f}),$$

cioè $X = \iota(v)$, come voluto.

(ii) Sia $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ una carta locale in p. L'Osservazione 2.4.1, l'Esempio 2.2.1 e la Proposizione 2.4.2 ci dicono che $d\varphi_p\colon T_pM = T_pU \to T_{\varphi(p)}V = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ è un isomorfismo, per cui $\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n$. Infine, l'ultima affermazione segue subito dall'Osservazione 2.4.2. $\square$

Osservazione 2.4.3. L'inverso dell'isomorfismo $\iota\colon \mathbb{R}^n \to T_{x_o}\mathbb{R}^n$ definito nella Proposizione 2.4.4.(i) si esprime facilmente:

$$\iota^{-1}(X) = \bigl(X(\mathbf{x}^1), \ldots, X(\mathbf{x}^n)\bigr)$$

per ogni $X \in T_{x_o}\mathbb{R}^n$.

I prossimi esercizi descrivono altre due caratterizzazioni dello spazio tangente, e due definizioni alternative di differenziale.

Esercizio 2.4.3. Sia M una varietà, e $p \in M$. Posto $\mathfrak{m}_p = \{\mathbf{f} \in C^\infty(p) \mid \mathbf{f}(p) = 0\}$, dimostra che $\mathfrak{m}_p$ è l'unico ideale massimale di $C^\infty(p)$, e che T_pM è canonicamente isomorfo al duale di $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$.

Esercizio 2.4.4. Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile fra varietà, e $p \in M$. Dimostra che $F_p^*(\mathfrak{m}_{F(p)}) \subseteq \mathfrak{m}_p$, e che se identifichiamo T_pM e $T_{F(p)}N$ con i duali di $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ e $\mathfrak{m}_{F(p)}/\mathfrak{m}_{F(p)}^2$ rispettivamente, allora il differenziale dF_p viene identificato all'applicazione duale dell'applicazione da $\mathfrak{m}_{F(p)}/\mathfrak{m}_{F(p)}^2$ a $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ indotta da F_p^*.

Esercizio 2.4.5. Sia M una varietà, e $p \in M$. Dimostra che ogni elemento di T_pM è della forma $\sigma'(0)$ per un'opportuna curva $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\sigma(0) = p$.

Esercizio 2.4.6. Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione C^∞ fra varietà e $p \in M$. Dimostra che se $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ è una curva C^∞ con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v \in T_pM$ allora

$$dF_p(v) = (F \circ \sigma)'(0).$$

Esercizio 2.4.7. Dimostra che il differenziale $d(\det)_X\colon M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ del determinante $\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è dato da

$$d(\det)_X(B) = (\det X)\operatorname{tr}(X^{-1}B)$$

per ogni $X \in GL(n, \mathbb{R})$ e $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, dove $\operatorname{tr}(A)$ è la traccia della matrice A.

Esempio 2.4.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, e $v_o \in V$. Allora è possibile identificare in modo canonico V e $T_{v_o}V$, generalizzando l'isomorfismo $\iota\colon \mathbb{R}^n \to T_{x_o}\mathbb{R}^n$ della Proposizione 2.4.4.(i). Dato $v \in V$, sia $\sigma_v\colon \mathbb{R} \to V$ la curva $\sigma_v(t) = v_o + tv$, e definiamo l'applicazione $\iota_{v_o}\colon V \to T_{v_o}V$ ponendo $\iota_{v_o}(v) = \sigma_v'(0)$. Quest'applicazione è definita in modo canonico, indipendente da qualsiasi scelta; per dimostrare che è un isomorfismo di spazi vettoriali possiamo usare una base. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, e $\varphi_{\mathcal{B}} = (x^1, \ldots, x^n)$ la corrispondente carta locale introdotta nell'Esempio 2.1.7. Allora $\varphi_{\mathcal{B}} \circ \sigma_v = \varphi_{\mathcal{B}}(v_o) + t\varphi_{\mathcal{B}}(v)$, per cui l'Esempio 2.4.3 ci dice che

$$\iota_{v_o}(v) = \sum_{j=1}^n x^j(v) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{v_o},$$

cioè $\iota_{v_o} = d(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1})_{\varphi_{\mathcal{B}}(v_o)} \circ \iota \circ \varphi_{\mathcal{B}}$, per cui ι_{v_o} è un isomorfismo, come affermato.

Osservazione 2.4.4. L'approccio da noi seguito *non* è adatto per definire lo spazio tangente a varietà di classe C^k quando $k < \infty$. Infatti si può dimostrare che lo spazio delle derivazioni di $C^0(p)$ si riduce alla sola derivazione nulla, mentre lo spazio delle derivazioni di $C^k(p)$ ha dimensione infinita per $1 \le k < +\infty$.

Esercizio 2.4.8. Sia M una varietà di classe C^0, e $p \in M$. Dimostra che l'unica derivazione di $C^0(p)$ è la derivazione nulla. (*Suggerimento:* per ogni $\mathbf{f} \in C^0(p)$ si ha $\mathbf{f} = \mathbf{f}(p) + \big(\mathbf{f} - \mathbf{f}(p)\big)^{1/3}\big(\mathbf{f} - \mathbf{f}(p)\big)^{2/3}$.)

Esercizio 2.4.9. Sia M una varietà di classe C^k, con $0 < k < +\infty$, e $p \in M$. Dimostra che lo spazio delle derivazioni di $C^k(p)$ ha dimensione infinita. (*Suggerimento:* fissata una carta locale $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ centrata in p, per ogni $0 < \varepsilon < 1$ sia $\mathbf{f}_\varepsilon \in C^k(p)$ il germe rappresentato dalla funzione $(x^1)^{k+\varepsilon}$. Dimostra che per ogni $0 < \varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_r < 1$ i germi $\mathbf{f}_{\varepsilon_1}, \ldots, \mathbf{f}_{\varepsilon_r}$ appartengono a $\mathfrak{m}_p$ e sono linearmente indipendenti modulo $\mathfrak{m}_p^2$, usando il fatto (da dimostrare) che il prodotto di due funzioni di classe C^k che si annullano in un punto è di classe C^{k+1} nell'intorno di quel punto. Concludi usando l'Esercizio 2.4.3.)

Osservazione 2.4.5. Due carte $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ e $\tilde\varphi = (\tilde x^1, \ldots, \tilde x^n)$ in uno stesso punto p di una varietà M ci forniscono due basi di T_pM, che devono essere legate da una relazione lineare. Per trovarla, prendiamo $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ e calcoliamo:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial \tilde x^h}\right|_p(\mathbf{f}) &= \frac{\partial(f\circ\tilde\varphi^{-1})}{\partial \tilde x^h}\big(\tilde\varphi(p)\big) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\tilde\varphi^{-1})}{\partial \tilde x^h}\big(\tilde\varphi(p)\big)\\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^k}\big(\varphi(p)\big)\frac{\partial(x^k\circ\tilde\varphi^{-1})}{\partial \tilde x^h}\big(\tilde\varphi(p)\big) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial \tilde x^h}(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p(\mathbf{f}),\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\frac{\partial x^k}{\partial \tilde x^h}(p) = \frac{\partial(x^k\circ\tilde\varphi^{-1})}{\partial \tilde x^h}\big(\tilde\varphi(p)\big) = \left.\frac{\partial}{\partial \tilde x^h}\right|_p(\mathbf{x}^k).$$

Siccome questo vale per ogni germe in p, otteniamo l'importante formula

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tilde x^h}\right|_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial \tilde x^h}(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p, \tag{2.4.2}$$

In maniera analoga possiamo vedere come cambiano le coordinate di un vettore tangente cambiando base. Infatti se prendiamo $X \in T_pM$ e scriviamo

$$X = \sum_{k=1}^n X^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p = \sum_{h=1}^n \tilde X^h \left.\frac{\partial}{\partial \tilde x^h}\right|_p,$$

allora (esercizio)

$$X^k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial \tilde x^h}(p)\,\tilde X^h. \tag{2.4.3}$$

Nota come sia in (2.4.2) che in (2.4.3) la somma sia *sull'indice ripetuto una volta in basso e una in alto.*

Vediamo infine come si esprime il differenziale in coordinate locali. Data un'applicazione differenziabile $F\colon M \to N$ fra varietà, sia (U, φ) una carta centrata in $p \in M$, e $(\hat U, \hat\varphi)$ una carta centrata in $F(p) \in N$; vogliamo la matrice che rappresenta dF_p rispetto alle basi $\{\partial/\partial x^h|_p\}$ di T_pM e $\{\partial/\partial \hat x^k|_{F(p)}\}$ di $T_{F(p)}N$, matrice che contiene per colonne le coordinate rispetto alla base in arrivo dei trasformati dei vettori della base di partenza. In altre parole, dobbiamo trovare $(a_h^k) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tali che

$$dF_p(\partial_h|_p) = \sum_{k=1}^n a_h^k\,\hat\partial_k|_{F(p)},$$

dove $\partial_h|_p = \partial/\partial x^h|_p$ e $\hat\partial_k|_{F(p)} = \partial/\partial \hat x^k|_{F(p)}$. Seguendo le definizioni abbiamo

$$a_h^k = \sum_{j=1}^n a_h^j\,\hat\partial_j|_{F(p)}(\hat{\mathbf{x}}^k) = dF_p(\partial_h|_p)(\hat{\mathbf{x}}^k) = \partial_h|_p(\hat{\mathbf{x}}^k\circ F) = \frac{\partial F^k}{\partial x^h}\big(\varphi(p)\big) = \left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_p(F^k),$$

dove abbiamo posto $\hat{\varphi} \circ F \circ \varphi^{-1} = (F^1, \ldots, F^m)$. In altre parole, la matrice che rappresenta il differenziale di F rispetto alle basi indotte dalle coordinate locali è la matrice jacobiana

$$\left(\frac{\partial F^k}{\partial x^h} \right),$$

come nel caso classico delle applicazioni differenziabili in $\mathbb{R}^n$. In particolare, il differenziale come da noi definito per applicazioni differenziabili fra aperti di spazi euclidei coincide con la definizione classica di differenziale. Come prima conseguenza, abbiamo una versione del teorema della funzione inversa per varietà:

Corollario 2.4.5: *Sia $F: M \to N$ un'applicazione differenziabile fra varietà. Sia $p \in M$ un punto tale che $dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ sia un isomorfismo. Allora esistono un intorno $U \subseteq M$ di p e un intorno $V \subseteq N$ di $F(p)$ tali che $F|_U: U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

Dimostrazione: Sia (U_1, φ_1) una qualsiasi carta in p, e (V_1, ψ_1) una qualsiasi carta in $F(p)$ con $F(U_1) \subseteq V_1$. Allora la tesi segue dal classico teorema della funzione inversa applicato a $\psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$. □

Osservazione 2.4.6. Se $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$, il differenziale di f in p è un'applicazione lineare da T_pM in $T_{f(p)}\mathbb{R}$. Quest'ultimo spazio è isomorfo a $\mathbb{R}$ tramite l'isomorfismo canonico $X \mapsto X(\mathbf{id}_\mathbb{R})$, come mostrato nell'Osservazione 2.4.3. Ma allora se $X \in T_pM$ possiamo identificare $df_p(X)$ con

$$df_p(X)(\mathbf{id}_\mathbb{R}) = X(\mathbf{id}_\mathbb{R} \circ f) = X(\mathbf{f}),$$

e quindi abbiamo ottenuto l'uguaglianza

$$df_p(X) = X(\mathbf{f})$$

valida per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$, quale che sia il suo rappresentante (U, f), e ogni $X \in T_pM$.

2.5 Sottovarietà

In questo paragrafo studieremo quando dei sottoinsiemi di una varietà possono essere considerati varietà a loro volta.

Definizione 2.5.1: Un'applicazione differenziabile $F: M \to N$ fra due varietà è un'*immersione* se il differenziale $dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ è iniettivo per ogni $p \in M$. Se inoltre F è un omeomorfismo con l'immagine (e quindi è in particolare globalmente iniettiva) diremo che è un *embedding*. Infine, diremo che è una *sommersione* (*submersion* in inglese) se il differenziale è surgettivo in ogni punto.

Esempio 2.5.1. La curva $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, pur essendo un omeomorfismo con l'immagine, non è un'immersione, in quanto $\alpha'(0) = O$. La curva $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\beta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ è un'immersione ma non un embedding, perché $\beta(2) = \beta(-2)$.

Esempio 2.5.2. La curva $\sigma: (-3, 0) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(0, -(t+2)\big) & \text{per } t \in (-3, -1], \\ \text{curva regolare} & \text{per } t \in [-1, -\frac{1}{\pi}], \\ (-t, -\sin\frac{1}{t}) & \text{per } t \in [-\frac{1}{\pi}, 0), \end{cases}$$

dove la "curva regolare" collega in modo liscio e iniettivo gli altri due pezzi, è un'immersione globalmente iniettiva ma non un embedding. Infatti, la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$ sull'immagine non è quella del segmento $(-3, 0)$, come si vede facilmente considerando gli intorni del punto $\sigma(-2) = (0, 0)$.

Ogni immersione è localmente un embedding:

Proposizione 2.5.1: *Sia $F: M_1 \to M_2$ un'immersione. Allora ogni $p \in M_1$ ha un intorno $U \subseteq M_1$ tale che $F|_U: U \to M_2$ sia un embedding.*

Dimostrazione: Siano $\varphi_1: U_1 \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2: U_2 \to V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ carte in p e $F(p)$ rispettivamente, e scriviamo

$$\tilde{F} = \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = \big(\tilde{F}^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \tilde{F}^m(x^1, \ldots, x^n)\big).$$

Siccome F è un'immersione, il differenziale di $\tilde{F}$ in $x_0 = \varphi_1(p)$ è iniettivo; quindi a meno di riordinare le coordinate possiamo supporre che

$$\frac{\partial(\tilde{F}^1, \ldots, \tilde{F}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}(x_0) = \det\left(\frac{\partial \tilde{F}^h}{\partial x^k}(x_0)\right)_{h,k=1,\ldots,n} \neq 0.$$

Sia $G: V_1 \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ data da

$$G(x^1, \ldots, x^n, t^{n+1}, \ldots, t^m) = \tilde{F}(x^1, \ldots, x^n) + (0, \ldots, 0, t^{n+1}, \ldots, t^m).$$

Chiaramente, $G(x, O) = \tilde{F}(x)$ per ogni $x \in V_1$, e

$$\det(dG_{(x_0,O)}) = \frac{\partial(\tilde{F}^1, \ldots, \tilde{F}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}(x_0) \neq 0;$$

il teorema della funzione inversa ci fornisce quindi un intorno $W_1 \subset V_1 \times \mathbb{R}^{m-n}$ di (x_0, O) e un intorno $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ di $\tilde{F}(x_0)$ tale che $G|_{W_1}$ sia un diffeomorfismo fra W_1 e W_2. Poniamo $V = W_1 \cap (V_1 \times \{O\})$ e $U = \varphi_1^{-1}(V)$. Allora $F|_U = \varphi_2^{-1} \circ G \circ (\varphi_1|_U, O)$ è un omeomomorfismo con l'immagine, come richiesto. □

Osservazione 2.5.1. Se $F: M \to N$ è un'immersione iniettiva allora $F(M) \subseteq N$ ha una naturale struttura di varietà *indotta* da quella di M. Infatti, sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di M tale che $F|_{U_\alpha}$ sia un omeomorfismo con l'immagine per ogni α (un tale atlante esiste grazie alla proposizione precedente). Allora è facile verificare (esercizio) che $\{\big(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F|_{U_\alpha}^{-1}\big)\}$ è un atlante per $F(M)$. Non è detto però che questa struttura di varietà sia compatibile con quella dell'ambiente N; per esempio, la topologia indotta dalla struttura di varietà potrebbe non coincidere con la topologia indotta da quella di N (vedi l'Esempio 2.5.2).

Esercizio 2.5.1. Sia $F: M \to N$ un'immersione *non* iniettiva, e $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di M tale che $F|_{U_\alpha}$ sia un omeomorfismo con l'immagine per ogni α. È ancora vero che $\{\big(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F|_{U_\alpha}^{-1}\big)\}$ è un atlante per $F(M)$?

Definizione 2.5.2: Una *sottovarietà* di una varietà N è un sottoinsieme $M \subset N$ provvisto di una struttura di varietà differenziabile tale che l'inclusione $\iota: M \hookrightarrow N$ risulti un embedding. La differenza $\dim N - \dim M$ è detta *codimensione* di M in N.

Esercizio 2.5.2. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e $F: U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione qualsiasi. Dimostra che il grafico Γ_F di F, con la struttura di varietà differenziabile descritta nell'Esempio 2.1.2, è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{m+n}$ se e solo se F è di classe C^∞.

Osservazione 2.5.2. La definizione di sottovarietà contiene tre richieste distinte. La prima è che l'inclusione sia un omeomorfismo con l'immagine: questo equivale a dire che la topologia indotta dalla struttura di varietà differenziale coincide con la topologia indotta dalla varietà ambiente, per cui la sottovarietà risulta essere un sottospazio topologico dell'ambiente. La seconda richiesta è che l'inclusione sia di classe C^∞: questo equivale a dire che per ogni carta (U, φ) dell'ambiente con $U \cap M \neq \varnothing$ la restrizione $\varphi|_M = \varphi \circ \iota$ sia di classe C^∞ anche rispetto alla struttura di varietà di M. Come discuteremo meglio più avanti (Corollario 2.5.4) questo implicherà che potremo trovare un atlante di M costituito da restrizioni a M di opportune carte dell'ambiente N. Inoltre, questa seconda richiesta implica anche che la restrizione a M di qualsiasi (germe di) funzione C^∞ di N è di classe C^∞ anche rispetto alla struttura differenziabile di M. Infine, la terza richiesta è che il differenziale $d\iota_p: T_pM \to T_pN$ sia iniettivo per ogni $p \in M$. Come vedremo (Esercizi 2.5.5 e 2.5.6), questo è equivalente a richiedere che ogni (germe di) funzione C^∞ in M si ottiene come restrizione di una funzione C^∞ definita in un opportuno aperto di M. Quindi questa definizione cattura bene l'idea che la struttura differenziabile di una sottovarietà debba essere indotta da quella della varietà ambiente.

Osservazione 2.5.3. Se $F: M \to N$ è un embedding di M in N, allora $F(M)$, considerata con la struttura di varietà indotta da M introdotta nell'Osservazione 2.5.1, è una sottovarietà di N (esercizio).

Osservazione 2.5.4. Se M è una sottovarietà di N e (U, φ) è una carta di N con $U \cap M \neq \varnothing$, allora $\varphi(U \cap M)$ è (perché?) una sottovarietà di $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, e $\varphi|_{U \cap M}$ è un diffeomorfismo con l'immagine, in quanto $\varphi|_{U \cap M} = \varphi \circ \iota|_{U \cap M}$.

Se M è una sottovarietà k-dimensionale di N, e (U,φ) è una carta di N con $U\cap M\neq\varnothing$, di primo acchito non possiamo dire che $(U\cap M,\varphi|_{U\cap M})$ sia una carta di M, in quanto $\varphi|_{U\cap M}$ non è in generale un aperto di $\mathbb{R}^k$. Quello che però è vero che per ogni $p\in M$ possiamo trovare una carta (U,φ) di N in p tale che $\varphi|_{U\cap M}$ sia un aperto di $\mathbb{R}^k\times\{O\}$, per cui $(U\cap M,\varphi_{U\cap M})$ può essere naturalmente considerata come una carta di M in p. Per dimostrarlo ricordiamo il classico Teorema del rango:

Teorema 2.5.2: (del rango) *Siano $U\subseteq\mathbb{R}^m$ e $V\subseteq\mathbb{R}^n$ aperti, e $F\colon U\to V$ un'applicazione differenziabile di rango costante $k\geq 0$. Allora per ogni $p\in U$ esistono una carta (U_0,φ) per $\mathbb{R}^m$ centrata in p e una carta (V_0,ψ) per $\mathbb{R}^n$ centrata in $F(p)$, con $U_0\subseteq U$ e $F(U_0)\subseteq V_0\subseteq V$, tali che*

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(x^1,\ldots,x^k,x^{k+1},\ldots,x^m)=(x^1,\ldots,x^k,0,\ldots,0)$$

e $\psi\bigl(F(U_0)\bigr)=\psi(V_0)\cap(\mathbb{R}^k\times\{O\})$.

Definizione 2.5.3: Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione differenziabile fra varietà. Il *rango* di F in $p\in M$ è il rango del differenziale dF_p. Chiaramente, se (U,φ) è una carta in p e (V,ψ) è una carta in $F(p)$, allora il rango di F in p è uguale al rango di $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$.

Corollario 2.5.3: *Sia M una varietà m-dimensionale, N una varietà n-dimensionale, e $F\colon M\to N$ un'applicazione differenziabile di rango costante $k\geq 0$. Allora per ogni $p\in M$ esistono una carta (U,φ) centrata in p e una carta (V,ψ) centrata in $F(p)$, con $F(U)\subseteq V$, tali che*

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(x^1,\ldots,x^k,x^{k+1},\ldots,x^m)=(x^1,\ldots,x^k,0,\ldots,0)$$

e $\psi\bigl(F(U)\bigr)=\psi(V)\cap(\mathbb{R}^k\times\{O\})$.

Dimostrazione: Sia (U_1,φ_1) una qualsiasi carta centrata in p, e (V_1,ψ_1) una qualsiasi carta centrata in $F(p)$ con $F(U_1)\subseteq V_1$. Allora basta applicare il Teorema del rango a $\psi_1\circ F\circ\varphi_1^{-1}$. □

Corollario 2.5.4: *Sia $M\subseteq N$ un sottoinsieme di una varietà n-dimensionale N. Allora M può essere provvisto di una struttura di varietà k-dimensionale che lo renda una sottovarietà di N se e solo se per ogni $p\in M$ esiste una carta (V,ψ) di N centrata in p tale che $\psi(V\cap M)=\psi(V)\cap(\mathbb{R}^k\times\{O\})$.*

Dimostrazione: Supponiamo che M sia una sottovarietà di N. Per definizione, l'inclusione $\iota\colon M\hookrightarrow N$ è di rango costante k. La tesi segue allora dal corollario precedente.

Viceversa, supponiamo di avere per ogni $p\in M$ una carta (V_p,ψ_p) di N centrata in p tale che $\psi_p(V_p\cap M)=\psi_p(V_p)\cap(\mathbb{R}^k\times\{O\})$. Indichiamo con $\pi_k\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ la proiezione sulle prime k coordinate, e poniamo $U_p=\pi_k\bigl(\psi_p(V_p\cap M)\bigr)$. Allora U_p è un aperto di $\mathbb{R}^k$, ed è facile verificare (esercizio) che $\{(V_p\cap M,\pi_k\circ\psi_p|_{V_p\cap M})\}$ è un k-atlante su M rispetto a cui M risulta essere una sottovarietà di N. □

Esercizio 2.5.3. Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione differenziabile di rango costante. Dimostra che se F è iniettiva allora è un'immersione.

Esercizio 2.5.4. Sia M una sottovarietà k-dimensionale di una varietà N. Sia V un aperto di $\mathbb{R}^k$, e $\psi\colon V\to N$ un'applicazione differenziabile iniettiva di rango costante k tale che $\psi(V)\subset M$. Dimostra che $\bigl(\psi(V),\psi^{-1}\bigr)$ è una carta di M.

Esercizio 2.5.5. Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione differenziabile, e $p\in M$. Dimostra che $dF_p\colon T_pM\to T_{F(p)}N$ è iniettivo se e solo se $F_p^*\colon C_N^\infty\bigl(F(p)\bigr)\to C_M^\infty(p)$ è surgettiva. Deduci che se $\iota\colon M\hookrightarrow N$ è una sottovarietà di una varietà N, e $p\in M$, per ogni germe $\mathbf{g}\in C_M^\infty(p)$ esiste $\tilde{\mathbf{g}}\in C_N^\infty(p)$ tale che $\tilde{\mathbf{g}}|_M=\mathbf{g}$, dove $\tilde{\mathbf{g}}|_M$ è un'altra notazione per $\iota_p^*\tilde{\mathbf{g}}=\tilde{\mathbf{g}}\circ\iota$.

Esercizio 2.5.6. Sia $\iota\colon M\hookrightarrow N$ una sottovarietà. Dimostra che per ogni $f\in C^\infty(M)$ e ogni intorno aperto U di M in N esiste una $\tilde{f}\in C^\infty(U)$ tale che $\tilde{f}|_M\equiv f$.

Esercizio 2.5.7. Sia $M\subseteq N$ un sottoinsieme di una varietà N. Dimostra che su M esiste al più una struttura di varietà differenziabile che lo renda una sottovarietà di N.

Se $\iota\colon M \hookrightarrow N$ è una sottovarietà di una varietà N, e $p \in M$, il differenziale $d\iota_p\colon T_pM \to T_pN$ realizza T_pM come sottospazio di T_pN. Il modo in cui un $v \in T_pM$ agisce su un germe $\mathbf{f} \in C^\infty_N(p)$ è il seguente:

$$d\iota_p(v)(\mathbf{f}) = v(\mathbf{f}|_M). \tag{2.5.1}$$

D'ora in poi, a meno di avviso contrario, se M è una sottovarietà di N e $p \in M$, identificheremo sempre T_pM con il sottospazio $d\iota_p(T_pM)$ di T_pN, facendo agire gli elementi di T_pM sui germi in $C^\infty_N(p)$ come in (2.5.1).

Esercizio 2.5.8. Sia $\iota\colon M \hookrightarrow N$ una sottovarietà di una varietà N, e $p \in M$. Dimostra che $v \in T_pN$ appartiene all'immagine di T_pM tramite $d\iota_p$ se e solo se $v(\mathbf{f}) = 0$ per ogni $\mathbf{f} \in C^\infty_N(p)$ tale che $\mathbf{f}|_M \equiv 0$.

L'immagine inversa di un valore regolare definisce una sottovarietà, come nella Proposizione 2.1.2.

Definizione 2.5.4: Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile fra varietà. Un punto $p \in M$ è detto *punto critico* di F se $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ non è surgettivo. Un *valore critico* è l'immagine di un punto critico. Un *valore regolare* è un punto di $F(M)$ che non è un valore critico. Indicheremo con $\mathrm{Crit}(F) \subseteq M$ l'insieme dei punti critici di F.

Proposizione 2.5.5: *Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile fra varietà, con $\dim M = n + k$ e $\dim N = n$. Allora:*

(i) *per ogni $a \in F(M)$ l'insieme $N_a = F^{-1}(a) \setminus \mathrm{Crit}(F)$ è una sottovarietà k-dimensionale di M. In particolare, se $a \in N$ è un valore regolare allora $F^{-1}(a)$ è una sottovarietà k-dimensionale di M.*

(ii) *Se $p \in N_a$ lo spazio tangente di N_a in p coincide con il nucleo di dF_p. In particolare, se $N = \mathbb{R}$ e $F = f \in C^\infty(M)$, allora lo spazio tangente di N_a in p è dato dai vettori $v \in T_pM$ tali che $v(\mathbf{f}) = 0$.*

Dimostrazione: La prima parte si dimostra esattamente come nella Proposizione 2.1.2, usando carte locali (esercizio). Per la seconda parte, e indichiamo con $\iota\colon N_a \hookrightarrow M$ l'inclusione. Allora per ogni $p \in N_a$ possiamo identificare T_pN_a con la sua immagine tramite $d\iota_p$ in T_pM, e quindi dobbiamo dimostrare che $d\iota_p(T_pN_a) = \mathrm{Ker}\, dF_p$. Siccome p non è un punto critico, entrambi questi spazi hanno dimensione k; quindi ci basta dimostrare che sono uno contenuto nell'altro. Prendiamo $v \in T_pN_a$ e $\mathbf{f} \in C^\infty\bigl(F(p)\bigr)$. Allora

$$dF_p\bigl(d\iota_p(v)\bigr)(\mathbf{f}) = d(F \circ \iota)_p(v)(\mathbf{f}) = v(\mathbf{f} \circ F \circ \iota) = v(\mathbf{f} \circ F|_{N_a}) = 0,$$

in quanto $F|_{N_a}$ è costante. Quindi $dF_p\bigl(d\iota_p(v)\bigr) = O$, e $d\iota_p(v) \in \mathrm{Ker}\, dF_p$, come voluto. □

Esercizio 2.5.9. Sia $M \subseteq N$ un sottoinsieme di una varietà N tale che per ogni $p \in M$ esista un intorno U di p in N per cui $M \cap U$ sia una sottovarietà k-dimensionale di N. Dimostra che allora M è una sottovarietà k-dimensionale di N.

Esercizio 2.5.10. Sia $F\colon M \to N$ un embedding di una m-varietà M in una n-varietà N. Dimostra che per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto $U \subseteq M$ di p, un intorno aperto $V \subseteq N$ di $F(p)$, e due sommersioni $G\colon V \to M$ e $H\colon V \to \mathbb{R}^{n-m}$ tali che $G \circ F|_U = \mathrm{id}_U$ e $F(U) = V \cap F(M) = H^{-1}(O)$.

Esercizio 2.5.11. Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile fra varietà, e $S \subset N$ una sottovarietà. Diremo che F è *trasversa* a S se per ogni $p \in F^{-1}(S)$ si ha $T_{F(p)}N = dF_p(T_pM) + T_{F(p)}S$, dove la somma non è necessariamente diretta. Dimostra che se F è trasversa a S allora $F^{-1}(S)$ è una sottovarietà di M di codimensione uguale alla codimensione di S in N.

Concludiamo questa sezione citando due importanti risultati che non abbiamo il tempo di dimostrare. Il primo teorema, dimostrato da Whitney nel 1944, ci dice che ogni varietà può essere realizzata come sottovarietà di uno spazio euclideo di dimensione abbastanza grande:

Teorema 2.5.6: *Ogni varietà M n-dimensionale può essere realizzata come sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^{2n+1}$, e come sottovarietà (non necessariamente chiusa) di $\mathbb{R}^{2n}$. In altre parole, esistono un embedding proprio di M in $\mathbb{R}^{2n+1}$, e un embedding di M in $\mathbb{R}^{2n}$.*

Il secondo teorema è una caratterizzazione di quali sottogruppi di un gruppo di Lie sono sottovarietà:

Teorema 2.5.7: *Sia G un gruppo di Lie, e H un suo sottogruppo. Allora H è una sottovarietà di G (e quindi un gruppo di Lie) se e solo se è un sottoinsieme chiuso di G.*

Capitolo 3

Fibrati vettoriali

3.1 Definizioni ed esempi

Uno dei motivi per cui la struttura di varietà è così utile è che l'unione disgiunta degli spazi tangenti a una varietà ha a sua volta una struttura naturale di varietà. Si tratta del primo esempio di una categoria di oggetti estremamente importanti, i fibrati vettoriali.

Definizione 3.1.1: Un *fibrato vettoriale* di *rango* r su una varietà M è un'applicazione differenziabile surgettiva $\pi: E \to M$ fra una varietà E (detta *spazio totale* del fibrato) e la varietà M (detta *base* del fibrato) che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) per ogni $p \in M$ l'insieme $E_p = \pi^{-1}(p)$, detto *fibra* di E sopra p, è dotato di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione r, e indicheremo con O_p il vettore nullo di E_p;

(ii) per ogni $p \in M$ esiste un intorno U di p in M e un diffeomorfismo $\chi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, detto *banalizzazione locale* di E, tale che $\pi_1 \circ \chi = \pi$ (dove abbiamo indicato con $\pi_1: U \times \mathbb{R}^r \to U$ la proiezione sulla prima coordinata), e tale che la restrizione di χ a ciascuna fibra sia un isomorfismo fra gli spazi vettoriali E_p e $\{p\} \times \mathbb{R}^r$.

I fibrati vettoriali di rango 1 sono chiamati *fibrati in rette*. Quando non c'è rischio di confondersi useremo lo spazio totale E per indicare un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$, sottintendendo la proiezione π. Infine, partendo da spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ invece che da spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ si ottiene la nozione di *fibrato vettoriale complesso*.

In altre parole, un fibrato vettoriale è un modo differenziabile di associare uno spazio vettoriale a ciascun punto di una varietà.

Esempio 3.1.1. Se M è una varietà, allora $E = M \times \mathbb{R}^r$ considerato con la proiezione $\pi: M \times \mathbb{R}^r \to M$ sulla prima coordinata è un fibrato vettoriale di rango r, detto *fibrato banale*.

Esempio 3.1.2. Se $\pi: E \to M$ è un fibrato vettoriale su M di rango r, e $U \subset M$ è aperto, allora $\pi_U: E_U \to U$, dove $E_U = \pi^{-1}(U)$ e $\pi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, è un fibrato vettoriale di rango r su U, detto *restrizione* di E a U.

Esercizio 3.1.1. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r sulla varietà M, e $S \subset M$ una sottovarietà. Dimostra che $\pi_S: E|_S \to S$, dove $E|_S = \pi^{-1}(S)$ e $\pi_S = \pi|_{\pi^{-1}(S)}$, è un fibrato vettoriale di rango r su S, detto *restrizione* di E a S. (*Suggerimento:* può essere utile l'Esercizio 2.5.11).

C'è un modo tipico per verificare se una collezione di spazi vettoriali è un fibrato vettoriale:

Proposizione 3.1.1: *Siano M una varietà, E un insieme e $\pi: E \to M$ un'applicazione surgettiva. Supponiamo di avere un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M e applicazioni bigettive $\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ tali che*

(a) *$\pi_1 \circ \chi_\alpha = \pi$, dove $\pi_1: U \to \mathbb{R}^r \to U$ è la proiezione sulla prima coordinata;*

(b) *per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ esiste un'applicazione differenziabile*

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$$

tale che la composizione $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$ sia della forma

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, v) = \big(p, g_{\alpha\beta}(p)v\big). \tag{3.1.1}$$

Allora l'insieme E ammette un'unica struttura di fibrato vettoriale di rango r su M per cui le χ_α siano banalizzazioni locali.

Dimostrazione: Poniamo $E_p = \pi^{-1}(p)$ per ogni $p \in M$. Se $p \in U_\alpha$, la restrizione di χ_α a E_p è una bigezione con $\{p\} \times \mathbb{R}^r$, e quindi possiamo usarla per definire una struttura di spazio vettoriale su E_p: se u_1, $u_2 \in E_p$ sono tali che $\chi_\alpha(u_j) = (p, v_j)$ per opportuni v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^r$, poniamo

$$u_1 + u_2 = \chi_\alpha^{-1}(p, v_1 + v_2) \qquad \text{e} \qquad \lambda u_1 = \chi_\alpha^{-1}(p, \lambda v_1) \tag{3.1.2}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. A priori, la struttura di spazio vettoriale così definita potrebbe dipendere dalla banalizzazione χ_α usata, nel qual caso saremmo nei guai, in quanto in un fibrato vettoriale la struttura di spazio vettoriale delle fibre dev'essere definita indipendentemente dalle banalizzazioni. Ma per fortuna la (3.1.1) ci evita questo problema. Infatti, se p appartiene anche a un altro U_β, e scriviamo $\chi_\beta(u_j) = (p, w_j)$ per opportuni w_1, $w_2 \in \mathbb{R}^r$, abbiamo

$$(p, v_j) = \chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, w_j) = \big(p, g_{\alpha\beta}(p) w_j\big),$$

cioè $v_j = g_{\alpha\beta}(p) w_j$, e quindi

$$\begin{aligned}\chi_\alpha^{-1}(p, v_1 + v_2) &= \chi_\alpha^{-1}\big(p, g_{\alpha\beta}(p) w_1 + g_{\alpha\beta}(p) w_2\big) = \chi_\alpha^{-1}\big(p, g_{\alpha\beta}(p)(w_1 + w_2)\big) \\ &= \chi_\alpha^{-1} \circ (\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1})(p, w_1 + w_2) = \chi_\beta^{-1}(p, w_1 + w_2),\end{aligned}$$

per cui l'operazione di somma non dipende dalla banalizzazione usata per definirla. Analogamente si dimostra che l'operazione di prodotto per uno scalare è ben definita.

Poniamo ora $\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ e $\tilde{\chi}_\alpha = (\varphi_\alpha, \mathrm{id}) \circ \chi_\alpha$. Allora $\tilde{\chi}_\alpha \circ \tilde{\chi}_\beta^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, g_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta^{-1})$ è di classe C^∞, per cui $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\chi}_\alpha)\}$ è un atlante su E di dimensione $n + r$, che soddisfa (esercizio) tutte le proprietà necessarie perché $\pi: E \to M$ sia un fibrato vettoriale.

Viceversa, supponiamo di avere su E una struttura di fibrato vettoriale per cui le χ_α siano banalizzazioni locali. In tal caso, le χ_α devono indurre isomorfismi fra le fibre ed $\mathbb{R}^r$, per cui la (3.1.2) dev'essere valida, e la struttura di spazio vettoriale su ciascuna fibra è unica. Inoltre, le $\tilde{\chi}_\alpha = (\varphi_\alpha, \mathrm{id}) \circ \chi_\alpha$ sono chiaramente diffeomorfismi con aperti di $\mathbb{R}^{n+r}$, dove $n = \dim M$, e quindi la struttura differenziabile di E coincide con quella indotta dall'atlante $\tilde{A}$ definito tramite le $\tilde{\chi}_\alpha$. □

Definizione 3.1.2: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Diremo che una carta locale (U, φ) di M *banalizza* E se esiste una banalizzazione locale del fibrato definita su $\pi^{-1}(U)$. Un atlante $\mathcal{A}$ di M *banalizza* il fibrato E se ogni carta di $\mathcal{A}$ lo fa.

Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante che banalizza un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$, e indichiamo con χ_α la banalizzazione sopra U_α. Allora le composizioni $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}$ devono indurre per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ un isomorfismo di $\mathbb{R}^r$ che dipende in modo C^∞ da p, per cui devono necessariamente esistere applicazioni differenziabili $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ che soddisfano (3.1.1).

Definizione 3.1.3: Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante che banalizza un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Le applicazioni $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ che soddisfano (3.1.1) sono dette *funzioni di transizione* per il fibrato E rispetto all'atlante $\mathcal{A}$.

I prossimi due esercizi mostrano come per definire un fibrato vettoriale su una varietà M sia sufficiente avere le funzioni di transizione.

Esercizio 3.1.2. Siano $\{g_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$ rispetto a un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M. Dimostra che $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}^{-1}$ (inversa di matrici) su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, e che $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ (prodotto di matrici) su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$.

Esercizio 3.1.3. Supponiamo di avere un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ su M, e funzioni $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ che soddisfano le proprietà dell'esercizio precedente. Dimostra che esiste un unico (a meno di isomorfismi: vedi oltre per l'ovvia definizione di isomorfismo fra fibrati vettoriali) fibrato vettoriale E su M che abbia le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione rispetto all'atlante $\mathcal{A}$. (*Suggerimento:* leggi l'Esempio 3.1.4 più sotto.)

Proviamo ad applicare la Proposizione 3.1.1 agli spazi tangenti. Data una varietà M, indichiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi tangenti T_pM al variare di $p \in M$, e sia $\pi: TM \to M$ la proiezione che manda ciascun T_pM in p. Dato un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, possiamo definire bigezioni $\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n v^j \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right|_p\right) = (p, v),$$

dove $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ e $v = (v^1, \ldots, v^n)$. La (2.4.2) ci dice allora che

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, v) = \chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n v^j \left.\frac{\partial}{\partial x_\beta^j}\right|_p\right) = \chi_\alpha\left(\sum_{h=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^j}(p) v^j\right] \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^h}\right|_p\right) = \left(p, \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}(p) v\right),$$

dove $\partial x_\alpha / \partial x_\beta$ è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$. Quindi (3.1.1) è soddisfatta con

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta},$$

per cui otteniamo una struttura di fibrato vettoriale su TM.

Definizione 3.1.4: Sia M una varietà di dimensione n. Il fibrato vettoriale $\pi: TM \to M$ di rango n con la struttura appena definita si dice *fibrato tangente* alla varietà.

Un altro esempio è il fibrato cotangente. Indichiamo con T_p^*M lo spazio duale di T_pM, e con T^*M l'unione disgiunta dei T_p^*M al variare di $p \in M$, con l'ovvia proiezione $\pi: T^*M \to M$. Data una carta locale $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ in $p \in M$, indichiamo con $\{dx_\alpha^1|_p, \ldots, dx_\alpha^n|_p\}$ la base di T_p^*M duale della base $\{\partial/\partial x_\alpha^1|_p, \ldots, \partial/\partial x_\alpha^n|_p\}$ di T_pM. È facile verificare che (2.4.2) implica

$$dx_\beta^k|_p = \sum_{h=1}^n \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^h}(p)\, dx_\alpha^h|_p, \tag{3.1.3}$$

per cui possiamo nuovamente applicare la Proposizione 3.1.1. Infatti, se definiamo $\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ anche stavolta ponendo

$$\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n w_j\, dx_\alpha^j|_p\right) = (p, w^T),$$

dove $w^T \in \mathbb{R}^n$ è il vettore colonna trasposto del vettore riga $(w_1, \ldots, w_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$, otteniamo

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, w^T) = \chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n w_j\, dx_\beta^j|_p\right) = \chi_\alpha\left(\sum_{h=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^h}(p) w_j\right] dx_\alpha^h|_p\right) = \left(p, \left[\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}(p)\right]^T w^T\right),$$

per cui recuperiamo (3.1.1) con

$$g_{\alpha\beta} = \left[\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right]^T,$$

dove A^T indica la trasposta della matrice A.

Definizione 3.1.5: Sia M una varietà di dimensione n. Il fibrato vettoriale $\pi: T^*M \to M$ di rango n con la struttura appena definita si dice *fibrato cotangente* alla varietà.

Osservazione 3.1.1. Data una carta locale $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ in un punto p di una varietà M, abbiamo introdotto due notazioni pericolosamente simili: dx_p^j, che indica il differenziale in p della funzione coordinata x^j, e $dx^j|_p$, l'elemento della base duale di T_p^*M. Per fortuna, ricordando l'Osservazione 2.4.6 di fatto possiamo identificare questi due oggetti. Infatti, dx_p^j è un'applicazione lineare da T_pM a valori in $\mathbb{R}$, per cui è un elemento di T_p^*M; inoltre,

$$dx_p^j\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_p\right) = \frac{\partial x^j}{\partial x^h}(p) = \delta_h^j,$$

per cui $dx_p^j = dx^j|_p$.

Osservazione 3.1.2. Come diventerà ancora più chiaro a partire dal prossimo capitolo, in geometria differenziale è importante mantenere distinti vettori colonna e vettori riga, ovvero non identificare $\mathbb{R}^n$ con il suo duale $(\mathbb{R}^n)^*$. La scelta di una base fornisce un isomorfismo fra T_pM e $\mathbb{R}^n$; la scelta della base duale corrisponde a considerare l'inversa del duale di questo isomorfismo, e quindi identifica T_p^*M con $(\mathbb{R}^n)^*$. In altre parole, le coordinate rispetto alla base duale degli elementi di T_p^*M vivono in maniera naturale in $(\mathbb{R}^n)^*$, per cui sono vettori riga, e non vettori colonna. Siccome come modello per i fibrati vettoriali usiamo $\mathbb{R}^n$ e non il suo duale, nelle formule riguardanti il fibrato cotangente siamo costretti a introdurre la trasposizione. In particolare, le funzioni di transizione del fibrato cotangente sono le inverse trasposte delle funzioni di transizione del fibrato tangente, e non semplicemente le inverse.

Nel Capitolo 1 abbiamo visto altre operazioni che possiamo effettuare sugli spazi vettoriali T_pM; possiamo per esempio costruire l'algebra tensoriale, o l'algebra esterna. Abbiamo anche visto come ottenere delle basi di questi spazi, facendo prodotti tensoriali o prodotti esterni di elementi delle basi di T_pM e T_p^*M. La multilinearità del prodotto tensoriale e del prodotto esterno ci dice anche come cambiano queste basi cambiando carte locali: otteniamo formule del tipo

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_r}}\otimes dx_\beta^{h_1}\otimes\cdots\otimes dx_\beta^{h_s}\\&\qquad=\sum_{a_1,\ldots,a_r=1}^n\sum_{b_1,\ldots,b_s=1}^n\frac{\partial x_\alpha^{a_1}}{\partial x_\beta^{j_1}}\cdots\frac{\partial x_\alpha^{a_r}}{\partial x_\beta^{j_r}}\frac{\partial x_\beta^{h_1}}{\partial x_\alpha^{b_1}}\cdots\frac{\partial x_\beta^{h_s}}{\partial x_\alpha^{b_s}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{a_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{a_r}}\otimes dx_\alpha^{b_1}\otimes\cdots\otimes dx_\alpha^{b_s},\end{aligned}$$

per cui possiamo procedere (esercizio) come fatto nel caso dei fibrati tangente e cotangente, ottenendo i fibrati tensoriali.

Definizione 3.1.6: Sia M una varietà. Indichiamo con T_l^kM l'unione disgiunta degli spazi $T_l^k(T_pM)$ al variare di $p\in M$, e sia $\pi\colon T_l^kM\to M$ la proiezione associata. Allora T_l^kM, con la struttura naturale sopra descritta, è detto *fibrato dei* $\binom{k}{l}$*-tensori* su M. Indicheremo invece con $\bigwedge^r M$ il *fibrato delle* r*-forme* ottenuto prendendo l'unione disgiunta degli spazi $\bigwedge^r(T_p^*M)$. In particolare, $\bigwedge^1 M=T^*M$.

Osservazione 3.1.3. Attenzione: $\bigwedge_p^r M$ è uguale a $\bigwedge^r(T_p^*M)$ e non a $\bigwedge^r(T_pM)$ come ci si sarebbe potuti aspettare, per cui $\bigwedge^r M$ è contenuto in T_r^0M invece di T_0^rM. Il motivo di questa scelta è che mentre il fibrato delle r-forme come definito qui è infinitamente utile in geometria differenziale, il fibrato ottenuto considerando gli spazi $\bigwedge^r(T_pM)$ viene usato così di rado da non meritare un simbolo speciale.

I fibrati tensoriali naturalmente non esauriscono la categoria dei fibrati vettoriali interessanti.

Esempio 3.1.3. Sia S una sottovarietà di dimensione k di una varietà n-dimensionale M. Abbiamo già osservato come per ogni $p\in S$ possiamo identificare ciascun T_pS con un sottospazio vettoriale di T_pM. Allora il *fibrato normale* di S in M è il fibrato vettoriale N_S su S di rango $n-k$ ottenuto prendendo l'unione disgiunta degli spazi vettoriali quozienti T_pM/T_pS, con la proiezione naturale $\pi\colon N_S\to S$. Per costruire le banalizzazioni locali, scegliamo un atlante $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ di S in modo che ciascuna carta $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ provenga da una carta $(\tilde U_\alpha,\tilde\varphi_\alpha)$ di M come indicato nel Corollario 2.5.4. In particolare, posto $\tilde\varphi_\alpha=(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)$, per ogni $p\in U_\alpha$ i vettori $\{\partial/\partial x_\alpha^1|_p,\ldots,\partial/\partial x_\alpha^k|_p\}$ formano una base di T_pS, per cui una base di T_pM/T_pS è data da $\{\partial/\partial x_\alpha^{k+1}|_p+T_pS,\ldots,\partial/\partial x_\alpha^n|_p+T_pS\}$. Quindi possiamo definire una banalizzazione locale $\chi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^{n-k}$ ponendo

$$\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^{n-k}v^j\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{n+j}}\right|_p+T_pS\right)\right)=(p,v),$$

e non è difficile (esercizio) verificare che le ipotesi della Proposizione 3.1.1 sono soddisfatte.

Esercizio 3.1.4. Definisci i concetti di sottofibrato di un fibrato vettoriale, di quoziente di un fibrato per un suo sottofibrato, di somma diretta e di prodotto tensoriale di due fibrati sulla stessa varietà, e verifica che il fibrato normale N_S introdotto nel precedente esempio può essere identificato con il fibrato quoziente $TM|_S/TS$, dove $TM|_S$ è la restrizione di TM a S (vedi l'Esercizio 3.1.1).

Esempio 3.1.4. Vogliamo introdurre una famiglia di fibrati in rette sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Sia $\mathcal{A} = \{(U_0, \varphi_0), \ldots, (U_n, \varphi_n)\}$ l'atlante introdotto nell'Esempio 2.1.12, e prendiamo $d \in \mathbb{Z}$. Indichiamo con E_d l'unione disgiunta degli insiemi $U_0 \times \mathbb{R}, \ldots, U_n \times \mathbb{R}$ quozientato rispetto alla relazione d'equivalenza $\sim$ così definita: $(x, \lambda) \in U_h \times \mathbb{R}$ è equivalente a $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \in U_k \times \mathbb{R}$ se e solo se

$$x = \tilde{x} \qquad \text{e} \qquad \lambda = \left(\frac{x^k}{x^h}\right)^d \tilde{\lambda},$$

dove abbiamo scritto $x = [x^0 : \cdots : x^n]$ come al solito. In particolare, $(x, \lambda) \sim (\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ implica che $x = \tilde{x} \in U_h \cap U_k$, per cui la relazione d'equivalenza è ben definita e abbiamo una proiezione naturale $\pi: E_d \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. È ora facile usare la Proposizione 3.1.1 per dimostrare che abbiamo definito dei fibrati in rette: infatti per ogni $j = 0, \ldots, n$ la proiezione sul quoziente è una bigezione fra $U_j \times \mathbb{R}$ e $\pi^{-1}(U_j)$, per cui possiamo usarne l'inversa $\chi_j: \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}$ per definire le banalizzazioni locali. Per costruzione le funzioni di transizione $g_{hk}: U_h \cap U_k \to GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ sono date da

$$g_{hk}(x) = \left(\frac{x_k}{x_h}\right)^d.$$

Chiaramente, $E_0 = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ è il fibrato in rette banale. Si può inoltre dimostrare che gli E_d, a meno di isomorfismi (vedi sotto per la definizione — ovvia — di isomorfismo fra fibrati), sono tutti e soli i fibrati in rette su $\mathbb{P}^n$.

Concludiamo questo paragrafo introducendo anche le applicazioni fra fibrati:

Definizione 3.1.7: Siano $\pi_1: E_1 \to M_1$ e $\pi_2: E_2 \to M_2$ due fibrati vettoriali. Un *morfismo* fra i due fibrati è una coppia di applicazioni differenziabili $L: E_1 \to E_2$ e $F: M_1 \to M_2$ tali che $\pi_2 \circ L = F \circ \pi_1$ (per cui $L\big((E_1)_p\big) \subseteq (E_2)_{F(p)}$ per ogni $p \in M_1$, cioè L manda fibre in fibre), e che $L|_{(E_1)_p}: (E_1)_p \to (E_2)_{F(p)}$ sia lineare per ogni $p \in M$. Un morfismo invertibile (cioè tale che sia L che F siano diffeomorfismi) è detto *isomorfismo* di fibrati vettoriali. A volte indicheremo un morfismo di fibrati scrivendo semplicemente $L: E_1 \to E_2$ sottintendendo l'applicazione F. Quando $M_1 = M_2$, cioè se E_1 ed E_2 sono fibrati sulla stessa base, a meno di avviso di contrario supporremo sempre che l'applicazione F sia l'identità, per cui L soddisfa $\pi_2 \circ L = \pi_1$. Spesso viene detto *banale* un qualsiasi fibrato vettoriale isomorfo al fibrato banale.

In altre parole, un morfismo di fibrati è un'applicazione che rispetta sia la struttura differenziabile che la struttura di fibrato vettoriale.

Esercizio 3.1.5. Se $F: M \to N$ è un'applicazione differenziabile, dimostra che $dF: TM \to TN$ è un morfismo di fibrati.

Esercizio 3.1.6. Sia $F: M \to N$ un'applicazione differenziabile, e $\pi: E \to N$ un fibrato vettoriale di rango r su N. Per ogni $p \in M$ poniamo $(F^*E)_p = E_{F(p)}$, e sia F^*E l'unione disgiunta degli $(F^*E)_p$ al variare di $p \in M$, con la proiezione canonica $\tilde{\pi}: F^*E \to M$. Dimostra che F^*E ha una struttura naturale di fibrato vettoriale di rango r su M, detto *fibrato pull-back* (o *fibrato indotto*) di E rispetto a F. Dimostra inoltre che se $\iota: S \to M$ è una sottovarietà e E è un fibrato su M, allora $\iota^*E = E|_S$.

Esercizio 3.1.7. Sia (L, F) un morfismo fra i fibrati vettoriali $\pi_1: E_1 \to M_1$ e $\pi_2: E_2 \to M_2$. Dimostra che $\mathrm{Ker}(L, F) = \{v \in E_1 \mid L(v) = O_{F(p)}\} \subseteq E_1$ è un sottofibrato di E_1, e che $\mathrm{Im}(L, F) = L(E_1) \subseteq E_2$ è un sottofibrato di E_2.

Esercizio 3.1.8. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante che banalizza due fibrati vettoriali $\pi: E \to M$ e $\tilde{\pi}: \tilde{E} \to M$ di rango r su M, e indichiamo con $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ le relative funzioni di transizione. Dimostra che E e $\tilde{E}$ sono isomorfi se e solo se esistono applicazioni differenziabili $\sigma_\alpha: U_\alpha \to GL(r, \mathbb{R})$ tali che $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} g_{\alpha\beta} \sigma_\beta$.

3.2 Sezioni di fibrati

Quando si ha un fibrato vettoriale, una cosa che risulta molto utile è studiare le applicazioni dalla base allo spazio totale del fibrato che associano a ogni punto della base un elemento della fibra su quel punto.

Definizione 3.2.1: Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M. Una *sezione* di E è un'applicazione differenziabile $s\colon M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, cioè tale che $s(p) \in E_p$ per ogni $p \in M$. Lo spazio vettoriale delle sezioni di E verrà indicato con $\mathcal{E}(M)$. La sezione $O_E \in \mathcal{E}(M)$ che a ogni punto $p \in M$ associa il vettore nullo $O_p \in E_p$ è detta *sezione nulla* di E.

Osservazione 3.2.1. Se $E = M \times \mathbb{R}^r$ è il fibrato banale di rango r, allora lo spazio delle sezioni $\mathcal{E}(M)$ è canonicamente isomorfo allo spazio $C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$ delle applicazioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^n$. Infatti, se $s \in \mathcal{E}(M)$ è una sezione allora $\pi_2 \circ s \in C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$, dove $\pi_2\colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ è la proiezione sulla seconda coordinata; viceversa, se $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$ allora $p \mapsto \bigl(p, F(p)\bigr)$ è una sezione di $M \times \mathbb{R}^r$. Quindi in un certo senso le sezioni di un fibrato sono una generalizzazione delle applicazioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^r$.

Osservazione 3.2.2. Ogni fibrato vettoriale ammette sezioni. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r, e $\chi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ una banalizzazione locale. Scegliamo una qualsiasi applicazione differenziabile $F\colon U \to \mathbb{R}^r$ e sia $\rho \in C^\infty(M)$ tale che $\mathrm{supp}(\rho) \subset U$. Allora l'applicazione $s\colon M \to E$ data da

$$s(p) = \begin{cases} \chi^{-1}\bigl(p, \rho(p)F(p)\bigr) & \text{if } p \in U, \\ O_p & \text{if } p \in M \setminus \mathrm{supp}(\rho), \end{cases}$$

è chiaramente una sezione di E.

Le sezioni del fibrato tangente, e più in generale dei fibrati tensoriali, hanno nomi particolari.

Definizione 3.2.2: Un *campo vettoriale* su una varietà M è una sezione del fibrato tangente TM. Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali su M verrà indicato con $\mathcal{T}(M)$. Una *k-forma differenziale* su M è una sezione del fibrato $\bigwedge^k M$. Lo spazio vettoriale delle k-forme differenziali su M verrà indicato con $A^k(M)$. Un *campo tensoriale di tipo* $\binom{k}{l}$ (o $\binom{k}{l}$*-tensore*) su M è una sezione del fibrato $T^k_l M$. Lo spazio vettoriale dei $\binom{k}{l}$-tensori verrà indicato con $\mathcal{T}^k_l(M)$.

Osservazione 3.2.3. Se $X \in \mathcal{T}(M)$ è un campo vettoriale e $p \in M$, a volte scriveremo X_p invece di $X(p)$. Analogamente, se $\omega \in A^k(M)$ è una k-forma, a volte scriveremo ω_p invece di $\omega(p)$.

Sia (U, φ) una carta in $p \in M$, e scriviamo $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ come al solito. Abbiamo quindi delle sezioni locali $\partial_1, \dots, \partial_n$ di TM definite su U ponendo

$$\partial_j(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \in T_pM.$$

Se $X \in \mathcal{T}(M)$ è un campo vettoriale qualsiasi e $p \in U$, allora $X(p)$ dev'essere una combinazione lineare di $\partial_1(p), \dots, \partial_n(p)$, per cui possiamo trovare funzioni $a^1, \dots, a^n\colon U \to \mathbb{R}$ tali che

$$X(p) = \sum_{j=1}^n a^j(p)\partial_j(p).$$

Siccome $\bigl(a^1(p), \dots, a^n(p)\bigr) = d\varphi_p\bigl(X(p)\bigr)$, si vede subito che le funzioni a^j sono di classe C^∞.

Osservazione 3.2.4. A volte scriveremo anche

$$X = \sum_{j=1}^n \hat{a}^j \partial_j,$$

dove le $\hat{a}^j$ sono funzioni C^∞ definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ (l'immagine della carta locale), e non su un aperto di M (il dominio della carta locale). In altre parole, $\hat{a}^j(x) = a^j \circ \varphi^{-1}(x)$ per ogni $x \in \varphi(U)$.

Se $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ è un'altra carta con $U \cap \tilde{U} \neq \varnothing$, sappiamo che

$$\tilde{\partial}_h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^h} \partial_k,$$

su $U \cap \tilde{U}$. Quindi se scriviamo $X = \sum_j a^j \partial_j = \sum_h \tilde{a}^h \tilde{\partial}_h$ troviamo

$$a^j = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^h} \tilde{a}^h, \tag{3.2.1}$$

che è la formula che ci dice come cambiano i coefficienti di un campo vettoriale al cambiare della carta.

Esercizio 3.2.1. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante su una n-varietà M. Supponiamo di avere per ogni α una n-upla di funzioni $a_\alpha = (a_\alpha^1, \ldots, a_\alpha^n) \in C^\infty(U_\alpha)^n$ in modo che su $U_\alpha \cap U_\beta$ le a_α e le a_β siano legate da (3.2.1). Dimostra che la formula $X = \sum_j a_\alpha^j \partial_{j,\alpha}$, dove $\partial_{j,\alpha} = \partial / \partial x_\alpha^j$, definisce un campo vettoriale globale $X \in \mathcal{T}(M)$.

Dunque la scelta di coordinate locali fornisce una base dello spazio tangente che varia in modo differenziabile sul corrispondente aperto coordinato, il primo esempio di riferimento locale per un fibrato vettoriale.

Definizione 3.2.3: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r sulla varietà M, e $U \subseteq M$ un aperto di M. Un *riferimento locale* per E su U è una r-upla $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathcal{E}(U)$ di sezioni di E su U tali che $\{\sigma_1(p), \ldots, \sigma_r(p)\}$ sia una base di E_p per ogni $p \in U$.

Osservazione 3.2.5. Dare un riferimento locale è equivalente a dare una banalizzazione locale. Infatti, sia $\chi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ una banalizzazione locale di un fibrato vettoriale E di rango r. Ponendo $\sigma_j(p) = \chi^{-1}(p, e_j)$, dove e_j è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^r$, otteniamo chiaramente un riferimento locale per E su U. Viceversa, se $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ è un riferimento locale per E su U, definiamo $\xi: U \times \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(U)$ ponendo

$$\xi(p, w) = w^1 \sigma_1(p) + \cdots + w^r \sigma_r(p) \in E_p.$$

Chiaramente ξ è bigettiva, di classe C^∞, e $\chi = \xi^{-1}$ è una banalizzazione locale. L'unica cosa non del tutto ovvia è verificare che χ sia di classe C^∞. Per dimostrarlo scegliamo una qualsiasi banalizzazione $\tilde{\chi}$ nell'intorno di $p \in U$, e sia $\{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_r\}$ il corrispondente riferimento locale. Inoltre, poniamo $\tilde{\chi}_o = \pi_2 \circ \tilde{\chi}$, dove $\pi_2: U \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ è la proiezione sulla seconda coordinata, in modo che si abbia $\tilde{\chi}(v) = \big(p, \tilde{\chi}_o(v)\big)$. Scriviamo $\tilde{\chi}_o(\sigma_j) = (a_j^1, \ldots, a_j^r)$; allora (a_j^h) è una matrice invertibile con elementi di classe C^∞, per cui anche la sua inversa $B = (b_h^j)$ ha tutti gli elementi di classe C^∞, e si ha $\tilde{\sigma}_h = \sum_j b_h^j \sigma_j$. Ma allora se $v \in E_p$ abbiamo

$$v = \sum_{h=1}^{r} \tilde{v}^h \tilde{\sigma}_h = \sum_{h,j=1}^{r} \tilde{v}^h b_h^j \sigma_j,$$

dove $(\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^r) = \tilde{\chi}_o(v)$, per cui $v = \xi(p, w)$ con $w = B\tilde{\chi}_o(v)$, e quindi

$$\chi(v) = \big(p, B\tilde{\chi}_o(v)\big)$$

è di classe C^∞, come voluto.

Osservazione 3.2.6. Una conseguenza della precedente osservazione è che un fibrato vettoriale è (isomorfo al fibrato) banale se e solo se ammette un riferimento globale.

Siano χ_α e χ_β due banalizzazioni locali, e $\{\sigma_{1,\alpha}, \ldots, \sigma_{r,\alpha}\}$, $\{\sigma_{1,\beta}, \ldots, \sigma_{r,\beta}\}$ i corrispondenti riferimenti locali. Se scriviamo $\sigma_{j,\beta} = \sum_k (g_{\alpha\beta})_j^k \sigma_{k,\alpha}$ abbiamo

$$\left(p, \sum_k (g_{\alpha\beta})_j^k e_k\right) = \chi_\alpha\left(\sum_k (g_{\alpha\beta})_j^k \sigma_{k,\alpha}\right) = \chi_\alpha(\sigma_{j,\beta}) = \chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, e_j) = \big(p, g_{\alpha\beta}(p) e_j\big),$$

dove $g_{\alpha\beta}$ è la funzione di transizione da χ_α a χ_β, per cui le $(g_{\alpha\beta})^k_j$ sono le componenti della funzione di transizione $g_{\alpha\beta}$.

Sia ora σ una sezione qualunque di E, e scriviamo $\sigma = \sum_j a^j_\alpha \sigma_{j,\alpha} = \sum_h a^h_\beta \sigma_{h,\beta}$. Allora il conto precedente ci dice che

$$a^j_\alpha = \sum_{h=1}^{r} (g_{\alpha\beta})^j_h \, a^h_\beta, \tag{3.2.2}$$

è la formula che esprime come cambiano i coefficienti di una sezione al cambiare della banalizzazione locale.

Esercizio 3.2.2. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante su M, e $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ una famiglia di funzioni di transizione per un fibrato E. Supponi di avere per ogni α una r-upla di funzioni differenziabili $a_\alpha = (a^1_\alpha, \ldots, a^r_\alpha) \in C^\infty(U_\alpha)^r$ in modo che su $U_\alpha \cap U_\beta$ le a_α e le a_β siano legate da (3.2.2). Dimostra che esiste un'unica sezione σ di E tale che le a^j_α siano i coefficienti di σ relativi a un appropriato riferimento locale su U_α.

Esercizio 3.2.3. Sia $\sigma: M \to E$ una sezione (non necessariamente C^∞) di un fibrato vettoriale su M. Dimostra che σ è C^∞ se e solo se per ogni riferimento locale $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ di E su $U \subseteq M$ si può scrivere $\sigma = a^1\sigma_1 + \cdots + a^r\sigma_r$ con $a^1, \ldots, a^r \in C^\infty(U)$ se e solo se questo avviene per una famiglia di riferimenti locali i cui domini di definizione formano un ricoprimento aperto di M.

Esempio 3.2.1. Una funzione $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è detta *d-omogenea* (con $d \in \mathbb{Z}$) se $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^*$ e $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. È evidente che ogni funzione 0-omogenee $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definisce una funzione $\tilde{f} \in C^\infty\bigl(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\bigr)$ tale che $\tilde{f} \circ \pi = f$, dove $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è la proiezione naturale. Viceversa, ogni funzione 0-omogenea è della forma $\tilde{f} \circ \pi$ per un'opportuna funzione C^∞ definita sullo spazio proiettivo. Ricordando l'Osservazione 3.2.1, abbiamo quindi un isomorfismo fra lo spazio delle funzioni 0-omogenee su $\mathbb{R}^{n+1}$ e lo spazio delle sezioni del fibrato banale $E_0 = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Vogliamo ora far vedere che, più in generale, c'è un naturale isomorfismo fra lo spazio delle funzioni d-omogenee su $\mathbb{R}^{n+1}$ e lo spazio $\mathcal{E}_d\bigl(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\bigr)$ delle sezioni del fibrato in rette $\pi_d: E_d \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ introdotto nell'Esempio 3.1.4. Infatti, sia $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una funzione d-omogenea, e definiamo $\tilde{f}: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to E_d$ nel seguente modo:

$$\forall x \in U_j \qquad \tilde{f}(x) = \chi_j^{-1}\bigl(x, f([x]_j)\bigr),$$

dove $[x]_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ è l'unico elemento $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\pi(y) = x$ e $y^j = 1$. Per verificare che $\tilde{f}$ è una sezione di E_d è sufficiente controllare che sia ben definita, visto che localmente è chiaramente C^∞. Sia $x \in U_h \cap U_k$; allora $[x]_h = (x^k/x^h)[x]_k$, per cui ricordando la definizione di E_d troviamo

$$\chi_h \circ \chi_k^{-1}\bigl(x, f([x]_k)\bigr) = \left(x, \left(\frac{x^k}{x^h}\right)^d f([x]_k)\right) = \left(x, f\left(\frac{x^k}{x^h} \cdot [x]_k\right)\right) = \bigl(x, f([x]_h)\bigr),$$

e $\tilde{f}$ è ben definita. Viceversa, data $\tilde{f} \in \mathcal{E}_d\bigl(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\bigr)$ possiamo definire $\tilde{f}_j: U_j \to \mathbb{R}$ con $\chi_j\bigl(\tilde{f}(x)\bigr) = \bigl(x, \tilde{f}_j(x)\bigr)$ per ogni $x \in U_j$ e ogni $j = 0, \ldots, n$. Se $x \in U_h \cap U_k$ si verifica subito che

$$\tilde{f}_k(x) = \left(\frac{x^h}{x^k}\right)^d \tilde{f}_h(x). \tag{3.2.3}$$

Possiamo allora definire $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ ponendo $f(O) = 0$ e $f(y) = (y^j)^d \tilde{f}_j\bigl(\pi(y)\bigr)$ per un qualsiasi $j = 0, \ldots, n$ tale che $y^j \neq 0$. Grazie alla (3.2.3) si vede subito che f è ben definita, ed è chiaramente d-omogenea.

Esempio 3.2.2. Se M è una varietà di dimensione n, allora TM è una varietà di dimensione $2n$, per cui possiamo considerare il fibrato tangente del tangente $\tilde{\pi}: T(TM) \to TM$ di rango $2n$ su TM. Vogliamo ora descrivere dei riferimenti locali naturali per $T(TM)$. Sia (U, φ) una carta locale per M; abbiamo visto che φ induce una banalizzazione locale $\chi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ e un riferimento locale $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ per TM tali che

$$\chi(v) = \bigl(p, (v^1, \ldots, v^n)\bigr) \quad \text{se e solo se} \quad v = v^1\partial_1|_p + \cdots + v^n\partial_n|_p \in T_pM,$$

dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione naturale. Inoltre, se poniamo $\tilde\chi = (\varphi, \mathrm{id}) \circ \chi$ otteniamo una carta locale $\big(\pi^{-1}(U), \tilde\chi\big)$ di TM. Scrivendo $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ è chiaro che $\tilde\chi(v) = \big(x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n\big)$ per ogni $v \in T_pM$ e $p \in U$. Dunque alla carta locale $\tilde\chi$ di TM possiamo associare il riferimento locale $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n, \partial/\partial v^1, \ldots, \partial/\partial v^n\}$ di $T(TM)$ sopra $\pi^{-1}(U) = TU$. Per capire meglio chi sono $\partial/\partial x^h$ e $\partial/\partial v^k$ vediamo come si comportano rispetto al differenziale della proiezione π. Ora, se $f \in C^\infty(U)$ è chiaro (perché?) che

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_v (f \circ \pi) = \partial_h|_p(f) \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial}{\partial v^k}\right|_v (f \circ \pi) = 0$$

quale che sia $v \in T_pM$; in altre parole, i $\partial/\partial x^h$ riproducono la derivate nelle coordinate di M, mentre i $\partial/\partial v^k$ danno le derivate delle funzioni ristrette ai singoli spazi tangenti. In termini più formali, questo vuol dire che $d\pi_v(\partial/\partial x^h) = \partial_h|_{\pi(v)}$ e $d\pi_v(\partial/\partial v^k) = O_{\pi(v)}$. In particolare, $\{\partial/\partial v^1, \ldots, \partial/\partial v^n\}$ è un riferimento locale per il *fibrato verticale* $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(d\pi) \subset T(TM)$. Nota che mentre il fibrato verticale è ben definito indipendentemente dalla carta locale scelta, non esiste una definizione canonica per un "fibrato orizzontale" $\mathcal{H} \subset T(TM)$ tale che $T(TM) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$; per esempio, è facile dimostrare (esercizio) che, in generale, se $\tilde\varphi = (\tilde x^1, \ldots, \tilde x^n)$ è un'altra carta locale allora $\mathrm{Span}(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n) \neq \mathrm{Span}(\partial/\partial \tilde x^1, \ldots, \partial/\partial \tilde x^n)$. Ne riparleremo nel prossimo capitolo quando introdurremo il concetto di connessione.

Esempio 3.2.3. Se $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ è una carta locale su M, allora le 1-forme $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ definite come base duale di $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ (o come differenziale delle coordinate locali; vedi l'Osservazione 3.1.1) formano un riferimento locale del fibrato cotangente. La Proposizione 1.3.4 allora implica che un riferimento locale per il fibrato $\bigwedge^k M$ delle k-forme è dato dalle forme

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

con $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, per cui ogni k-forma si può scrivere localmente come

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

per opportune funzioni $a_{i_1 \ldots i_k}$. In particolare, quando $k = n$ un riferimento locale per il fibrato in rette $\bigwedge^n M$ è dato dalla n-forma $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Se $\tilde\varphi = (\tilde x^1, \ldots, \tilde x^n)$ è un'altra carta locale, usando la (3.1.3) e ricordando l'Osservazione 1.3.7 troviamo subito che

$$d\tilde x^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde x^n = \det\left(\frac{\partial \tilde x^h}{\partial x^k}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Abbiamo visto che i campi vettoriali si possono interpretare come derivazioni su $C^\infty(M)$. Esiste un'interpretazione nello stesso ordine d'idee per i campi tensoriali, interpretazione spesso utile:

Proposizione 3.2.1: *Sia M una varietà. Allora*

(i) *Un'applicazione $\tilde\tau\colon A^1(M)^h \times \mathcal{T}(M)^k \to C^\infty(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se esiste un campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}^h_k(M)$ tale che*

$$\tilde\tau(\omega^1, \ldots, \omega^h, X_1, \ldots, X_k)(p) = \tau_p\big(\omega^1(p), \ldots, \omega^h(p), X_1(p), \ldots, X_k(p)\big) \tag{3.2.4}$$

per tutti gli $\omega^1, \ldots, \omega^h \in A^1(M)$, $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(M)$ e $p \in M$.

(ii) *Un'applicazione $\hat\tau\colon \mathcal{T}(M)^k \to \mathcal{T}^h(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se esiste un campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}^h_k(M)$ tale che*

$$\hat\tau(X_1, \ldots, X_k)(p)(\omega^1_p, \ldots, \omega^h_p) = \tau_p\big(\omega^1_p, \ldots, \omega^h_p, X_1(p), \ldots, X_k(p)\big) \tag{3.2.5}$$

per tutti gli $\omega^1_p, \ldots, \omega^h_p \in T^*_pM$, $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(M)$ e $p \in M$.

Dimostrazione: (i) Dato $\tau \in \mathcal{T}^h_k(M)$, cominciamo col dimostrare che l'applicazione

$$p \mapsto \tau_p\big(\omega^1(p), \ldots, \omega^h(p), X_1(p), \ldots, X_k(p)\big)$$

è di classe $C^\infty(M)$ per ogni $\omega^1,\dots,\omega^h\in A^1(M)$ e $X_1,\dots,X_k\in\mathcal{T}(M)$. Infatti, se (U,φ) è una carta locale in p, possiamo scrivere localmente $\omega^i=\sum_r\omega^i_r\,dx^r$, $\partial_j=\sum_s X^s_j\partial_s$ e

$$\tau=\sum_{u_1,\dots,u_h,v_1,\dots,v_k}\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}\partial_{u_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{u_h}\otimes dx^{v_1}\otimes\cdots\otimes dx^{v_k},\tag{3.2.6}$$

con ω^i_r, X^s_j, $\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}\in C^\infty(U)$, per cui localmente abbiamo

$$\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)=\sum_{u_1,\dots,u_h,v_1,\dots,v_k}\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}\omega^1_{u_1}\cdots\omega^h_{u_h}X_1^{v_1}\cdots X_k^{v_k},$$

che è chiaramente di classe $\mathbb{C}^\infty$. La stessa formula ci dice anche che l'applicazione $\tilde\tau$ definita da (3.2.4) è $C^\infty(M)$-multilineare.

Viceversa, supponiamo di avere una $\tilde\tau\colon A^1(M)^h\times\mathcal{T}(M)^k\to C^\infty(M)$ che sia $C^\infty(M)$-multilineare; vogliamo far vedere che proviene da un campo tensoriale. Prima di tutto, dimostriamo che se $\omega^1\equiv O$ in un intorno U di un punto $p\in M$ allora $\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=0$ per ogni $\omega^2,\dots,\omega^h\in A^1(M)$ e ogni $X_1\dots,X_k\in\mathcal{T}(M)$. Il Corollario 2.3.2 ci fornisce una funzione $g\in C^\infty(M)$ tale che $g(p)=1$ e $g|_{M\setminus U}\equiv 0$. Allora $g\omega^1\equiv O$ e quindi

$$\begin{aligned}\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)&=g(p)\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=\hat\tau(g\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)\\&=\hat\tau(O,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=\hat\tau(0\cdot O,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)\\&=0\cdot\hat\tau(O,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=0.\end{aligned}$$

In particolare, se $\tilde\omega^1$ e $\bar\omega^1$ sono tali che $\tilde\omega^1\equiv\bar\omega^1$ in un intorno U di un punto p, applicando questo argomento a $\omega^1=\tilde\omega^1-\bar\omega^1$ troviamo $\hat\tau(\tilde\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=\hat\tau(\bar\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)$.

Lo stesso ragionamento si applica chiaramente a $\omega^2,\dots,\omega^h$ e a $X_1,\dots,X_k$, per cui per calcolare $\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)$ ci basta conoscere il comportamento di $\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k$ in un intorno di p. In altre parole, per ogni aperto $U\subseteq M$ la $\hat\tau$ definisce un'applicazione $\hat\tau_U\colon A^1(U)^h\times\mathcal{T}(U)^k\to C^\infty(U)$ che è $C^\infty(U)$-multilineare.

Supponiamo adesso di prendere $p\in M$ e $\omega^1\in A^1(M)$ tale che $\omega^1_p=O$, e scegliamo una carta locale (U,φ) centrata in p. Allora possiamo scrivere $\omega^1|_U=\sum_r\omega^1_r\,dx^r$ per opportune $\omega^1_r\in C^\infty(U)$ con $\omega^1_r(p)=0$. Dunque

$$\begin{aligned}\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)&=\hat\tau_U(\omega^1|_U,\dots,\omega^h|_U,X_1|_U,\dots,X_k|_U)(p)\\&=\hat\tau_U\left(\sum_{r=1}^n\omega^1_r\,dx^r,\omega^2|_U,\dots,\omega^h|_U,X_1|_U,\dots,X_k|_U\right)\\&=\sum_{r=1}^n\omega^1_r(p)\hat\tau_U(dx^r,\omega^2|_U,\dots,\omega^h|_U,X_1|_U,\dots,X_k|_U)(p)=0.\end{aligned}$$

Argomentando come sopra, e ripetendo il ragionamento per $\omega^2,\dots,\omega^h$ e per $X_1,\dots,X_k$, vediamo quindi che $\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)$ dipende esclusivamente dal valore di $\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k$ in p. Quindi per ogni $p\in M$ la $\hat\tau$ induce un'applicazione $\mathbb{R}$-multilineare $(T^*_pM)^h\times(T_pM)^k\to\mathbb{R}$, cioè un elemento di $T^h_k(T_pM)$. In altre parole, abbiamo dimostrato che $\hat\tau$ definisce un'unica sezione τ di T^h_kM che soddisfa (3.2.4); per concludere dobbiamo solo dimostrare che τ è di classe C^∞. Scriviamo τ in coordinate locali come in (3.2.6); allora

$$\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}=\hat\tau_U(dx^{u_1},\dots,dx^{u_h},\partial_{v_1},\dots,\partial_{v_k})\in C^\infty(U),$$

e τ è di classe C^∞ grazie all'Esercizio 3.2.3.

(ii) Un'applicazione $\hat\tau\colon\mathcal{T}(M)^k\to\mathcal{T}^h(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se ponendo

$$\tilde\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)=\hat\tau(X_1,\dots,X_k)(\omega^1,\dots,\omega^h)$$

otteniamo un'applicazione $C^\infty(M)$-multilineare $\tilde\tau\colon A^1(M)^h\times\mathcal{T}(M)^k\to C^\infty(M)$. La tesi segue allora dalla parte (i). □

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi.

Esercizio 3.2.4. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M, $K \subseteq M$ un compatto, e $U \subseteq M$ un intorno aperto di K. Dimostra che per ogni sezione $\sigma \in \mathcal{E}(U)$ esiste una sezione $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}(M)$ tale che $\tilde{\sigma}|_K \equiv \sigma|_K$.

Esercizio 3.2.5. Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile, e $\pi\colon E \to N$ un fibrato vettoriale di rango r su N. Dimostra che lo spazio delle sezioni su M del fibrato pull-back F^*E (vedi l'Esercizio 3.1.5) è isomorfo allo spazio delle applicazioni $\sigma\colon M \to E$ di classe C^∞ tali che $\sigma(p) \in E_{F(p)}$ per ogni $p \in M$.

Esercizio 3.2.6. Siano $\pi\colon E \to M$ e $\pi'\colon E' \to M$ due fibrati vettoriali su una varietà M. Dimostra che un'applicazione $\mathcal{F}\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}'(M)$ è $C^\infty(M)$-lineare se e solo se esiste un morfismo $F\colon E \to E'$ di fibrati tale che $\mathcal{F}(s) = F \circ s$ per ogni $s \in \mathcal{E}(M)$.

Esercizio 3.2.7. Sia $\sigma\colon M \to T^h_k M$ una sezione (non necessariamente C^∞). Dimostra che σ è C^∞ se e solo se per ogni aperto $U \subseteq M$, ogni k-upla di campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(U)$ e ogni h-upla di 1-forme $\omega^1, \ldots, \omega^h \in A^1(U)$ la funzione $p \mapsto \sigma_p\big(\omega^1_p, \ldots, \omega^h_p, X_1(p), \ldots, X_k(p)\big)$ è di classe C^∞.

Esercizio 3.2.8. Dimostra che un'applicazione $\bar{\tau}\colon \big(A^1(M)\big)^h \times \big(\mathcal{T}(M)\big)^k \to \mathcal{T}^l(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se esiste un campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}^{h+l}_k(M)$ tale che

$$\bar{\tau}(\omega^1, \ldots, \omega^h, X_1, \ldots, X_k)(p)(\eta^1_p, \ldots, \eta^l_p) = \tau_p\big(\eta^1_p, \ldots, \eta^l_p, \omega^1(p), \ldots, \omega^h(p), X_1(p), \ldots, X_k(p)\big)$$

per ogni $\eta^1_p, \ldots, \eta^l_p \in T^*_p M$, $\omega^1, \ldots, \omega^h \in A^1(M)$, $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(M)$ e $p \in M$.

Esercizio 3.2.9. Sia $\tau \in \mathcal{T}^h_k(M)$ un campo tensoriale di tipo $\binom{h}{k}$. Scelti $1 \le i \le h$ e $1 \le j \le k$, siano $\omega^1, \ldots, \omega^i \in A^1(M)$ delle 1-forme, e $X_1, \ldots, X_j \in \mathcal{T}(M)$ dei campi vettoriali. Dimostra che l'applicazione $p \mapsto \tau_p\big(\omega^1(p), \ldots, \omega^i(p), \cdot, X_1(p), \ldots, X_j(p), \cdot\big)$ può essere interpretata in modo naturale come un campo tensoriale di tipo $\binom{h-i}{k-j}$.

Esercizio 3.2.10. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale di rango k su una varietà M, e siano $\sigma_1, \ldots, \sigma_l \in \mathcal{E}(U)$ sezioni di E su un aperto $U \subseteq M$ tali che $\{\sigma_1(q), \ldots, \sigma_l(q)\}$ siano linearmente indipendenti per ogni $q \in U$. Dimostra che per ogni $p \in U$ possiamo trovare un intorno $V \subseteq U$ di p e sezioni $\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_k \in \mathcal{E}(V)$ tali che $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ sia un riferimento locale di E su V.

3.3 Flusso di un campo vettoriale

Torniamo adesso ai campi vettoriali, dandone una caratterizzazione equivalente.

Definizione 3.3.1: Sia A un'algebra sul campo $\mathbb{K}$. Una *derivazione* di A è un'applicazione $D\colon A \to A$ che sia $\mathbb{K}$-lineare e che soddisfi la regola di Leibniz: $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ per ogni $a, b \in A$.

Proposizione 3.3.1: *Lo spazio vettoriale $\mathcal{T}(M)$ dei campi vettoriali su una varietà M è isomorfo allo spazio vettoriale delle derivazioni $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.*

Dimostrazione: Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale. Per ogni $f \in C^\infty(M)$ otteniamo un'altra funzione $Xf\colon M \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(Xf)(p) = X_p(\mathbf{f}),$$

dove $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ è il germe rappresentato da f. Nelle coordinate locali date una carta locale $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, scrivendo $X = \sum_j X^j \partial_j$ troviamo

$$Xf = \sum_j X^j \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}$$

per cui $Xf \in C^\infty(M)$, ed è assolutamente chiaro che $f \mapsto Xf$ è una derivazione.

Viceversa, sia $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ una derivazione. Prima di tutto dimostriamo che se $f \in C^\infty(M)$ è zero in un intorno U di p allora $(Xf)(p) = 0$. Infatti, sia $h \in C^\infty(M)$ tale che $h(p) = 0$ e $h|_{M \setminus U} \equiv 1$ (Corollario 2.3.2). Allora $hf \equiv f$ per cui

$$(Xf)(p) = X(hf)(p) = h(p)(Xf)(p) + f(p)(Xh)(p) = 0.$$

Questo vuol dire che se f e g coincidono in un intorno di p abbiamo $(Xf)(p) = (Xg)(p)$. Siccome ogni funzione definita in un intorno di un punto può essere estesa a una funzione definita su tutto M (Corollario 2.3.3), per ogni aperto $U \subseteq M$ la X definisce una derivazione $X: C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, e per ogni $p \in M$ una derivazione $X_p: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, e quindi una sezione di TM. Siccome in coordinate locali $X_p = \sum_j X(x^j)(p)\partial_j(p)$, si vede subito (esercizio) che questa sezione è di classe C^∞. Quindi abbiamo ottenuto un campo vettoriale, ed è chiaro che questa costruzione è l'inversa di quella descritta sopra. □

Quindi se X e Y sono due campi vettoriali e $f \in C^\infty(M)$ possiamo considerare anche la funzione $X(Yf)$. Sfortunatamente, $f \mapsto X(Yf)$ non è una derivazione: infatti

$$X\bigl(Y(fg)\bigr) = X\bigl(fY(g) + gY(f)\bigr) = fX(Yg) + \bigl(X(f)Y(g) + X(g)Y(f)\bigr) + gX(Yf).$$

Ma questa stessa formula mostra che $XY - YX$ è una derivazione: infatti

$$(XY - YX)(fg) = fX(Yg) + gX(Yf) - fY(Xg) - gY(Xf) = f(XY - YX)(g) + g(XY - YX)(f).$$

Dunque $XY - YX$ è un campo vettoriale:

Definizione 3.3.2: La *parentesi di Lie* di due campi X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ è il campo vettoriale $[X, Y] = XY - YX$ definito da

$$\forall f \in C^\infty(M) \qquad [X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf).$$

Diremo che due campi vettoriali X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ *commutano* se $[X, Y] \equiv O$.

Proposizione 3.3.2: *Se X, Y e Z sono campi vettoriali su una varietà M, a, $b \in \mathbb{R}$ e f, $g \in C^\infty(M)$, si ha:*
(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticommutatività);*
(ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearità);*
(iii) $\bigl[X, [Y, Z]\bigr] + \bigl[Y, [Z, X]\bigr] + \bigl[Z, [X, Y]\bigr] = 0$ *(identità di Jacobi);*
(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$;
(v) *se in coordinate locali abbiamo $X = \sum_h X^h\partial_h$ e $Y = \sum_k Y^k\partial_k$ allora*

$$[X, Y] = \sum_{h,k=1}^n \left(X^h \frac{\partial Y^k}{\partial x^h} - Y^h \frac{\partial X^k}{\partial x^h} \right) \partial_k.$$

In particolare, $[\partial_h, \partial_k] = 0$.

Dimostrazione: (i) e (ii) sono ovvie. Poi si ha

$$\begin{aligned} \bigl[X, [Y, Z]\bigr] &= XYZ - XZY - YZX + ZYX, \\ \bigl[Y, [Z, X]\bigr] &= YZX - YXZ - ZXY + XZY, \\ \bigl[Z, [X, Y]\bigr] &= ZXY - ZYX - XYZ + YXZ, \end{aligned}$$

e sommando si ottiene la (iii). Inoltre,

$$[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) = fg(XY) + f(Xg)Y - fg(YX) - g(Yf)X = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X,$$

e anche (iv) è dimostrata. Il Teorema di Schwartz sulle derivate seconde dice che

$$[\partial_h, \partial_k](f) = \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^h \partial x^k} - \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k \partial x^h} \equiv 0,$$

dove $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ è la carta locale che stiamo usando, per cui $[\partial_h, \partial_k] = 0$, e (v) segue dalle precedenti. □

In un certo senso, $[X, Y]$ rappresenta la derivata di Y nella direzione di X. Per dare senso a questa affermazione cominciamo richiamando il fondamentale teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

Teorema 3.3.3: *Dati un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e funzioni $X^1, \ldots, X^n \in C^\infty(U)$, si consideri il seguente problema di Cauchy per una curva $\sigma\colon I \to U$:*

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma^j}{dt}(t) = X^j\big(\sigma(t)\big), & j = 1, \ldots, n, \\ \sigma(t_0) = x \in U. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Allora si ha:

(i) *Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$ esistono $\delta > 0$ e un intorno aperto $U_0 \subseteq U$ di x_0 tali che per ogni $x \in U_0$ esiste una curva $\sigma_x\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to U$ soluzione di* (3.3.1). *Inoltre, l'applicazione $\Theta\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U_0 \to U$ data da $\Theta(t, x) = \sigma_x(t)$ è di classe C^∞.*

(ii) *Due soluzioni di* (3.3.1) *coincidono sempre nell'intersezione dei loro domini di definizione.*

Vediamo come tradurre questo risultato sulle varietà.

Definizione 3.3.3: Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M, e $p \in M$. Una curva $\sigma\colon I \to M$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo contenente l'origine, tale che

$$\begin{cases} \sigma'(t) = X\big(\sigma(t)\big), \\ \sigma(0) = p, \end{cases}$$

è detta *curva integrale* (o *traiettoria*) di X uscente da p.

Sia (U, φ) una carta locale centrata in $p \in M$, e $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale. In coordinate locali, possiamo scrivere $X = \sum_j X^j \partial_j$. Se $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ è una curva uscente da p, cioè tale che $\sigma(0) = p$, possiamo scegliere ε abbastanza piccolo in modo che tutto il sostegno di σ sia contenuto in U, e quindi possiamo scrivere $\varphi \circ \sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$. Usando l'Esempio 2.4.3 otteniamo

$$\sigma'(t) = \sum_{j=1}^n (\sigma^j)'(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\sigma(t)}.$$

Quindi σ è una curva integrale di X se e solo se la curva $\varphi \circ \sigma$ in $\varphi(U)$ soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{d\sigma^j}{dt} = X^j\big(\varphi \circ \sigma(t)\big), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Allora il Teorema 3.3.3 diventa il seguente teorema fondamentale:

Teorema 3.3.4: *Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M. Allora esistono un unico intorno aperto massimale $\mathcal{U}$ di $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ e un'unica applicazione $\Theta\colon \mathcal{U} \to M$ di classe C^∞ che soddisfano le seguenti proprietà:*

(i) *Per ogni $p \in M$ l'insieme $\mathcal{U}^p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{U}\}$ è un intervallo aperto contenente 0.*

(ii) *Per ogni $p \in M$ la curva $\theta^p\colon \mathcal{U}^p \to M$ definita da $\theta^p(t) = \Theta(t, p)$ è l'unica curva integrale massimale di X uscente da p.*

(iii) *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{U}_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{U}\}$ è un aperto di M.*

(iv) *Se $p \in \mathcal{U}_t$, allora $p \in \mathcal{U}_{s+t}$ se e solo se $\Theta(t, p) \in \mathcal{U}_s$, e in questo caso*

$$\theta_s\big(\theta_t(p)\big) = \theta_{s+t}(p), \tag{3.3.2}$$

dove $\theta_t\colon \mathcal{U}_t \to M$ è definita da $\theta_t(p) = \Theta(t, p)$. In particolare, $\theta_0 = \mathrm{id}$ e $\theta_t\colon \mathcal{U}_t \to \mathcal{U}_{-t}$ è un diffeomorfismo con inversa θ_{-t}.

(v) *Per ogni $(t, p) \in \mathcal{U}$, si ha $d(\theta_t)_p(X) = X_{\theta_t(p)}$.*

(vi) *Per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$ si ha*

$$\left.\frac{d}{dt}(f \circ \theta^p)\right|_{t=0} = (Xf)(p).$$

Dimostrazione: Cominciamo col notare che il Teorema 3.3.3 implica, grazie a quanto visto sopra, che per ogni $p \in X$ una curva integrale di X uscente da p esiste sempre.

Siano σ, $\tilde{\sigma}: I \to M$ due curve integrali di X tali che $\sigma(t_0) = \tilde{\sigma}(t_0)$ per qualche $t_0 \in I$, e sia $J \subseteq I$ l'insieme degli $t \in I$ tali che $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(t)$. Allora l'insieme J è non vuoto, chiuso, ed è anche aperto, grazie al Teorema 3.3.3.(ii); quindi $J = I$, e dunque due curve integrali che coincidono in un punto coincidono nell'intersezione dei loro domini di definizione.

Per ogni $p \in M$ indichiamo allora con $\mathcal{U}^p$ l'unione di tutti gli intervalli aperti $I \subseteq \mathbb{R}$ contenenti 0 su cui sia definita una curva integrale uscente da p. Chiaramente, $\mathcal{U}^p$ è un intervallo aperto contenente l'origine, e l'argomento precedente ci dice (perché?) che esiste una curva integrale $\theta^p: \mathcal{U}^p \to M$ di X uscente da p definita su tutto $\mathcal{U}^p$, e che questa è la curva integrale massimale uscente da p.

Poniamo allora $\mathcal{U} = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in \mathcal{U}^p\}$, e definiamo $\Theta: \mathcal{U} \to M$ ponendo $\Theta(t,p) = \theta^p(t)$. Inoltre, poniamo $\mathcal{U}_t = \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{U}\}$, e definiamo $\theta_t: \mathcal{U}_t \to M$ con $\theta_t(p) = \Theta(t,p)$. In questo modo abbiamo ottenuto (i) e (ii); vediamo di dimostrare (iv).

Per definizione, $\mathcal{U}_0 = M$ e $\theta_0 = \mathrm{id}_M$. Prendiamo ora $p \in M$ e $t \in \mathcal{U}^p$, e poniamo $q = \theta^p(t)$. Allora la curva $\sigma: \mathcal{U}^p - t \to M$ definita da

$$\sigma(s) = \theta^p(s+t),$$

dove $\mathcal{U}^p - t = \{s \in \mathbb{R} \mid s + t \in \mathcal{U}^p\}$, è ancora una curva integrale di X: infatti

$$\sigma'(s) = d\sigma_s\left(\frac{d}{ds}\right) = d(\theta^p)_{s+t}\left(\frac{d}{ds}\right) = X\bigl(\theta^p(t+s)\bigr) = X\bigl(\sigma(s)\bigr).$$

Quindi necessariamente $\sigma(s) = \theta^q(s)$, cioè

$$\theta_{s+t}(p) = \theta_s\bigl(\theta_t(p)\bigr),$$

e $\mathcal{U}^p - t \subseteq \mathcal{U}^q$. Siccome $0 \in \mathcal{U}^p$, otteniamo $-t \in \mathcal{U}^q$, e $\theta^q(-t) = p$. Applicando questo ragionamento a $(-t,q)$ invece di (t,p), otteniamo che $\mathcal{U}^q + t \subseteq \mathcal{U}^p$, e quindi $\mathcal{U}^p - t = \mathcal{U}^{\Theta(t,p)}$, che vuol dire esattamente che $\Theta(t,p) \in \mathcal{U}_s$ se e solo se $p \in \mathcal{U}_{s+t}$. Quindi (iv) è dimostrata.

Ora facciamo vedere che $\mathcal{U}$ è aperto in $\mathbb{R} \times M$, da cui segue (iii), e che Θ è di classe C^∞. Sia $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ l'insieme dei $(t,p) \in \mathcal{U}$ tale che esista un intorno di (t,p) della forma $I \times U$, con I intervallo aperto contenente 0 e t, e U intorno aperto di p in M, su cui Θ sia definita e di classe C^∞. Chiaramente ci basta dimostrare che $\mathcal{W} = \mathcal{U}$.

Prima di tutto, il Teorema 3.3.3 ci dice che $(0,p) \in \mathcal{W}$ per ogni $p \in M$. Supponiamo per assurdo che esista $(t_0,p_0) \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$. Siccome $t_0 \neq 0$, possiamo assumere per semplicità $t_0 > 0$; il caso $t_0 < 0$ sarà analogo. Sia $\tau = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid (t,p_0) \in \mathcal{W}\}$; per costruzione, $0 < \tau \leq t_0$. Siccome $t_0 \in \mathcal{U}^{p_0}$, abbiamo $\tau \in \mathcal{U}^{p_0}$; poniamo $q_0 = \theta^{p_0}(\tau)$. Il Teorema 3.3.3 ci fornisce un $\delta > 0$ e un intorno U_0 di q_0 tale che Θ sia definita e di classe C^∞ su $(-\delta,\delta) \times U_0$. Scegliamo $t_1 < \tau$ tale che $t_1 + \delta > \tau$ e $\theta^{p_0}(t_1) \in U_0$. Siccome $t_1 < \tau$, abbiamo $(t_1,p_0) \in \mathcal{W}$, e quindi esiste un intorno $(-\varepsilon, t_1+\varepsilon) \times U_1$ di (t_1,p_0) su cui Θ è definita e di classe C^∞. Inoltre, possiamo anche scegliere U_1 in modo che $\Theta(\{t_1\} \times U_1) \subseteq U_0$.

Dunque, se $p \in U_1$ abbiamo che $\theta_{t_1}(p)$ è definito e dipende C^∞ da p. Inoltre, essendo $\theta_{t_1}(p) \in U_0$, abbiamo che $\theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p)$ è definito e dipende C^∞ da $p \in U_1$ e $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Ma (iii) ci dice che $\theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p) = \theta_t(p)$; quindi abbiamo esteso Θ in modo C^∞ a un aperto della forma $(-\varepsilon, t_1 + \delta) \times U_1$, per cui $(t_1 + \delta, p_0) \in \mathcal{W}$, contro la definizione di τ. Questa contraddizione mostra che $\mathcal{W} = \mathcal{U}$, come voluto.

La (vi) è ora immediata: infatti,

$$(Xf)(p) = df_p(X) = \left.\frac{d}{dt}(f \circ \theta^p)\right|_{t=0},$$

in quanto θ^p è una curva con $\theta^p(0) = p$ e $(\theta^p)'(0) = X(p)$.

Infine, dimostriamo (v). Preso $(t_0,p_0) \in \mathcal{U}$ e posto $q = \theta_{t_0}(p_0)$, per ogni germe $\mathbf{f} \in C^\infty(q)$ si ha

$$\begin{aligned} d(\theta_{t_0})_{p_0}(X)(\mathbf{f}) &= X_{p_0}(\mathbf{f} \circ \theta_{t_0}) = \left.\frac{d}{dt}(f \circ \theta_{t_0} \circ \theta^{p_0})\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f\bigl(\theta_{t_0+t}(p_0)\bigr)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt} f\bigl(\theta^{p_0}(t_0+t)\bigr)\right|_{t=0} = X_{\theta^{p_0}(t_0)}(\mathbf{f}), \end{aligned}$$

e ci siamo. □

Definizione 3.3.4: L'applicazione $\Theta:\mathcal{U}\to M$ introdotta nel precedente Teorema è detta *flusso locale* del campo vettoriale X. Il campo $X\in\mathcal{T}(M)$ è detto *completo* se $\mathcal{U}=\mathbb{R}\times M$, cioè se tutte le curve integrali di X sono definite per tutti i tempi. Un campo vettoriale $Y\in\mathcal{T}(M)$ è detto X*-invariante* se $d(\theta_t)_p(Y)=Y_{\theta_t(p)}$ per ogni (t,p) nel dominio di Θ. In particolare, ogni campo vettoriale è invariante rispetto a se stesso.

Esercizio 3.3.1. Una curva $\sigma:\mathbb{R}\to M$ in una varietà M è *periodica* se esiste $T>0$ tale che $\sigma(t)=\sigma(t+T)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$. Sia $X\in\mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale, e σ una curva integrale massimale di X.

(i) Dimostra che se σ non è costante allora o è iniettiva o è periodica.
(ii) Dimostra che se σ è periodica non costante allora esiste un unico numero positivo T_0 (il *periodo* di σ) tale che $\sigma(t)=\sigma(t')$ se e solo se $t-t'=kT_0$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$.
(iii) Dimostra che se σ non è costante allora è un'immersione, e l'immagine di σ ha una struttura naturale di varietà 1-dimensionale diffeomorfa a $\mathbb{R}$ o a S^1.

Ora, se Θ è il flusso locale di un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(M)$, e $Y\in\mathcal{T}(M)$ è un altro campo vettoriale, l'applicazione $Y\circ\Theta$ è di classe C^∞. Ma allora $t\mapsto d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)$ è una funzione C^∞ a valori in T_pM che dipende in modo C^∞ dal punto p, e abbiamo trovato un modo di misurare la derivata di Y nella direzione di X:

Definizione 3.3.5: Siano X, $Y\in\mathcal{T}(M)$ due campi vettoriali su una varietà M. La *derivata di Lie* di Y lungo X è il campo vettoriale $\mathcal{L}_XY\in\mathcal{T}(M)$ definito da

$$\mathcal{L}_XY(p)=\left.\frac{d}{dt}d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)-Y_p}{t}$$

per ogni $p\in M$.

Il risultato tutt'altro che evidente che vogliamo dimostrare ora è che la derivata di Lie di Y lungo X è esattamente uguale a $[X,Y]$. Ci serve ancora un lemma:

Lemma 3.3.5: *Sia $U\subseteq M$ un aperto di una varietà M, $\delta>0$, e $h:(-\delta,\delta)\times U\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ con $h(0,q)=0$ per ogni $q\in U$. Allora esiste una $g:(-\delta,\delta)\times U\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che*

$$h(t,q)=tg(t,q)$$

e $g(0,q)=\frac{\partial h}{\partial t}(0,q)$ per ogni $q\in U$.

Dimostrazione: Basta porre

$$g(t,q)=\int_0^1\frac{\partial h}{\partial t}(ts,q)\,ds;$$

infatti

$$tg(t,q)=\int_0^1\frac{\partial h}{\partial t}(ts,q)\,d(ts)=h(t,q).$$

□

Allora

Proposizione 3.3.6: *Siano X, $Y\in\mathcal{T}(M)$ due campi vettoriali su una varietà M. Allora $\mathcal{L}_XY=[X,Y]$.*

Dimostrazione: Indichiamo con $\Theta:\mathcal{U}\to M$ il flusso locale di X. Dato $p\in M$, scegliamo $\delta>0$ e un intorno U_0 di p tali che $(-\delta,\delta)\times U_0\subseteq\mathcal{U}$. Sia (U,f) un rappresentante di un germe in p, dove abbiamo scelto U in modo che $\Theta\big((-\delta,\delta)\times U\big)\subseteq U_0$. Definiamo $h:(-\delta,\delta)\times U\to\mathbb{R}$ ponendo $h(t,q)=f(q)-f\big(\theta_{-t}(q)\big)$, e sia $g:(-\delta,\delta)\times U\to\mathbb{R}$ la funzione data dal lemma precedente. Allora ricordando il Teorema 3.3.4.(vi) otteniamo

$$f\circ\theta_{-t}(q)=f(q)-tg(t,q)\quad\text{e}\quad g(0,q)=Xf(q),$$

per cui

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)(f)=Y_{\theta_t(p)}(f\circ\theta_{-t})=(Yf)\big(\theta_t(p)\big)-t(Yg_t)\big(\theta_t(p)\big),$$

dove abbiamo posto $g_t(q) = g(t,q)$. Quindi

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y) - Y_p](f) = \lim_{t\to 0}\frac{(Yf)\big(\theta_t(p)\big) - (Yf)(p)}{t} - (Yg_0)(p)$$
$$= \frac{d}{dt}((Yf)\circ\theta^p)\Big|_{t=0} - Y_p(Xf) = X(Yf)(p) - Y(Xf)(p) = [X,Y](f)(p),$$

grazie nuovamente al Teorema 3.3.4.(vi), e ci siamo. □

Se $F\colon M\to N$ è un diffeomorfismo, e $X\in\mathcal{T}(M)$, allora possiamo definire un campo vettoriale su N, che indicheremo con $dF(X)$, ponendo

$$\forall q\in N \qquad dF(X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}).$$

Se $F\colon M\to N$ non è un diffeomorfismo, questa formula non si può applicare: se F non è surgettiva esistono dei $q\in N$ per cui $F^{-1}(q)$ è vuoto, e se F non è iniettiva potrebbero esistere p_1, $p_2\in M$ per cui $q = F(p_1) = F(p_2)$ ma $dF_{p_1}(X_{p_1}) \ne dF_{p_2}(X_{p_2})$, per cui questa formula non dà un modo univoco per definire un vettore tangente in q. Introduciamo allora la seguente

Definizione 3.3.6: Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra due varietà. Diremo che un campo vettoriale $V\in\mathcal{T}(N)$ è *F-correlato* a un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(M)$ se $V_{F(p)} = dF_p(X_p)$ per ogni $p\in M$.

Chiaramente, se F è un diffeomorfismo allora $dF(X)$ è l'unico campo vettoriale su N che è F-correlato a X, ma se F non è un diffeomorfismo potrebbero esistere più campi vettoriali F-correlati a X, o potrebbe non esisterne nessuno.

Esercizio 3.3.2. Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà, $X\in\mathcal{T}(M)$ e $Y\in\mathcal{T}(N)$. Dimostra che Y è F-correlato a X se e solo se $X(f\circ F) = Y(f)\circ F$ per ogni $f\in C^\infty(N)$.

Esercizio 3.3.3. Dimostra che se $F\colon M\to N$ è un diffeomorfismo allora

$$[dF(X), dF(Y)] = dF([X,Y])$$

per ogni X, $Y\in\mathcal{T}(M)$. Più in generale, senza assumere che F sia un diffeomorfismo, dimostra che se $V\in\mathcal{T}(N)$ è F-correlato a $X\in\mathcal{T}(M)$ e $W\in\mathcal{T}(N)$ è F-correlato a $Y\in\mathcal{T}(M)$, allora $[V,W]$ è F-correlato a $[X,Y]$.

Esercizio 3.3.4. Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà, $X\in\mathcal{T}(M)$ e $Y\in\mathcal{T}(N)$. Indichiamo con $\Theta\colon\mathcal{U}\to M$ il flusso locale di X, e con $\Psi\colon\mathcal{V}\to N$ il flusso locale di Y. Dimostra che Y è F-correlato a X se e solo se per ogni $t\in\mathbb{R}$ si ha $\psi_t\circ F = F\circ\theta_t$ su $\mathcal{U}_t$.

Concludiamo questo paragrafo parlando dei campi vettoriali sui gruppi di Lie.

Definizione 3.3.7: Un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(G)$ su un gruppo di Lie G è *invariante a sinistra* se si ha $dL_h(X) = X$ per ogni $h\in G$, cioè se

$$\forall h,x\in G \qquad d(L_h)_x(X_x) = X_{hx},$$

dove $L_h\colon G\to G$ è la traslazione sinistra.

Lemma 3.3.7: *Sia G un gruppo di Lie di elemento neutro $e\in G$. Allora:*
- (i) *L'applicazione $X\mapsto X(e)$ è un isomorfismo fra il sottospazio di $\mathcal{T}(M)$ costituito dai campi vettoriali invarianti a sinistra e lo spazio tangente T_eG.*
- (ii) *Se X, $Y\in\mathcal{T}(G)$ sono invarianti a sinistra, allora anche $[X,Y]$ lo è.*

Dimostrazione: (i) Se $X\in\mathcal{T}(G)$ è invariante a sinistra, chiaramente abbiamo

$$X_h = d(L_h)_e(X_e)$$

per ogni $h\in G$, per cui X è completamente determinato dal suo valore in e. Viceversa, se scegliamo $v\in T_eG$ e definiamo $X\in\mathcal{T}(G)$ ponendo $X_h = d(L_h)_e(v)\in T_hG$ per ogni $h\in G$ otteniamo (esercizio) un campo vettoriale invariante a sinistra che vale v nell'elemento neutro.

(ii) Se X e Y sono campi vettoriali invarianti a sinistra l'Esercizio 3.3.3 dice che

$$dL_h[X,Y] = [dL_hX, dL_hY] = [X,Y]$$

per ogni $h\in G$, per cui anche $[X,Y]$ è invariante a sinistra. □

Esercizio 3.3.5. Diremo che una varietà M è *parallelizzabile* se TM è un fibrato banale. Dimostra che ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.

Dunque lo spazio tangente all'identità di un gruppo di Lie eredita dai campi vettoriali invarianti a sinistra un'ulteriore struttura algebrica data dalla parentesi di Lie.

Definizione 3.3.8: Uno spazio vettoriale V dotato di un'ulteriore operazione $[\cdot\,,\cdot]\colon V\times V\to V$ che soddisfa le proprietà (i)-(iii) della Proposizione 3.3.2 è detto *algebra di Lie*. Se V e W sono algebre di Lie, un *morfismo* di algebre di Lie è un'applicazione $L\colon V\to W$ lineare tale che $[L(v_1),L(v_2)]=L[v_1,v_2]$ per ogni v_1, $v_2\in V$.

Esempio 3.3.1. Sia A un'algebra non commutativa sul campo $\mathbb{K}$. Allora possiamo fornire A di una struttura di algebra di Lie tramite il *commutatore* $[\cdot\,,\cdot]\colon A\times A\to A$ definito da

$$\forall X,Y\in A \qquad [X,Y]=XY-YX;$$

si verifica subito che il commutatore soddisfa le proprietà (i)-(iii) della Proposizione 3.3.2. In particolare, lo spazio vettoriale delle matrici $M_{n,n}(\mathbb{K})$ con questa struttura di algebra di Lie verrà indicato con $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Esercizio 3.3.6. Sia $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\mid \mathrm{tr}X=0\}$ il sottospazio delle matrici quadrate a traccia nulla, e $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\mid X^T+X=O\}$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche. Dimostra che X, $Y\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ implica $[X,Y]\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, e che X, $Y\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ implica $[X,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$, per cui $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ e $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ sono delle algebre di Lie.

Definizione 3.3.9: Sia G un gruppo di Lie di elemento neutro $e\in G$. Per ogni $v\in T_eG$, indichiamo con $X^v\in\mathcal{T}(G)$ il campo vettoriale invariante a sinistra tale che $X^v(e)=v$. Allora lo spazio tangente all'elemento neutro, considerato con la sua struttura di spazio vettoriale e con l'operazione $[\cdot,\cdot]\colon T_eG\times T_eG\to T_eG$ definita da $[v,w]=[X^v,X^w](e)$, è detto *algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ del gruppo G.

Non avremo il tempo di vederlo nei dettagli, ma si può ragionevolmente affermare che praticamente tutte le proprietà di un gruppo di Lie semplicemente connesso si possono ricavare dalle proprietà algebriche della sua algebra di Lie.

Definizione 3.3.10: Sia G un gruppo di Lie di dimensione n, $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie, e $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale. Allora per ogni i, $j=1,\dots,n$ devono esistere $c_{ij}^1,\dots,c_{ij}^n\in\mathbb{R}$ tali che

$$[v_i,v_j]=\sum_{k=1}^n c_{ij}^k v_k.$$

Le costanti $c_{ij}^k\in\mathbb{R}$ sono dette *costanti di struttura* di $\mathfrak{g}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esempio 3.3.2. Sia $G=GL(n,\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili a coefficienti reali; vogliamo dimostrare che la sua algebra di Lie è l'algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ introdotta nell'Esempio 3.3.1. Siccome G è un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$, lo spazio tangente nell'identità a G è canonicamente isomorfo come spazio vettoriale a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$; dobbiamo dimostrare che anche le strutture di algebra di Lie coincidono. Per ogni $a=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ indichiamo con $\tilde{a}\in\mathcal{T}(G)$ la sua estensione come campo vettoriale invariante a sinistra. Se $x=(x_{hk})\in G$ e $\mathbf{f}\in C^\infty(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{a}_x(\mathbf{f})=d(L_x)_I(a)(\mathbf{f})=a(\mathbf{f}\circ L_x)&=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial(f\circ L_x)}{\partial y_{ij}}(I)\\&=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\sum_{h,k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_{hk}}(x)\sum_{r=1}^n\frac{\partial(x_{hr}y_{rk})}{\partial y_{ij}}=\sum_{i,j,h,k,r=1}^n a_{ij}x_{hr}\delta_{ri}\delta_{kj}\frac{\partial f}{\partial x_{hk}}(x)\\&=\sum_{h,j,r=1}^n x_{hr}a_{rj}\frac{\partial f}{\partial x_{hj}}(x),\end{aligned}$$

per cui

$$\tilde{a}_x=R_a(x)=xa.$$

Da questo segue facilmente che $[\tilde{a},\tilde{b}]_x = x(ab-ba)$, per cui effettivamente la struttura di algebra di Lie è data dal commutatore:

$$\forall a,b\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \qquad [a,b]=ab-ba.$$

In particolare, se indichiamo con $\mathcal{B}=\{E_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ la base canonica di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, dove E_{ij} è la matrice con 1 al posto (i,j) e 0 altrove, cioè

$$(E_{ij})_{rs}=\delta_{ir}\delta_{js},$$

le costanti di struttura di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono date da

$$c_{(ij)(hk)}^{(rs)}=\delta_{ir}\delta_{ks}\delta_{jh}-\delta_{rh}\delta_{sj}\delta_{ik}.$$

ESEMPIO 3.3.3. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, il gruppo di Lie $G=GL(V)$ è chiaramente isomorfo a $GL(n,\mathbb{R})$, e la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}l(V)$ è isomorfa a $\mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})$. In particolare, $\mathfrak{g}l(V)=\mathrm{Hom}(V,V)$ come spazio vettoriale, e la struttura di algebra di Lie è di nuovo data dal commutatore.

Esercizio 3.3.7. Siano G e H due gruppi di Lie, con algebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ rispettivamente, e sia $F\colon G\to H$ un morfismo di gruppi di Lie. Dimostra che per ogni $X\in\mathcal{T}(G)$ invariante a sinitra esiste un unico $Y=F_*(X)\in\mathcal{T}(H)$ che è F-correlato a X, e che l'applicazione $F_*\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ definita da $F_*(X_e)=(F_*X)_e$ è un morfismo di algebre di Lie.

Esercizio 3.3.8. Sia H un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Dimostra che se v, $w\in T_eH\subseteq T_eG=\mathfrak{g}$ allora $[v,w]\in T_eH$, per cui T_eH è un'algebra di Lie, e dimostra che T_eH è canonicamente isomorfa all'algebra di Lie di H.

Esercizio 3.3.9. Dimostra che l'algebra di Lie di $SL(n,\mathbb{R})$ è canonicamente isomorfa a $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, e che l'algebra di Lie di $SO(n)$ è canonicamente isomorfa a $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$.

3.4 Il teorema di Frobenius

Questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione di un risultato fondamentale per lo studio dei campi vettoriali su una varietà: il teorema di Frobenius.

Cominciamo ponendoci un problema preliminare: supponiamo di avere su una varietà M di dimensione n un riferimento locale $\{X_1,\dots,X_n\}$ del fibrato tangente TM. Quando esiste una carta locale φ di M tale che $X_1=\partial_1,\dots,X_n=\partial_n$? Una condizione necessaria è data dalla Proposizione 3.3.2.(v): si deve avere $[X_i,X_j]\equiv O$ per ogni i, $j=1,\dots,n$. Vogliamo dimostrare che questa condizione è (essenzialmente) anche sufficiente; per farlo procederemo per gradi.

Definizione 3.4.1: Sia $X\in\mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M. Diremo che $p\in M$ è un *punto singolare* di X se $X_p=O_p$; diremo che p è un *punto regolare* altrimenti.

Proposizione 3.4.1: *Sia $p\in M$ un punto regolare di un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(M)$. Allora esiste una carta locale (U,φ) centrata in p tale che $X|_U\equiv\partial/\partial x^1$.*

Dimostrazione: Trattandosi di un problema locale, possiamo supporre $M=\mathbb{R}^n$ e $p=O$. Inoltre, essendo $X_p\neq O_p$, a meno di permutare le coordinate possiamo anche supporre che la prima coordinata di X non si annulli in p. Il nostro obiettivo è trovare una carta locale (U,φ) in O tale che si abbia

$$X_q=d(\varphi^{-1})_{\varphi(q)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(q)}\right)$$

per ogni $q\in U$.

Sia $\Theta: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ il flusso locale di X, e scegliamo $\varepsilon > 0$ e un intorno aperto U_0 dell'origine tali che $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subseteq \mathcal{U}$. Poniamo $S_0 = U_0 \cap \{x^1 = 0\}$, e $S = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x') \in S_0\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Definiamo allora $\psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times S \to \mathbb{R}^n$ con

$$\psi(t, x') = \theta_t(0, x').$$

L'idea è che $d\psi(\partial/\partial t) \equiv X \circ \psi$ e che $d\psi_{0,O'}$ è invertibile; allora ψ è localmente invertibile, e l'inversa locale φ di ψ ci fornirà la carta locale cercata.

Dato $(t_0, x_0') \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times S$ e $f \in C^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0\big)$ abbiamo

$$d\psi_{(t_0,x_0')}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t_0,x_0')}\right)(f) = \left.\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \psi)\right|_{(t_0,x_0')} = \left.\frac{\partial}{\partial t} f\big(\theta_t(0, x_0')\big)\right|_{t=t_0} = (Xf)\big(\psi(t_0, x_0')\big),$$

per cui $d\psi(\partial/\partial t) \equiv X \circ \psi$, come voluto.

Infine, siccome $\psi(0, x') = (0, x')$ per ogni $x' \in S$, abbiamo

$$d\psi_{(0,O')}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_O$$

per ogni $i = 2, \ldots, n$. Quindi $d\psi_{(0,O')}$ manda una base di $T_{(0,O')}\mathbb{R}^n$ in una base di $T_O\mathbb{R}^n$ (ricorda che la prima coordinata di X_O è non nulla!), per cui $d\psi_{(0,O')}$ è invertibile come richiesto, e ci siamo. $\square$

Per trattare il caso generale ci serve la seguente

Proposizione 3.4.2: *Siano X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ due campi vettoriali su una varietà M, e indichiamo con $\Theta: \mathcal{U} \to M$ il flusso locale di X, e con $\Psi: \mathcal{V} \to M$ il flusso locale di Y. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $[X, Y] = O$;
(ii) Y *è* X*-invariante;*
(iii) X *è* Y*-invariante;*
(iv) $\psi_s \circ \theta_t = \psi_s \circ \theta_t$ *non appena uno dei due membri è definito.*

Dimostrazione: Se Y è X-invariante, chiaramente $\mathcal{L}_X Y = O$, e quindi $[X, Y] = O$. Viceversa, supponiamo che $[X, Y] = O$; dobbiamo dimostrare che Y è X-invariante. Sia $p \in M$ qualsiasi, e sia $V: \mathcal{U}^p \to T_p M$ data da

$$V(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y);$$

per far vedere che Y è X-invariante ci basta dimostrare che V è costante. Ma infatti per ogni $t_0 \in \mathcal{U}^p$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(t_0) &= \left.\frac{d}{dt} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d}{ds} d(\theta_{-t_0-s})_{\theta_{t_0+s}(p)}(Y)\right|_{s=0} \\
&= \left.\frac{d}{ds} d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)} \circ d(\theta_{-s})_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}(Y)\right|_{s=0} = d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)}\left(\left.\frac{d}{ds} d(\theta_{-s})_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}(Y)\right|_{s=0}\right) \\
&= d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)}(\mathcal{L}_X Y) = O,
\end{aligned}$$

per cui $V(t) \equiv V(0) = Y_p$ e ci siamo.

Abbiamo quindi dimostrato che (i) è equivalente a (ii); essendo $[Y, X] = -[X, Y]$, in modo analogo si dimostra che (i) è equivalente a (iii).

Dimostriamo ora che (iii) implica (iv). Scegliamo $s \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{V}_s$, e consideriamo la curva $\sigma: I \to M$ ottenuta ponendo $\sigma = \psi_s \circ \theta^p$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo contenente l'origine. Allora per ogni $t \in I$ abbiamo

$$\sigma'(t) = (\psi_s \circ \theta^p)'(t) = d(\psi_s)_{\theta^p(t)}\big((\theta^p)'(t)\big) = d(\psi_s)_{\theta^p(t)}(X_{\theta^p(t)}) = X_{\sigma(t)},$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che X è Y-invariante. Ma allora questo vuol dire che σ è la curva integrale di X uscente da $\psi_s(p)$, per cui $\psi_s \circ \theta_t(p)$ è definito se e solo se $\theta_t \circ \psi_s(p)$ lo è, e i due sono uguali.

Infine, supponiamo che valga (iv). Allora

$$d(\psi_s)_p(X) = \left.\frac{d}{dt}(\psi_s \circ \theta^p)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\big(\psi_s \circ \theta_t(p)\big)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\big(\theta_t(\psi_s(p))\big)\right|_{t=0} = (\theta^{\psi_s(p)})'(0) = X_{\psi_s(p)},$$

per cui X è Y-invariante, come voluto. $\square$

Possiamo allora dimostrare il

Teorema 3.4.3: *Siano $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(M)$ campi vettoriali linearmente indipendenti in ogni punto di una varietà M di dimensione n. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *Per ciascun $p \in M$ esiste una carta locale (U, φ) centrata in p tale che $X_j|_U = \partial/\partial x^j$ per $j = 1, \ldots, k$;*
(ii) *$[X_i, X_j] \equiv O$ per $i, j = 1, \ldots, k$.*

Dimostrazione: Abbiamo già notato che (i) implica (ii); supponiamo allora che (ii) valga. Essendo un problema locale, possiamo supporre $M = \mathbb{R}^n$ e $p = O$. A meno di permutare le coordinate, possiamo anche supporre che $\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p, \partial/\partial\tilde{x}^{k+1}|_p, \ldots, \partial/\partial\tilde{x}^n|_p\}$ sia una base di T_pM. Indichiamo con Θ_j il flusso locale di X_j, per $j = 1, \ldots, k$. Ragionando per induzione su k si dimostra facilmente che esistono $\varepsilon > 0$ e un intorno $W \subseteq \tilde{U}$ di p tale che la composizione $(\theta_k)_{t_k} \circ \cdots \circ (\theta_1)_{t_1}$ sia ben definita su W per ogni $t_1, \ldots, t_k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Poniamo $S = \{(x^{k+1}, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in W\}$, e definiamo $\psi\colon (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times S \to \mathbb{R}^n$ con

$$\psi(t^1, \ldots, t^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = (\theta_k)_{t^k} \circ \cdots \circ (\theta_1)_{t^1}(0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n).$$

Dimostriamo prima di tutto che

$$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right) = X_i \tag{3.4.1}$$

per $i = 1, \ldots, k$. Infatti, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times S$ la proposizione precedente ci dà

$$\begin{aligned} d\psi_x\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial t^i}(f \circ \psi)\bigg|_x = \frac{\partial}{\partial t^i} f\big((\theta_k)_{t^k} \circ \cdots \circ (\theta_1)_{t^1}(0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n)\big)\bigg|_x \\ &= \frac{\partial}{\partial t^i} f\big((\theta_i)_{t^i} \circ (\theta_k)_{t^k} \circ \cdots \circ (\theta_{i+1})_{t^{i+1}} \circ (\theta_{i-1})_{t^{i-1}} \circ (\theta_1)_{t^1}(0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n)\big)\bigg|_x \\ &= (X_i f)\big(\psi(x)\big), \end{aligned}$$

ed (3.4.1) è dimostrata. Per concludere la dimostrazione ci basta far vedere che $d\psi_O$ è invertibile, perché in tal caso ψ è invertibile in un intorno dell'origine, e l'inversa φ di ψ è la carta locale cercata. Ma infatti siccome $\psi(0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n) = (0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n)$, vediamo subito che

$$d\psi_O\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_O$$

per $j = k+1, \ldots, n$, e la (3.4.1) insieme all'ipotesi che $\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p, \partial/\partial\tilde{x}^{k+1}|_p, \ldots, \partial/\partial\tilde{x}^n|_p\}$ fosse una base di T_pM ci dà la tesi. □

Questo era solo l'antipasto. Una conseguenza del Teorema 3.3.4 è che dato un campo vettoriale mai nullo $X \in \mathcal{T}(M)$ possiamo decomporre la varietà M nell'unione delle curve integrali di X: ogni punto di M appartiene a una e una sola curva integrale, e ciascuna curva integrale è un'immersione (in quanto abbiamo supposto che X non abbia punti singolari).

Se ci dimentichiamo della parametrizzazione delle curve integrali, possiamo riformulare il risultato in questo modo: da una parte abbiamo selezionato in modo C^∞ un sottospazio uni-dimensionale in ciascun spazio tangente T_pM (il sottospazio generato da X_p); dall'altra abbiamo che ogni punto è contenuto nell'immagine dell'immersione di una varietà 1-dimensionale tangente in ogni punto a questi sottospazi unidimensionali. Il teorema di Frobenius è la generalizzazione di questo enunciato al caso di sottospazi k-dimensionali.

Introduciamo una serie di definizioni per giungere a un enunciato preciso del teorema di Frobenius.

Definizione 3.4.2: Una *distribuzione* k-dimensionale su una varietà M è un sottoinsieme $\mathcal{D} \subset TM$ del fibrato tangente tale che $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_pM$ è un sottospazio k-dimensionale di T_pM per ogni $p \in M$. Diremo che la distribuzione k-dimensionale $\mathcal{D}$ è *liscia* se per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ di p e k campi vettoriali locali $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{T}(U)$ tali che $\mathcal{D}_p = \mathrm{Span}\big(Y_1(p), \ldots, Y_k(p)\big)$ per ogni $p \in U$. La k-upla $(Y_1, \ldots, Y_k)$ è detta *riferimento locale* per $\mathcal{D}$ su U.

Esercizio 3.4.1. Dimostra che una distribuzione $\mathcal{D} \subseteq TM$ k-dimensionale è una distribuzione liscia se e solo se è un sottofibrato vettoriale di TM di rango k.

Definizione 3.4.3: Una *sezione locale* di una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ su un aperto $U \subseteq M$ di una varietà M è un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(U)$ tale che $X_p \in \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in U$. Indicheremo con $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ lo spazio delle sezioni locali di $\mathcal{D}$ sull'aperto U. Diremo che la distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è *involutiva* se $[X,Y] \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ per ogni X, $Y \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ e ogni aperto $U \subseteq M$.

Esercizio 3.4.2. Dimostra che una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se per ogni $p \in M$ esiste un riferimento locale $(Y_1, \ldots, Y_k)$ per $\mathcal{D}$ su un intorno aperto U di p tale che $[Y_i, Y_j] \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ per ogni i, $j = 1, \ldots, k$.

Definizione 3.4.4: Una *sottovarietà immersa* di dimensione k in una varietà M è un sottoinsieme $S \subseteq M$ dotato di una struttura di varietà k-dimensionale (non necessariamente con la topologia indotta da M) tale che l'inclusione $\iota: S \hookrightarrow M$ sia un'immersione di classe C^∞.

Osservazione 3.4.1. Se $F: N \to M$ è un'immersione iniettiva, allora $F(N)$, con la struttura di varietà indotta da N come descritto nell'Osservazione 2.5.1, è una sottovarietà immersa di M. Inoltre, se S è una sottovarietà immersa in M, il differenziale dell'inclusione permette di identificare T_pS con un sottospazio di T_pM per ogni $p \in S$.

Esercizio 3.4.3. Sia $\iota: S \hookrightarrow M$ una sottovarietà immersa in una varietà M. Dimostra che per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$ tale che $X_p \in T_pS$ per ogni $p \in S$ esiste un unico campo vettoriale $X|_S \in \mathcal{T}(S)$ che è ι-correlato a X. Deduci che se X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ sono tali che X_p, $Y_p \in T_pS$ per ogni $p \in S$ allora $[X,Y]_p \in T_pS$ per ogni $p \in S$.

Esercizio 3.4.4. Sia $S \subseteq M$ un sottoinsieme di una varietà M. Dimostra che per ogni topologia su S esiste al più una struttura di varietà differenziabile su S che induce la topologia data su S e la rende una sottovarietà immersa di M.

Definizione 3.4.5: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia. Una *sottovarietà integrale* di $\mathcal{D}$ è una sottovarietà immersa $S \hookrightarrow M$ tale che $T_pS = \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in S$. Diremo che $\mathcal{D}$ è *integrabile* se ogni punto di M è contenuto in una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$.

Proposizione 3.4.4: *Ogni distribuzione liscia integrabile è involutiva.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione integrabile, e X, $Y \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ due sezioni di $\mathcal{D}$ su un aperto U. Preso $p \in U$, sia $N \subseteq U$ una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$ contenente p. Siccome X e Y sono sezioni di $\mathcal{D}$, abbiamo X_q, $Y_q \in T_qN$ per ogni $q \in N$; l'Esercizio 3.4.3 ci dice allora che $[X,Y]_p \in T_pN = \mathcal{D}_p$. Siccome questo vale per qualsiasi $p \in U$, otteniamo $[X,Y] \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$, come voluto. □

Come già succedeva per le curve integrali, le sottovarietà integrali sono (almeno localmente) a due a due disgiunte e, in un certo senso, parallele. Per precisare questo concetto ci servono un altro paio di definizioni.

Definizione 3.4.6: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia k-dimensionale in una varietà di dimensione n. Diremo che una carta locale (U, φ) è *piatta* per $\mathcal{D}$ se $\varphi(U) = V' \times V''$ con V' aperto in $\mathbb{R}^k$ e V'' aperto in $\mathbb{R}^{n-k}$, e se $(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^k)$ è un riferimento locale per $\mathcal{D}$ su U. Diremo che $\mathcal{D}$ è *completamente integrabile* se per ogni $p \in M$ esiste una carta locale (U, φ) in p piatta per $\mathcal{D}$. Se (U, φ) è una carta piatta per $\mathcal{D}$, gli insiemi della forma $\{x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\}$ con $c^{k+1}, \ldots, c^n \in \mathbb{R}$ sono detti *foglie* di U.

Lemma 3.4.5: *Ogni distribuzione liscia completamente integrabile è integrabile.*

Dimostrazione: Infatti se (U, φ) è una carta piatta per una distribuzione k-dimensionale liscia $\mathcal{D}$ allora le foglie di U sono chiaramente delle sottovarietà integrali di $\mathcal{D}$. □

Dunque completamente integrabile implica integrabile che implica involutiva. Il *Teorema di Frobenius locale* ci assicura che queste implicazioni sono in realtà delle equivalenze:

Teorema 3.4.6: (Frobenius) *Ogni distribuzione liscia involutiva è completamente integrabile.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia involutiva. Grazie al Teorema 3.4.3, per dimostrare che $\mathcal{D}$ è completamente integrabile ci basta trovare nell'intorno di ogni punto di M un riferimento locale di $\mathcal{D}$ composto da campi vettoriali che commutano.

Dato $p \in M$, scegliamo una carta locale (U, φ) centrata in p tale che esista un riferimento locale $(X_1, \ldots, X_k)$ per $\mathcal{D}$ su U. Inoltre, a meno di permutare le coordinate di φ, possiamo anche supporre che

$$\left\{ X_1(p), \ldots, X_k(p), \left.\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right\}$$

sia una base di T_pM. Per comodità di notazione, poniamo $X_j = \partial/\partial x^j$ per $j = k+1, \ldots, n$, e scegliamo $a_i^j \in C^\infty(U)$ tali che

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

su U, per $i = 1, \ldots, n$. La matrice (a_i^j) è invertibile in p; a meno di restringere ulteriormente U possiamo supporre che sia invertibile su tutto U, e sia (b_j^i) la sua inversa. Allora

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n b_j^i X_i = \sum_{i=1}^k b_j^i X_i + \sum_{i=k+1}^n b_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

per $j = 1, \ldots, n$. Definiamo allora $Y_j = \sum_{i=1}^k b_j^i X_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ per $j = 1, \ldots, k$; per concludere ci basta dimostrare che $(Y_1, \ldots, Y_k)$ è un riferimento locale per $\mathcal{D}$ composto da campi vettoriali che commutano.

Sia $F \colon U \to \mathbb{R}^k$ data da $F = \pi \circ \varphi$, dove $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è la proiezione sulle prime k coordinate. Allora per ogni $q \in U$ e ogni $j = 1, \ldots, k$ abbiamo

$$dF_q(Y_j) = dF_q(Y_j) + \sum_{i=k+1}^n b_j^i(q)\, dF_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = dF_q\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{F(q)}.$$

Quindi gli Y_j sono linearmente indipendenti su tutto U, per cui formano un riferimento locale per $\mathcal{D}$, e $dF_q|_{\mathcal{D}_q}$ è iniettivo per ogni $q \in U$. Inoltre, l'Esercizio 3.3.3 implica che

$$dF_q([Y_i, Y_j]) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\bigl(F(q)\bigr) = O$$

per ogni $q \in U$ e $i, j = 1, \ldots, k$. Ma allora, essendo $\mathcal{D}$ involutiva abbiamo $[Y_i, Y_j](q) \in \mathcal{D}_q$, ed essendo $dF_q|_{\mathcal{D}_q}$ iniettivo troviamo $[Y_i, Y_j](q) = O_q$, come voluto. □

Vogliamo ora dare una descrizione di come sono disposte le sottovarietà integrali, descrizione che ci servirà poi per dare la versione globale del Teorema di Frobenius.

Proposizione 3.4.7: *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva k-dimensionale in una varietà M, (U, φ) una carta piatta per $\mathcal{D}$, e N una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$. Allora $N \cap U$ è unione disgiunta al più numerabile di aperti connessi di foglie di U, ciascuno dei quali è aperto in N ed embedded in M.*

Dimostrazione: Siccome l'inclusione $\iota \colon N \hookrightarrow M$ è continua, l'intersezione $N \cap U = \iota^{-1}(U)$ è aperta in N, e quindi è unione di una quantità al più numerabile di componenti connesse, ciascuna delle quali è aperta in N.

Sia V una di queste componenti connesse; cominciamo col dimostrare che è contenuta in un'unica foglia di U. Essendo (U, φ) una carta piatta per $\mathcal{D}$, per ogni $p \in U$ abbiamo $\mathcal{D}_p = \mathrm{Ker}(dx^{k+1}) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(dx^n)$. Quindi la restrizione di $dx^{k+1}, \ldots, dx^n$ a TV è identicamente nulla; essendo V connesso, questo vuol dire che le funzioni $x^{k+1}, \ldots, x^n$ sono costanti su V, e quindi V è contenuto in un'unica foglia S di U.

Siccome S è una sottovarietà (embedded) di M, l'inclusione $V \hookrightarrow S$ è di classe C^∞, essendolo a valori in M. Ma allora è un'immersione iniettiva fra varietà della stessa dimensione, per cui è un diffeomorfismo locale e un omeomorfismo con l'immagine, che è aperta in S; in altre parole, è un embedding. Essendo S embedded in M, ne segue che V è embedded in M. □

Definizione 3.4.7: Una *foliazione* di dimensione k di una n-varietà è una partizione $\mathcal{F}$ di M in sottovarietà immerse connesse, disgiunte e di dimensione k (dette *foglie* della foliazione) tali che per ogni punto $p \in M$ esiste una carta locale (U, φ) in p per cui $\varphi(U) = V' \times V''$, con V' aperto in $\mathbb{R}^k$ e V'' aperrto in $\mathbb{R}^{n-k}$, e tale che ogni foglia della foliazione intersechi U o nell'insieme vuoto o in una unione disgiunta al più numerabile di foglie k-dimensionali di U della forma $\{x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\}$ per opportune costanti $c^{k+1}, \ldots, c^n \in \mathbb{R}$. Una tale carta locale sarà detta *piatta* per la foliazione $\mathcal{F}$.

Esercizio 3.4.5. Dimostra che l'unione degli spazi tangenti alle foglie di una foliazione k-dimensionale forma una distribuzione liscia k-dimensionale involutiva.

La versione globale del Teorema di Frobenius ci dice che è vero anche l'inverso di questo esercizio, per cui foliazioni o distribuzioni involutive sono di fatto la stessa cosa.

Per dimostrarlo, ci serve un ultimo

Lemma 3.4.8: *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva in una varietà M, e sia $\{N_\alpha\}$ una collezione di sottovarietà integrali connesse di $\mathcal{D}$ con un punto in comune. Allora $N = \bigcup_\alpha N_\alpha$ ha un'unica struttura di varietà per cui sia una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ tale che ciascun N_α sia aperto in N.*

Dimostrazione: Su ciascun N_α fissiamo un atlante composto da carte locali della forma $(S \cap N_\alpha, \pi \circ \varphi)$, dove S è un'unica foglia di una carta (U, φ) piatta per $\mathcal{D}$, e $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è la proiezione sulle prime k-coordinate. Se N ha una struttura di varietà che soddisfa le richieste queste carte devono farvi parte; quindi ci basta dimostrare che mettendole insieme otteniamo un atlante di N.

Per avere la compatibilità topologica delle carte, dobbiamo prima di tutto dimostrare che $N_\alpha \cap N_\beta$ è aperto in N_β quali che siano α e β. Prendiamo $q \in N_\alpha \cap N_\beta$, sia (U, φ) una carta in q piatta per $\mathcal{D}$, e indichiamo con V_α (rispettivamente, V_β) la componente connessa di $N_\alpha \cap U$ (rispettivamente, $N_\beta \cap U$) contenente q. La Proposizione 3.4.7 ci dice che V_α e V_β sono aperti di una foglia S di U, necessariamente la stessa per entrambi in quanto deve contenere q. Quindi $V_\alpha \cap V_\beta$ è aperto in S, e quindi in N_β, come voluto.

Siccome due foglie distinte di una carta piatta sono disgiunte, se $(S_\alpha \cap N_\alpha) \cap (S_\beta \cap N_\beta) \neq \varnothing$ allora $S_\alpha = S_\beta$. Quindi i cambiamenti di coordinate nel nostro atlante saranno della forma $\pi \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\pi|_{\varphi(S)})^{-1}$, definiti su aperti di $\mathbb{R}^k$ per quanto detto finora, e chiaramente di classe C^∞.

Siccome essere un'immersione è una proprietà locale, l'inclusione $N \hookrightarrow M$ è un'immersione, ed è evidente che N è una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$.

Rimane quindi da dimostrare che la strutturà di varietà così definita su N è di Hausdorff e ha una base numerabile. Se $q, q' \in N$ sono punti distinti, prendiamo intorni disgiunti U e U' in M; allora, essendo l'inclusione $N \hookrightarrow M$ continua, $U \cap N$ e $U' \cap N$ sono intorni disgiunti di q e q' in N, per cui N è di Hausdorff.

Ora, sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto numerabile di M composto da domini di carte piatte per $\mathcal{D}$. Per far vedere che N ha una base numerabile è sufficiente far vedere che $N \cap U_i$ è contenuto in un'unione numerabile di foglie di U_i per ciascun i, in quanto qualsiasi aperto di una foglia ha una base numerabile.

Fissiamo un punto $p \in M$ contenuto in tutti gli N_α, scegliamo $U_i \in \mathfrak{U}$, e sia $S \subset U_i$ una foglia di U_i contenente un punto $q \in N$. Per definizione, deve esistere un α tale che N_α contiene sia p che q. Essendo N_α connesso per archi, esiste una curva continua $\sigma: [0,1] \to N_\alpha$ che collega p con q. Siccome l'immagine di σ è compatta, esiste una partizione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ di $[0,1]$ tale che $\sigma([t_{j-1}, t_j])$ è contenuto in un $U_{i_j} \in \mathfrak{U}$ per ogni $j = 1, \ldots, m$. Essendo $\sigma([t_{j-1}, t_j])$ connesso, è contenuto in un'unica componente connessa di $N_\alpha \cap U_{i_j}$, e quindi in un'unica foglia S_{i_j} di U_{i_j}.

Diremo che una foglia S di un qualche U_k è *accessibile* da p se esiste una successione finita di indici $i_0, \ldots, i_m$ e di foglie $S_{i_j} \subset U_{i_j}$ tali che $p \in S_{i_0}$, $S_{i_m} = S$ e $S_{i_{j-1}} \cap S_{i_j} \neq \varnothing$ per $j = 1, \ldots, m$. Siccome ogni foglia $S_{i_{j-1}}$ è a sua volta una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$, per la Proposizione 3.4.7 può intersecare al più una quantità numerabile di foglie di U_{i_j}. Questo vuol dire che esistono al più una quantità numerabile di foglie accessibili da p; ma la discussione precedente mostra che ogni foglia che interseca N è accessibile da p, e abbiamo finito. □

E infine, ecco il *Teorema di Frobenius globale:*

Teorema 3.4.9: *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva in una varietà M. Allora la collezione di tutte le sottovarietà integrali massimali di $\mathcal{D}$ forma una foliazione di M.*

Dimostrazione: Per ogni $p \in M$ indichiamo con L_p l'unione di tutte le sottovarietà integrali connesse di $\mathcal{D}$ che contengono p; grazie al lemma precedente, L_p è una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$, chiaramente massimale. Se $L_p \cap L_{p'} \neq \varnothing$, allora $L_p \cup L_{p'}$ è ancora una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$, e quindi per massimalità $L_p = L_{p'}$. Quindi le sottovarietà integrali connesse massimali di $\mathcal{D}$ formano una partizione di M.

Se (U, φ) è una carta locale piatta per $\mathcal{D}$, allora $L_p \cap U$ è unione al più numerabile di aperti di foglie di U, per la Proposizione 3.4.7. Se per una di tali foglie S si avesse $L_p \cap S \neq S$, allora $L_p \cup S$ sarebbe una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ contenente propriamente L_p, contro la massimalità. Quindi $L_p \cap U$ è sempre unione di una quantità al più numerabile di foglie di U, per cui $\{L_p \mid p \in M\}$ è una foliazione. □

3.5 Forme differenziali e differenziale esterno

In questo paragrafo raccoglieremo alcune proprietà fondamentali delle forme differenziali.

Prima di tutto, se $\eta \in A^r(M)$ e $\omega \in A^s(M)$ sono rispettivamente una r-forma e una s-forma su una varietà M, è chiaro che possiamo definire la $(r+s)$-forma $\eta \wedge \omega \in A^{r+s}(M)$ ponendo

$$\forall p \in M \qquad \eta \wedge \omega(p) = \eta(p) \wedge \omega(p);$$

in questo modo otteniamo su

$$A^\bullet(M) = \bigoplus_{r=0}^{\dim M} A^r(M)$$

una naturale struttura di algebra associativa e anticommutativa.

Abbiamo notato nel Paragrafo 3.3 che, in generale, è difficile trasportare campi vettoriali da una varietà a un'altra usando applicazioni differenziabili. Uno dei vantaggi delle forme differenziali è che sono invece molto semplici da trasportare:

Definizione 3.5.1: Sia $\omega \in A^r(N)$ una r-forma sulla varietà N, e $F \colon M \to N$ un'applicazione di classe C^∞. Il *pull-back* di ω lungo F è la r-forma $F^*\omega \in A^r(M)$ definita da

$$F^*\omega_p(v_1, \ldots, v_r) = \omega_{F(p)}\big(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_r)\big)$$

per ogni $v_1, \ldots, v_r \in T_pM$. Si verifica subito (esercizio) che $F^*\omega$ è r-lineare, alternante e di classe C^∞, per cui è effettivamente una r-forma su M. Se $\iota \colon M \hookrightarrow N$ è una sottovarietà, scriveremo anche $\omega|_M$ per $\iota^*\omega$.

Esercizio 3.5.1. Sia $F \colon M \to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà. Dimostra che

(i) $F^* \colon A^r(N) \to A^r(M)$ è lineare per ogni $r \geq 0$;
(ii) $F^*(\eta \wedge \omega) = F^*\eta \wedge F^*\omega$ per ogni η, $\omega \in A^\bullet(N)$;
(iii) se

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1 \ldots i_r} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}$$

è l'espressione in coordinate locali $(y^1, \ldots, y^n)$ di una r-forma $\omega \in A^r(N)$, allora

$$F^*\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} (\omega_{i_1 \ldots i_r} \circ F)\, d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_r} \circ F).$$

In particolare, se M ed N hanno entrambi dimensione n, $(x^1, \ldots, x^n)$ sono coordinate locali su un aperto U di M, $(y^1, \ldots, y^n)$ sono coordinate locali su un aperto V di N con $F(U) \subseteq V$, e $f \in C^\infty(V)$, allora dimostra che

$$F^*(f\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (f \circ F) \det(dF)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Se $f \in C^\infty(M)$ è una funzione differenziabile su M (ovvero una 0-forma), il differenziale df induce un'applicazione $C^\infty(M)$-lineare $df\colon \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, cioè, grazie alla Proposizione 3.2.1.(i), una 1-forma differenziale. Quindi abbiamo un'applicazione lineare $d\colon A^0(M) \to A^1(M)$ data in coordinate locali da

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j.$$

Una delle principali proprietà delle forme differenziali è che possiamo estendere quest'applicazione d a tutto $A^\bullet(M)$, cioè possiamo definire in maniera coerente il differenziale di qualsiasi forma differenziale:

Teorema 3.5.1: *Sia M una n-varietà. Allora esiste un'unica applicazione lineare $d\colon A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ soddisfacente le quattro condizioni seguenti:*
- (a) $d\big(A^r(M)\big) \subseteq A^{r+1}(M)$ *per ogni* $r \in \mathbb{N}$;
- (b) *se* $f \in C^\infty(M) = A^0(M)$ *allora* $df \in A^1(M)$ *è il differenziale di* f;
- (c) *se* $\omega \in A^r(M)$ *e* $\eta \in A^s(M)$ *allora*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta;$$

- (d) $d \circ d = O$.

Questa applicazione soddisfa anche le seguenti proprietà:
- (i) *d è locale: se $\omega \equiv \omega'$ su un aperto U di M, allora $(d\omega)|_U \equiv (d\omega')|_U$;*
- (ii) *d commuta con la restrizione: se $U \subseteq M$ è aperto, allora $d(\omega|_U) = (d\omega)|_U$;*
- (iii) *più in generale, d commuta con i pull-back: se $F\colon M \to N$ è di classe C^∞ e $\omega \in A^r(N)$, allora $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$;*
- (iv) *se $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ è una 1-forma e X, $Y \in \mathcal{T}(M)$, allora*

$$d\omega(X,Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega([X,Y]);$$

- (v) *se $(x^1, \ldots, x^n)$ sono coordinate locali in un aperto di M, allora*

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega_{i_1 \ldots i_r}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \right) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} d\omega_{i_1 \ldots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Dimostrazione: Iniziamo con il caso particolare in cui esista una carta globale (M, φ), con $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, e definiamo $d\colon A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ per ogni $r \in \mathbb{N}$ con la (3.5.1); in particolare, $d|_{A^r(M)} \equiv O$ per ogni $r \ge n$. Chiaramente d è lineare e soddisfa (a) e (b); dobbiamo dimostrare che soddisfa (c) e (d). Per far ciò introduciamo la seguente notazione: se $I = (i_1, \ldots, i_r)$ è un multiindice, scriveremo dx^I per $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Inoltre, useremo il simbolo $\sum'_I$ per indicare la somma su tutti multiindici $I = (i_1, \ldots, i_r)$ crescenti, cioè tali che $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$. Quindi con queste notazioni la (3.5.1) diventa

$$d\left({\sum_I}' \omega_I\, dx^I \right) = {\sum_I}' d\omega_I \wedge dx^I.$$

In particolare, abbiamo $d(f\, dx^I) = df \wedge dx^I$ per ogni multiindice crescente I, e quindi (perché?) per ogni multiindice I, anche non crescente.

Per dimostrare (c), grazie alla linearità possiamo supporre $\omega = f\, dx^I$ e $\eta = g\, dx^J$. Allora

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg\, dx^I \wedge dx^J) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge g\, dx^J + dg \wedge f\, dx^I \wedge dx^J = (df \wedge dx^I) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge (dg \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

dove il fattore $(-1)^r$ compare perché dg è una 1-forma mentre dx^I è una r-forma.

Per dimostrare (d), supponiamo prima $r=0$. Allora

$$d(df) = d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,dx^i \wedge dx^j = \sum_{1\le i<j\le n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right] dx^i\wedge dx^j = O.$$

Sia ora $r>0$ qualsiasi. Allora usando il caso $r=0$ e la proprietà (c) otteniamo

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left({\sum_J}' d\omega_J \wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}\right)\\ &= {\sum_J}' d(d\omega_J)\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r} + {\sum_J}'\sum_{i=1}^r (-1)^i\,d\omega_J\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge d(dx^{j_i})\wedge\cdots\wedge dx^{j_r} = O. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto un'applicazione lineare soddisfacente (a)–(d), e chiaramente valgono anche (i), (ii) e (v); si possono anche dimostrare le proprietà (iii) e (iv), ma lo rimandiamo al caso generale.

Vediamo ora l'unicità della d, sempre in questo caso particolare. Supponiamo che $\tilde d\colon A^\bullet(M)\to A^\bullet(M)$ sia un'altra applicazione lineare che soddisfa (a)–(d). Presa $\omega = {\sum_J}'\omega_J\,dx^J \in A^r(M)$, usando (b), (c) e (d) troviamo

$$\begin{aligned} \tilde d\omega &= {\sum_J}'\tilde d\omega_J\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r} + (-1)^0{\sum_J}'\omega_J\tilde d(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r})\\ &= {\sum_J}' d\omega_J\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r} + {\sum_J}'\omega_J\sum_{i=1}^r(-1)^{i-1}\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge\tilde d(dx^{j_i})\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}\\ &= d\omega + {\sum_J}'\omega_J\sum_{i=1}^r(-1)^{i-1}\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge\tilde d(\tilde d x^{j_i})\wedge\cdots\wedge dx^{j_r} = d\omega, \end{aligned}$$

come voluto. In particolare, *$d\omega$ non dipende dalla carta globale usata in* (3.5.1).

Ora sia M una varietà qualsiasi. Se $U\subseteq M$ è il dominio di una carta locale, la discussione precedente ci fornisce un'applicazione lineare $d_U\colon A^\bullet(U)\to A^\bullet(U)$ che soddisfa (a)–(d), (i), (ii) e (v). Sull'intersezione $U\cap U'$ dei domini di due carte locali abbiamo

$$(d_U\omega)|_{U\cap U'} = d_{U\cap U'}\omega = (d_{U'}\omega)|_{U\cap U'},$$

grazie a (ii) e all'unicità di d_U e $d_{U'}$. Quindi possiamo definire un'applicazione lineare $d\colon A^\bullet(M)\to A^\bullet(M)$ ponendo

$$(d\omega)_p = d_U(\omega|_U)_p$$

per ogni $\omega\in A^r(M)$, $p\in M$ e carta (U,φ) in p, e d soddisfa (a)–(d), (i), (ii) e (v).

Dimostriamo ora l'unicità nel caso generale. Sia $\tilde d\colon A^\bullet(M)\to A^\bullet(M)$ un'altra applicazione lineare che soddisfa (a)–(d). Cominciamo col dimostrare che $\tilde d$ soddisfa anche (i). Chiaramente basta far vedere che se $\eta\in A^r(M)$ è tale che $\eta|_U\equiv O$ per un qualche aperto $U\subseteq M$, allora $(d\eta)|_U\equiv O$. Sia $p\in U$ qualunque, e sia $g\in C^\infty(M)$ una funzione con $g\equiv 1$ in un intorno di p e $g|_{M\setminus U}\equiv 0$ (vedi la Proposizione 2.3.1). Allora $g\eta\equiv O$ su tutto M, per cui

$$O = \tilde d(g\eta)_p = dg_p\wedge\eta_p + g(p)\tilde d\eta_p = \tilde d\eta_p.$$

Essendo p generico, otteniamo $\tilde d\eta|_U\equiv O$.

Sia ora (U,φ) una carta locale qualsiasi, e definiamo un'applicazione lineare $\tilde d_U\colon A^\bullet(U)\to A^\bullet(U)$ ponendo $(\tilde d_U\omega)_p = (\tilde d\tilde\omega)_p$ per ogni $p\in U$ e $\omega\in A^r(U)$, dove $\tilde\omega\in A^r(M)$ è una r-forma globale che coincide con ω in un intorno di p. L'estensione $\tilde\omega$ esiste grazie all'Esercizio 3.2.4, e $\tilde d_U\omega$ non dipende dall'estensione scelta grazie alla proprietà (i) di $\tilde d$. Chiaramente, $\tilde d_U$ soddisfa (a)–(d); ma allora, per quanto già visto,

$\tilde{d}_U = d_U$. In particolare, se $\omega \in A^r(M)$, $p \in M$ e (U, φ) è una carta in p, possiamo usare ω stessa come estensione di $\omega|_U$ e quindi

$$(d\omega)_p = (d_U \omega|_U)_p = (\tilde{d}_U \omega|_U)_p = (\tilde{d}\omega)_p.$$

Essendo p e ω generici, otteniamo $\tilde{d} \equiv d$, e l'unicità è dimostrata.

Passiamo ora a verificare (iii). Grazie a (i), ci basta dimostrare (iii) nell'intorno di ciascun punto, per cui possiamo supporre di avere coordinate globali $(x^1, \ldots, x^n)$. Per linearità, possiamo anche supporre che ω sia della forma $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Allora l'Esercizio 3.5.1 dà

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) = d(f \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_r} \circ F) \\ &= d\big((f \circ F)\, d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_r} \circ F)\big) = d(F^*\omega), \end{aligned}$$

come voluto.

Infine, dobbiamo verificare (iv). Grazie alla linearità e alla proprietà (i), ci basta (perché?) considerare il caso $\omega = u\, dv$. Allora

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= du \wedge dv(X, Y) = du(X)dv(Y) - du(Y)dv(X) = X(u)Y(v) - X(v)Y(u) \\ &= X(u)Y(v) + uX\big(Y(v)\big) - Y(u)X(v) - uY\big(X(v)\big) - u\Big(X\big(Y(v)\big) - Y\big(X(v)\big)\Big) \\ &= X\big(uY(v)\big) - Y\big(uX(v)\big) - u[X, Y](v) \\ &= X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega([X, Y]), \end{aligned}$$

e abbiamo finito. □

Definizione 3.5.2: L'applicazione lineare $d\colon A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ la cui esistenza è dimostrata nel Teorema 3.5.1 è detta *differenziale esterno* di M.

Esercizio 3.5.2. Sia M una varietà, e $\omega \in A^r(M)$. Dimostra che

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{r+1}) = &\sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} X_j\big(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{r+1})\big) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{r+1}\big), \end{aligned}$$

per ogni $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathcal{T}(M)$, dove l'accento circonflesso indica elementi omessi dalla lista.

Esercizio 3.5.3. Sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un riferimento locale per il fibrato tangente TM di una n-varietà M sopra un aperto U, e indichiamo con $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}$ il riferimento locale duale di T^*M sopra U. Siano inoltre $c_{ij}^k \in C^\infty(U)$ tali che

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k E_k$$

per i, j, $k = 1, \ldots, n$. Dimostra che

$$d\epsilon^k = -\sum_{i,j=1}^n c_{ij}^k\, \epsilon^i \wedge \epsilon^j$$

per $k = 1, \ldots, n$.

Definizione 3.5.3: Diremo che una k-forma $\omega \in A^k(M)$ è *chiusa* se $d\omega = O$; diremo che è *esatta* se esiste una $(k-1)$-forma $\eta \in A^{k-1}(M)$ tale che $d\eta = \omega$. Indicheremo con $Z^k(M)$ il sottospazio delle k-forme chiuse, e con $B^k(M)$ il sottospazio delle k-forme esatte. Siccome $d \circ d \equiv O$, ogni forma esatta è chiusa, cioè $B^k(M) \subseteq Z^k(M)$. Il *k-esimo gruppo di coomologia di de Rham* della varietà M è allora definito come il quoziente $H_{dR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$.

Un risultato fondamentale che non dimostreremo è il *Teorema di de Rham,* che dice che i gruppi di coomologia di de Rham sono degli invarianti topologici della varietà:

Teorema 3.5.2: (de Rham) *Per ogni varietà M e ogni $k \in \mathbb{N}$ il gruppo di coomologia di de Rham $H^k_{dR}(M)$ è canonicamente isomorfo al k-esimo gruppo di coomologia singolare $H^k(M;\mathbb{R})$ di M a coefficienti in $\mathbb{R}$.*

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi che mostrano come introdurre il concetto di distribuzione liscia involutiva usando le forme differenziali invece dei campi vettoriali.

Esercizio 3.5.4. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{D}$ è liscia se e solo se per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno U di p e $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(U)$ tali che

$$\mathcal{D}_q = \mathrm{Ker}\omega^1_q \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\omega^{n-k}_q \tag{3.5.2}$$

per ogni $q \in U$.

Definizione 3.5.4: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M, e $U \subseteq M$ aperto. Ogni $(n-k)$-upla di 1-forme $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(M)$ che soddisfano (3.5.2) saranno dette *forme di definizione locali* per $\mathcal{D}$. Diremo inoltre che una p-forma $\eta \in A^p(M)$ *annichila* $\mathcal{D}$ se $\eta(X_1, \ldots, X_p) \equiv O$ per ogni $X_1, \ldots, X_p \in caT_{\mathcal{D}}(M)$. Indicheremo con $\mathcal{I}^p_M(\mathcal{D}) \subseteq A^p(M)$ il sottospazio delle p-forme che annichilano $\mathcal{D}$, e porremo $\mathcal{I}_M(\mathcal{D}) = \mathcal{I}^0_M(\mathcal{D}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}^n_M(\mathcal{D})$.

Esercizio 3.5.5. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che una p-forma $\eta \in A^p(M)$ annichila $\mathcal{D}$ se e solo se ogni volta che esistono delle forme di definizione locali $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(U)$ per $\mathcal{D}$ su un aperto $U \subseteq M$ allora

$$\eta|_U = \sum_{i=1}^{n-k} \omega^i \wedge \beta^i$$

per opportune $(p-1)$-forme $\beta^1, \ldots, \beta^{n-k} \in A^{p-1}(U)$.

Esercizio 3.5.6. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se per ogni aperto $U \subseteq M$ si ha $d\big(\mathcal{I}^1_U(\mathcal{D})\big) \subseteq \mathcal{I}^2_U(\mathcal{D})$.

Esercizio 3.5.7. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{D}$ è involutivo se e solo se per ogni aperto $U \subseteq M$ e ogni $(n-k)$-upla di forme di definizione locali $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(U)$ per $\mathcal{D}$ sopra U esistono delle 1-forme $\alpha^i_j \in A^1(U)$ tali che

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-k} \omega^j \wedge \alpha^i_j$$

per $i = 1, \ldots, n-k$.

Definizione 3.5.5: Un *ideale* di $A^\bullet(M)$ è un sottospazio vettoriale $\mathcal{I} \subseteq A^\bullet(M)$ tale che $\omega \wedge \eta \in \mathcal{I}$ per ogni $\omega \in A^\bullet(M)$ e ogni $\eta \in \mathcal{I}$.

Esercizio 3.5.8. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{I}_M(\mathcal{D})$ è un ideale di $A^\bullet(M)$, e che $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se $d\big(\mathcal{I}_M(\mathcal{D})\big) \subseteq \mathcal{I}_M(\mathcal{D})$.

3.6 Orientabilità

Scopo di questo paragrafo è dare una definizione di orientabilità adatta a varietà di dimensione qualunque.

Definizione 3.6.1: Diremo che una varietà connessa M è *orientabile* se esiste una n-forma $\nu \in A^n(M)$ che non si annulla mai. Diremo che due n-forme mai nulle ν_1, $\nu_2 \in A^n(M)$ *determinano la stessa orientazione* se esiste una funzione $f \in C^\infty(M)$ sempre positiva tale che $\nu_2 = f\nu_1$. Una n-forma mai nulla su M è detta *forma* (o *elemento*) *di volume* di M. Una varietà su cui sia stata fissata una forma di volume è detta *varietà orientata*.

Definizione 3.6.2: Sia M una varietà orientata da una forma di volume $\nu \in A^n(M)$. Diremo che una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di T_pM è *positiva* se $\nu_p(v_1, \dots, v_n) > 0$; *negativa* altrimenti (nota che $\nu_p(v_1, \dots, v_n)$ è necessariamente diverso da zero; perché?). Una carta (U, φ) sarà detta *orientata* se esiste una funzione $f \in C^\infty(U)$ sempre positiva tale che $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = f\,\nu|_U$, dove $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ come al solito. In altre parole, (U, φ) è orientata se e solo se $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ è una base positiva di T_pM per ogni $p \in U$ (perché?).

Definizione 3.6.3: Diremo che due carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) di una varietà M sono *equiorientate* se il determinante del differenziale del cambiamento di coordinate $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è positivo in tutti i punti di $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è *orientato* se ogni coppia di carte in $\mathcal{A}$ è equiorientata.

Proposizione 3.6.1: *Sia M una varietà connessa n-dimensionale. Allora M è orientabile se e solo se ammette un atlante orientato.*

Dimostrazione: Supponiamo che M sia orientabile, e sia $\nu \in A^n(M)$ una n-forma mai nulla. Prendiamo un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ con ciascun U_α connesso. Allora $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n \in A^n(U_\alpha)$ è una n-forma locale mai nulla; siccome $\bigwedge^n M$ ha rango 1, deve esistere una funzione $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ mai nulla tale che $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = f_\alpha\,\nu|_{U_\alpha}$. Essendo U_α connesso, la funzione f_α ha segno costante; quindi a meno di modificare φ_α scambiando le ultime due coordinate possiamo supporre che tutte le f_α siano positive. Vogliamo dimostrare che l'atlante $\mathcal{A}$ così ottenuto è orientato. Infatti l'Esempio 3.2.3 ci dà

$$f_\alpha\,\nu|_{U_\alpha \cap U_\beta} = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) f_\beta\,\nu|_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

per cui $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ e dunque $\det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) > 0$ come voluto.

Viceversa, sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato, e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a questo atlante. Poniamo

$$\nu = \sum_\alpha \rho_\alpha\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Le proprietà delle partizioni dell'unità ci assicurano (perché) che $\nu \in A^n(M)$ è globalmente definita; dobbiamo dimostrare che non è mai nulla. Ora, ciascuna $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ non si annulla mai; inoltre

$$dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n$$

su $U_\alpha \cap U_\beta$, per cui $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ e $dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n$ differiscono per un fattore moltiplicativo strettamente positivo in quanto l'atlante è orientato. Quindi nell'intorno di ogni punto ν è somma di un numero finito di termini che sono tutti un multiplo positivo l'uno dell'altro, per cui ν non si può mai annullare. □

Dunque una varietà è orientabile se e solo se possiamo orientare coerentemente tutti gli spazi tangenti.

ESEMPIO 3.6.1. Una varietà con un atlante costituito da una sola carta (esempio: un grafico) o da due carte che abbiano intersezione connessa (esempio: la sfera) è chiaramente orientabile.

Esercizio 3.6.1. Sia $F\colon M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà di dimensione n. Dimostra che se $\nu \in \mathcal{A}^n(N)$ è una forma di volume su N allora $F^*\nu$ è una forma di volume su M.

Definizione 3.6.4: Sia $F\colon M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà orientate. Diremo che F *conserva l'orientazione* se $F^*\nu$ determina l'orientazione data su M per ogni forma di volume $\nu \in A^n(N)$ che determina l'orientazione data su N; altrimenti diremo che F *inverte l'orientazione.*

Esercizio 3.6.2. Sia $F\colon M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà orientate. Dimostra che F conserva l'orientazione se e solo se $\det \mathrm{Jac}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) > 0$ per ogni carta orientata (U, φ) di M e ogni carta orientata (V, ψ) di N tali che $F(U) \subseteq V$.

Esercizio 3.6.3. Sia $F\colon M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà orientate di dimensione n. Dimostra che F conserva l'orientazione se e solo se per ogni $p \in M$ l'immagine tramite dF_p di una base positiva di T_pM è una base positiva di $T_{F(p)}N$.

Esercizio 3.6.4. Dimostra che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è orientabile se e solo se n è dispari.

Esercizio 3.6.5. Dimostra che il prodotto di due varietà orientabili è orientabile.

Esercizio 3.6.6. Sia M una varietà tale che TM sia il fibrato banale. Dimostra che M è orientabile.

Esercizio 3.6.7. Posto $I = [0,1]$, sia $p: I \to S^1$ data da $p(t) = e^{2\pi i t}$. Indichiamo inoltre con $\pi_1: I \times \mathbb{R} \to I$ la proiezione sul primo fattore. Sia $\sim$ la relazione d'equivalenza su $I \times \mathbb{R}$ che identifica i punti $(0, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ con i punti $(1, -y) \in \{1\} \times \mathbb{R}$. Poniamo $E = (I \times \mathbb{R})/\sim$. Siccome $p \circ \pi_1: I \times \mathbb{R} \to S^1$ è costante sulle classi d'equivalenza di $\sim$, otteniamo un'applicazione continua surgettiva $\pi: E \to S^1$. Dimostra che questo è un fibrato vettoriale di rango 1 su S^1 (detto *fibrato di Möbius*), che E è una varietà non orientabile, e deduci che E non è un fibrato banale.

Non tutte le varietà connesse sono orientabili (vedi gli Esercizi 3.6.4 e 3.6.7). Esiste però una procedura standard per ottenere una varietà orientabile a partire da una non orientabile:

Proposizione 3.6.2: *Sia M una varietà connessa non orientabile. Allora esiste un rivestimento liscio a due fogli $\pi: \tilde{M} \to M$ tale che $\tilde{M}$ sia una varietà connessa orientabile. Inoltre il gruppo di automorfismi del rivestimento è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, e se $F: \tilde{M} \to \tilde{M}$ è l'automorfismo diverso dall'identità allora F inverte l'orientazione di $\tilde{M}$.*

Dimostrazione: Per ogni $p \in M$ indichiamo con $+_p$ e $-_p$ le due possibili orientazioni su T_pM; inoltre, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di T_pM indichiamo con $[e_1 \ldots e_n]$ l'orientazione indotta da questa base. Infine, indichiamo con $\tilde{M}$ l'unione disgiunta delle coppie $(p, +_p)$ e $(p, -_p)$, cioè

$$\tilde{M} = \bigcup_{p \in M} \{(p, +_p), (p, -_p)\},$$

e sia $\pi: \tilde{M} \to M$ data da $\pi(p, \pm_p) = p$. Vogliamo definire su $\tilde{M}$ una struttura di varietà soddisfacente le richieste.

Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di M tale che ogni U_α sia connesso, e tale che per ogni $p \in M$ esistano due carte locali $(U_\alpha, \partial_\alpha)$, $(U_{\alpha'}, \partial_{\alpha'}) \in \mathcal{A}$ in p tali che $[\partial_{1,\alpha}|_p \ldots \partial_{n,\alpha}|_p] = +_p$ e $[\partial_{1,\alpha'}|_p \ldots \partial_{n,\alpha'}|_p] = -_p$. Per ogni $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ definiamo $\psi_\alpha: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \tilde{M}$ ponendo

$$\psi_\alpha(x) = \left(\varphi_\alpha^{-1}(x), [\partial_{1,\alpha}|_{\varphi_\alpha^{-1}(x)} \ldots \partial_{n,\alpha}|_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}]\right),$$

dove $p = \varphi_\alpha^{-1}(x)$. Ogni ψ_α è chiaramente iniettiva; la sua inversa è data da $\tilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha \circ \pi$, definita su $\tilde{U}_\alpha = \psi_\alpha\bigl(\varphi_\alpha(U_\alpha)\bigr)$. Allora $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$ è un atlante su $\tilde{M}$. Infatti, copre $\tilde{M}$ per l'ipotesi su $\mathcal{A}$, e le carte sono compatibili in quanto

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1} = \varphi_\alpha \circ \pi \circ \psi_\beta = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

Siccome $\varphi_\alpha \circ \pi \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} = \mathrm{id}$, la proiezione π è differenziabile e chiaramente surgettiva. Inoltre se $-\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{M}$ è definito da $(p, \pm_p) \in -\tilde{U}_\alpha$ se e solo se $(p, \mp_p) \in \tilde{U}_\alpha$, allora $\pi^{-1}(U_\alpha) = \tilde{U}_\alpha \cup (-\tilde{U}_\alpha)$, e π ristretto sia a $\tilde{U}_\alpha$ che a $-\tilde{U}_\alpha$ è un diffeomorfismo con U_α; quindi π è un rivestimento a due fogli.

Ora, se $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta \neq \varnothing$ allora $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ e in ogni punto di $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha $[\partial_{1,\alpha} \ldots \partial_{n,\alpha}] = [\partial_{1,\beta} \ldots \partial_{n,\beta}]$, per cui

$$\det \mathrm{Jac}(\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}) = \det \mathrm{Jac}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0,$$

e quindi $\tilde{A}$ è orientato.

Se $\tilde{M}$ non fosse connessa, la restrizione di π a ciascuna componente connessa sarebbe un rivestimento a un foglio, cioè un diffeomorfismo, e M sarebbe orientabile, contraddizione.

Essendo π un rivestimento a due fogli, il gruppo di automorfismi di π è necessariamente $\mathbb{Z}_2$. L'automorfismo F è dato da $F(p, \pm_p) = (p, \mp_p)$, e si verifica subito che F inverte l'orientazione. Infatti, preso $p \in M$, sia (U, φ) una carta in p tale che $[\partial_1 \ldots \partial_n] = +_p$, e indichiamo con (U, φ^-) la carta ottenuta invertendo le ultime due coordinate di φ. Allora

$$\tilde{\varphi}^- \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x) = \tilde{\varphi}^- \circ F\bigl(\varphi^{-1}(x), +_{\varphi^{-1}(x)}\bigr) = \tilde{\varphi}^-\bigl(\varphi^{-1}(x), -_{\varphi^{-1}(x)}\bigr) = \varphi^- \circ \varphi^{-1}(x) = (x^1, \ldots, x^n, x^{n-1}),$$

e la tesi segue dall'Esercizio 3.6.2. □

Corollario 3.6.3: *Ogni varietà connessa semplicemente connessa è orientabile.*

Dimostrazione: Se non fosse orientabile, per la proposizione precedente dovrebbe avere un rivestimento a due fogli e quindi non potrebbe essere semplicemente connessa. □

Esercizio 3.6.8. Sia M una varietà connessa di dimensione 1. Dimostra che M è necessariamente diffeomorfa a $\mathbb{R}$ oppure a S^1 nel seguente modo:

(i) Dimostra la tesi quando M è orientabile costruendo un campo vettoriale su M mai nullo e applicando l'Esercizio 3.3.1.
(ii) Dimostra che M è sempre orientabile, facendo vedere che il suo rivestimento universale è diffeomorfo a $\mathbb{R}$ e che ogni diffeomorfismo di $\mathbb{R}$ che inverte l'orientazione ha necessariamente un punto fisso.

Il motivo per cui una n-forma mai nulla si chiama forma di volume è che permette di integrare delle funzioni a supporto compatto su una varietà. Questo perché, come discuteremo fra un attimo, su una varietà orientata di dimensione n è sempre possibile integrare n-forme a supporto compatto; e allora se ν è una forma di volume e g è una funzione a supporto compatto, possiamo definire l'integrale di g come l'integrale di $g\nu$.

Ma andiamo per gradi.

Lemma 3.6.4: *Sia M una varietà n-dimensionale orientata, e $\omega \in A^n(M)$ una n-forma a supporto compatto. Supponiamo di avere due carte orientate (U,φ) e $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ tali che il supporto di ω sia contenuto in $U \cap \tilde{U}$. Allora*

$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega.$$

Dimostrazione: Ricordo che se $\eta = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ è una n-forma con supporto compatto in un aperto V di $\mathbb{R}^n$ abbiamo per definizione

$$\int_V \eta = \int_V f\,dx^1 \cdots dx^n,$$

dove a secondo membro abbiamo l'usuale integrale di Lebesgue.

Scriviamo allora $(\varphi^{-1})^*\omega = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ e $(\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = \tilde{f}\,d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n$, per opportune funzioni $f \in C^\infty\big(\varphi(U)\big)$ e $\tilde{f} \in C^\infty\big(\tilde{\varphi}(U)\big)$. Siccome

$$(\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^*(\varphi^{-1})^*\omega,$$

troviamo

$$\tilde{f} = f \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \det \mathrm{Jac}(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}).$$

Siccome le carte sono orientate, abbiamo $\det \mathrm{Jac}(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}) > 0$, per cui la formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli ci dà

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega &= \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} \tilde{f}\,d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \\
&= \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} f \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \det \mathrm{Jac}(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})\, d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \\
&= \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} f \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \big|\det \mathrm{Jac}(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})\big|\, d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \\
&= \int_{\varphi(U\cap\tilde{U})} f\,dx^1 \cdots dx^n = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.
\end{aligned}$$

□

Quindi se $\omega \in A^n(M)$ è una n-forma con supporto compatto contenuto nel dominio di una carta orientata (U,φ) qualsiasi, possiamo definire $\int_M \omega$ ponendo

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.$$

La definizione dell'integrale per forme a supporto compatto qualunque si ottiene allora usando le partizioni dell'unità:

Lemma 3.6.5: *Sia M una varietà n-dimensionale orientata, e scegliamo un atlante orientato $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinata a questo atlante. Allora per ogni n-forma $\omega \in A^n(M)$ a supporto compatto il numero*

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega \tag{3.6.1}$$

non dipende né dall'atlante orientato scelto né dalla partizione dell'unità scelta.

Dimostrazione: Prima di tutto notiamo che siccome il supporto di ω è compatto, e i supporti delle funzioni della partizione dell'unità formano un ricoprimento localmente finito, la somma in (3.6.1) contiene solo un numero finito di termini non nulli, per cui è ben definita.

Sia $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\beta, \tilde{\varphi}_\beta)\}$ un altro atlante orientato di M, e $\{\tilde{\rho}_\beta\}$ una partizione dell'unità a lui subordinata. Per ogni α abbiamo

$$\int_M \rho_\alpha \omega = \int_M \left(\sum_\beta \tilde{\rho}_\beta \right) \rho_\alpha \omega = \sum_\beta \int_M \tilde{\rho}_\beta \rho_\alpha \omega,$$

e sommando su α otteniamo

$$\sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_M \tilde{\rho}_\beta \rho_\alpha \omega.$$

L'integrando di ciascun addendo a secondo membro ha supporto compatto contenuto nel dominio di una singola carta (U_α oppure $\tilde{U}_\beta$, per esempio), per cui il valore di ciascun addendo non dipende dalla carta usata per calcolarlo.

In maniera analoga otteniamo

$$\sum_\beta \int_M \tilde{\rho}_\beta \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_M \rho_\alpha \tilde{\rho}_\beta \omega,$$

e la tesi segue. □

Definizione 3.6.5: Sia M una varietà orientata n-dimensionale. L'*integrale* $\int_M \omega$ di una n-forma $\omega \in A^n(M)$ a supporto compatto su M è definito dalla formula (3.6.1). In particolare, se $\nu \in A^n(M)$ è una forma di volume per M e $f \in C^\infty(M)$ è a supporto compatto, poniamo

$$\int_M f = \int_M f\,\nu.$$

Se M è compatta, diremo *ν-volume* di M il numero $\mathrm{vol}_\nu(M) = \int_M \nu$.

Non posso concludere questo capitolo senza citare un caso particolare (ma particolarmente importante) del fondamentale *Teorema di Stokes:*

Teorema 3.6.6: (Stokes) *Sia M una varietà compatta orientata n-dimensionale, e $\eta \in A^{n-1}(M)$. Allora*

$$\int_M d\eta = 0.$$

In generale, si può definire il concetto di varietà con bordo in modo che il bordo ∂M di una varietà M con bordo n-dimensionale orientata sia una varietà (senza bordo) orientata $(n-1)$-dimensionale. Allora il Teorema di Stokes generale dice che

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$$

per ogni $(n-1)$-forma η a supporto compatto in M.

Capitolo 4

Metriche Riemanniane

4.1 Definizioni

Introduciamo ora la vera protagonista di questo corso.

Definizione 4.1.1: Una *metrica Riemanniana* su una varietà M è un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ *simmetrico* (cioè tale che $g_p(w,v) = g_p(v,w)$ per ogni v, $w \in T_pM$ e $p \in M$) e *definito positivo* (cioè $g(v,v) > 0$ per ogni $v \neq O$). La coppia (M,g) è detta *varietà Riemanniana*. Spesso useremo anche la notazione $\langle v, w\rangle_p$ al posto di $g_p(v,w)$, e indicheremo con $\|\cdot\|_p$ la norma su T_pM indotta dal prodotto scalare g_p.

In altre parole, una metrica Riemanniana associa a ogni punto $p \in M$ un prodotto scalare definito positivo $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ che dipende in modo C^∞ dal punto p.

Osservazione 4.1.1. Ci sono alcune situazioni (per esempio in relatività) in cui è utile studiare varietà equipaggiate con un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simmetrico *non-degenere* (cioè tale che $g_p(v,w) = 0$ per ogni $w \in T_pM$ se e solo se $v = O_p$). Diversi dei risultati di questo capitolo (per esempio la costruzione della connessione di Levi-Civita nel paragrafo 4) sono validi anche in questa situazione più generale; indicheremo esplicitamente i casi più significativi.

Esercizio 4.1.1. Sia M una varietà, e supponiamo di avere per ogni $p \in M$ un prodotto scalare definito positivo $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Dimostra che g è una metrica Riemanniana se e solo se $p \mapsto g_p\big(X(p), Y(p)\big)$ è di classe C^∞ per ogni X, $Y \in \mathcal{T}(M)$.

Vediamo come si esprime una metrica Riemanniana (o, più in generale, un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simmetrico) in coordinate locali. Fissata una carta locale (U,φ), indichiamo con $(x^1,\ldots,x^n)$ le corrispondenti coordinate locali, e con $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ il corrispondente riferimento locale di TM. Allora possiamo definire delle funzioni $g_{hk} \in C^\infty(U)$ ponendo $g_{hk} = g(\partial_h, \partial_k)$; e chiaramente abbiamo

$$g = \sum_{h,k=1}^{n} g_{hk}\, dx^h \otimes dx^k. \tag{4.1.1}$$

Inoltre, la matrice simmetrica (g_{hk}) è non-degenere se e solo se g è non-degenere, ed è definita positiva se e solo se g è definita positiva.

Osservazione 4.1.2. D'ora in poi useremo la *convenzione di Einstein* sugli indici ripetuti: se lo stesso indice appare due volte in una formula, una volta in basso e una volta in alto, supporremo sottintesa una sommatoria su tutti i possibili valori di quell'indice. Per esempio, la (4.1.1) verrà scritta

$$g = g_{hk}\, dx^h \otimes dx^k,$$

sottintendendo la sommatoria su h e k che variano da 1 a n. Vale la pena avvertire che in alcuni testi si trova scritto $dx^h\, dx^k$ invece di $dx^h \otimes dx^k$, e in particolare $(dx^j)^2$ invece di $dx^j \otimes dx^j$. Infine, la matrice inversa della matrice (g_{hk}) sarà indicata con (g^{hk}), in modo da avere

$$g_{hj}g^{jk} = g^{kj}g_{jh} = \delta_h^k,$$

dove δ_h^k è, come sempre, il delta di Kronecker.

Esempio 4.1.1. $\mathbb{R}^n$ *con la metrica euclidea.* Identificando come al solito $T_p\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, possiamo mettere su ciascuno spazio tangente il prodotto scalare canonico. In questo modo otteniamo una metrica Riemanniana su $\mathbb{R}^n$, detta *metrica euclidea* o *metrica piatta* su $\mathbb{R}^n$, data da

$$g_0 = \delta_{hk}\, dx^h \otimes dx^k = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n.$$

Usando le partizioni dell'unità e la metrica piatta è facile dimostrare l'esistenza di metriche Riemanniane su qualsiasi varietà:

Proposizione 4.1.1: *Ogni varietà M (di Hausdorff a base numerabile) ammette una metrica Riemanniana.*

Dimostrazione: Sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M. Su ciascun aperto U_α introduciamo la metrica piatta g^α indotta dal sistema di coordinate: se $p \in U_\alpha$, e $v = v^j \partial_{j,\alpha}$ e $w = w^j \partial_{j,\alpha}$ è la scrittura in coordinate locali di due vettori $v, w \in T_pM$, allora poniamo $g^\alpha_p(v, w) = \sum_j v^j w^j$ (in altre parole, la matrice (g^α_{hk}) è la matrice identica). Definiamo allora un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ con

$$\forall p \in M \qquad g_p = \sum_\alpha \rho_\alpha(p) g^\alpha_p,$$

dove in ciascun punto $p \in M$ solo un numero finito di addendi sono diversi da zero. È facile verificare (esercizio) che questa formula definisce una metrica Riemanniana su M, in quanto la somma di tensori simmetrici definiti positivi è ancora un campo tensoriale simmetrico definito positivo. □

Osservazione 4.1.3. Sia (g_{hk}) la matrice che rappresenta una metrica Riemanniana g rispetto alla carta locale (U, φ), e $(\tilde{g}_{ij})$ la matrice che rappresenta g rispetto a un'altra carta locale $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$. Ricordando la (2.4.2) e la formula che mostra come cambia la matrice che rappresenta un prodotto scalare cambiando base otteniamo

$$(\tilde{g}_{ij}) = \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)^T \cdot (g_{hk}) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)$$

in $U \cap \tilde{U}$, dove il $\cdot$ indica il prodotto di matrici. In altre parole abbiamo

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^h}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}\, g_{hk}.$$

In particolare,

$$\det(\tilde{g}_{ij}) = \left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)\right]^2 \det(g_{hk}). \tag{4.1.2}$$

Osservazione 4.1.4. Sia (U, φ) una carta locale in una varietà Riemanniana (M, g). Se applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt al riferimento locale $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ otteniamo un riferimento locale ortonormale $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Attenzione: di solito però *non* è possibile trovare una carta locale (U, φ) tale che il riferimento $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ sia ortonormale in U. Infatti, come vedremo nel paragrafo 6.1, questo è equivalente a richiedere che la varietà Riemanniana sia piatta in U.

Descriviamo ora alcune costruzioni standard che si possono effettuare usando una metrica Riemanniana. Cominciamo con la

Proposizione 4.1.2: *Sia (M, g) una varietà Riemanniana orientabile, e fissiamo un'orientazione. Allora esiste un'unica n-forma $\nu_g \in A^n(M)$ mai nulla tale che $\nu_g(E_1, \ldots, E_n) = 1$ per ogni $p \in M$ e ogni base ortonormale positiva $\{E_1, \ldots, E_n\}$ di T_pM.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato, e indichiamo con (g^α_{ij}) la matrice che rappresenta g nelle coordinate di φ_α. Sia poi $\mathcal{B} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ una riferimento locale ortonormale positivo di TM sopra U; se poniamo $dx^h_\alpha(E_k) = e^h_k$ allora abbiamo $E_k = e^h_k \partial_h$, e quindi $\det(e^h_k) > 0$ (perché $\mathcal{B}$ è positiva), e $g^\alpha_{ij} e^i_h e^j_k = \delta_{hk}$ (perché $\mathcal{B}$ è ortonormale), per cui

$$\sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}\, \det(e^h_k) = 1. \tag{4.1.3}$$

Supponiamo che esista una $\nu \in A^n(M)$ che soddisfa le ipotesi. Per ogni indice α esiste una $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ tale che $\nu|_{U_\alpha} = f_\alpha\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$. Ma allora

$$1 = \nu(E_1, \ldots, E_n) = f_\alpha \det(e_k^h) = \frac{f_\alpha}{\sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)}},$$

per cui necessariamente $f_\alpha = \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)}$, e ν è unica.

Viceversa, poniamo

$$\nu_g|_{U_\alpha} = \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)}\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Questa formula definisce una n-forma globale: infatti su $U_\alpha \cap U_\beta$ (4.1.2) dà

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(g_{ij}^\beta)}\, dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n &= \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)} \det\left(\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^h}\right) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n \\ &= \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)}\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.\end{aligned}$$

Chiaramente, ν_g non si annulla mai. Infine, ν_g è come richiesto: infatti, se $\mathcal{B} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ è una base ortonormale positiva di T_pM con $p \in U_\alpha$, (4.1.3) implica

$$\nu_g(E_1, \ldots, E_n) = \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)} \det\bigl(dx^h(E_k)\bigr) = \sqrt{\det(g_{ij}^\alpha)} \det(e_k^h) = 1.$$

□

Definizione 4.1.2: Sia (M, g) una varietà Riemanniana orientabile. La n-forma $\nu_g \in A^n(M)$ è detta *elemento di volume Riemanniano* di M.

Prtoseguiamo con altre costruzioni. Un prodotto scalare non degenere su uno spazio vettoriale V permette di identificare V col suo duale V^*. Analogamente, su una varietà Riemanniana abbiamo un isomorfismo naturale ${}^\flat\colon TM \to T^*M$ definito in questo modo

$$\forall v \in T_pM \qquad\qquad v^\flat = g_p(\cdot, v) \in T_p^*M.$$

In coordinate locali, se $v = v^i \partial_i$ e $g = (g_{ij})$ allora

$$v^\flat = g_{ij} v^i\, dx^j,$$

cioè $v^\flat = \omega_j\, dx^j$ con $\omega_j = g_{ij} v^i$.

La mappa inversa sarà denotata da ${}^\#\colon T^*M \to TM$; se $\omega = \omega_i\, dx^i$ allora

$$\omega^\# = g^{ij} \omega_i\, \partial_j,$$

cioè $\omega^\# = v^j \partial_j$ con $v^j = g^{ij} \omega_i$.

Osservazione 4.1.5. Il motivo della notazione musicale è che $\flat$ abbassa gli indici mentre $\#$ li alza.

Definizione 4.1.3: Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e $f \in C^\infty(M)$. Allora il *gradiente* di f è il campo vettoriale $\mathrm{grad} f = (df)^\# \in \mathcal{T}(M)$.

In coordinate locali,

$$\mathrm{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, \partial_i,$$

per cui su $\mathbb{R}^n$ con la metrica piatta recuperiamo il gradiente usuale.

Definizione 4.1.4: Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà Riemanniana (M, g). Allora il *rotore* di X è la 2-forma differenziale $\operatorname{rot} X = dX^\flat$.

In particolare abbiamo
$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = d\big((df)^\#\big)^\flat = d(df) = O.$$
In coordinate locali, se $X = X^k \partial_k$ allora
$$\operatorname{rot} X = \frac{\partial(g_{ik}X^i)}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^k = \sum_{1 \le j < k \le n} \left[\frac{\partial(g_{ik}X^i)}{\partial x^j} - \frac{\partial(g_{ij}X^j)}{\partial x^k} \right] dx^j \wedge dx^k.$$

Osservazione 4.1.6. Su $\mathbb{R}^3$, il fibrato $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ è un fibrato banale di rango 3, per cui è isomorfo a $T\mathbb{R}^3$, che è anch'esso un fibrato banale di rango 3. Per questo motivo nell'Analisi Matematica usuale il rotore di un campo vettoriale (calcolato rispetto alla metrica piatta di $\mathbb{R}^3$) viene presentato come un campo vettoriale e non come una 2-forma, per lo stesso motivo per cui il prodotto estero di due vettori in R^3 viene presentato come un vettore di $\mathbb{R}^3$ (il prodotto vettore: confronta l'Esercizio 1.3.19).

Come prevedibile, le applicazioni che conservano una metrica Riemanniana hanno un nome particolare.

Definizione 4.1.5: Sia $H\colon (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ un'applicazione C^∞ fra due varietà Riemanniane della stessa dimensione. Diremo che H è un'*isometria in* $p \in M_1$ se per ogni v, $w \in T_pM_1$ si ha
$$\tilde{g}_{H(p)}\big(dH_p(v), dH_p(w)\big) = g_p(v, w).$$
Se H è un'isometria in p, il differenziale di H in p è invertibile, e quindi H è un diffeomorfismo di un intorno di p con un intorno di $H(p)$. Diremo che H è un'*isometria locale* in $p \in M$ se p ha un intorno U tale che $H|_U$ sia un'isometria in ogni punto di U; e che è un'*isometria locale* se lo è in ogni punto di M. Infine, diremo che H è un'*isometria* se è un diffeomorfismo globale e un'isometria in ogni punto di M. Data una varietà Riemanniana (M, g), indicheremo con $\operatorname{Iso}(M)$ il gruppo di tutte le isometrie di M con se stessa.

Definizione 4.1.6: Diremo che la varietà Riemanniana (M, g) è *localmente isometrica* alla varietà Riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{g})$ se per ogni $p \in M$ esiste un'isometria di un intorno di p in M con un aperto di $\tilde{M}$. Infine, diremo che (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ sono *isometriche* se esiste un'isometria globale fra (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

Esercizio 4.1.2. Dimostra che un'applicazione $H\colon (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ di classe C^∞ fra varietà Riemanniane è un'isometria locale se e solo se è un'isometria in ogni punto di M.

Esercizio 4.1.3. Costruisci un esempio di un'isometria locale che non sia un'isometria.

Più in generale, un'immersione in una varietà Riemanniana induce una metrica Riemanniana anche nella varietà di partenza.

Definizione 4.1.7: Sia $F\colon M \to N$ un'immersione, e g una metrica Riemanniana su N. Definiamo per ogni $p \in M$ un prodotto scalare $(F^*g)_p$ su T_pM ponendo
$$\forall v, w \in T_pM \qquad (F^*g)_p(v, w) = g_{F(p)}\big(dF_p(v), dF_p(w)\big).$$
È facile verificare (esercizio) che F^*g è una metrica Riemanniana su M, detta *metrica indotta* da g tramite F, o *metrica pullback.*

Esempio 4.1.2. Se $\iota\colon M \to N$ è una sottovarietà di una varietà Riemanniana (N, g), la metrica indotta ι^*g verrà a volte indicata con $g|_S$. Dunque ogni sottovarietà di una varietà Riemanniana è a sua volta una varietà Riemanniana con la metrica indotta; per esempio, questo vale per le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ considerato con la metrica piatta.

Abbiamo visto (Teorema 2.5.6) che ogni varietà può essere realizzata come sottovarietà chiusa di un qualche $\mathbb{R}^N$, per N abbastanza grande, e quindi eredita una metrica Riemanniana indotta dalla metrica piatta di $\mathbb{R}^N$. Viene allora naturale chiedersi se in questo modo è possibile ottenere tutte le varietà Riemanniane. La risposta, positiva, è il famoso Teorema di Nash:

Teorema 4.1.3: (Nash, 1956) *Ogni varietà Riemanniana ammette un embedding isometrico in $\mathbb{R}^N$, considerato con la metrica piatta, per N abbastanza grande.*

Esempio 4.1.3. Sia $\pi\colon \tilde{M} \to M$ un rivestimento liscio, e supponiamo di avere una metrica Riemanniana g su M. Un rivestimento liscio è, in particolare, un diffeomorfismo locale, e quindi un tipo molto speciale di immersione; possiamo quindi equipaggiare $\tilde{M}$ con la metrica indotta $\pi^* g$. È facile (esercizio) verificare che $\pi^* g$ è l'unica metrica Riemanniana su $\tilde{M}$ che rende π un'isometria locale.

Esempio 4.1.4. Sia $\pi\colon \tilde{M} \to M$ di nuovo un rivestimento liscio, ma supponiamo stavolta di avere una metrica Riemanniana $\tilde{g}$ su $\tilde{M}$. Non è detto che esista una metrica Riemanniana g su M che rende π un'isometria locale. Infatti, supponiamo che g esista, e sia $F\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ un automorfismo del rivestimento, cioè un'applicazione continua tale che $\pi \circ F = \pi$; nota che F è automaticamente C^∞ (perché?). Allora per ogni $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e ogni v, $w \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ si deve avere

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\tilde{p}}(v,w) &= g_{\pi(\tilde{p})}\bigl(d\pi_{\tilde{p}}(v), d\pi_{\tilde{p}}(w)\bigr) = g_{\pi(F(\tilde{p}))}\bigl(d\pi_{F(\tilde{p})}(dF_{\tilde{p}}(v)), d\pi_{F(\tilde{p})}(dF_{\tilde{p}}(w))\bigr)\\ &= \tilde{g}_{F(\tilde{p})}\bigl(dF_{\tilde{p}}(v), dF_{\tilde{p}}(w)\bigr),\end{aligned}$$

cioè F dev'essere un'isometria per $\tilde{g}$. Viceversa, supponiamo che ogni automorfismo del rivestimento sia un'isometria, e che il gruppo degli automorfismi del rivestimento agisca in maniera transitiva sulle fibre (ipotesi quest'ultima equivalente a richiedere che il rivestimento sia *normale*, cioè tale che $\pi_*\bigl(\pi_1(\tilde{M},\tilde{p})\bigr)$ sia un sottogruppo normale di $\pi_1\bigl(M,\pi(\tilde{p})\bigr)$ per un qualsiasi $\tilde{p} \in \tilde{M}$); allora non è difficile dimostrare (esercizio) che esiste un'unica metrica Riemanniana g su M per cui π risulta essere un'isometria locale: è sufficiente per ogni $p \in M$ e v, $w \in T_pM$ porre

$$g_p(v,w) = \tilde{g}_{\tilde{p}}(\tilde{v},\tilde{w}),$$

dove $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $\tilde{v}$, $\tilde{w} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ sono tali che $\pi(\tilde{p}) = p$, $d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v}) = v$ e $d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{w}) = w$.

Usando la nozione di metrica indotta possiamo esprimere in maniera concisa quando un'immersione conserva la metrica Riemanniana:

Definizione 4.1.8: Un'immersione (embedding) $F\colon (M, g^M) \to (N, g^N)$ fra varietà Riemanniane è un'*immersione (embedding) isometrica* se $F^* g^N = g^M$, dove $F^* g^N$ è la metrica indotta su M appena definita.

Esercizio 4.1.4. Costruisci due varietà Riemanniane (M,g) e $(\tilde{M},\tilde{g})$ tali che (M,g) è localmente isometrica a $(\tilde{M},\tilde{g})$ ma $(\tilde{M},\tilde{g})$ non è localmente isometrica a (M,g).

Concludiamo questo paragrafo definendo, più in generale, la nozione di metrica Riemanniana su un fibrato vettoriale.

Definizione 4.1.9: Una *metrica lungo le fibre* su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$ è l'assegnazione per ogni punto $p \in M$ di un prodotto scalare definito positivo $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_p\colon E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ tale che la funzione $p \mapsto \langle\sigma(p),\tau(p)\rangle_p$ sia di classe C^∞ per ogni coppia di sezioni σ, $\tau \in \mathcal{E}(M)$.

Una volta data una metrica Riemanniana su M otteniamo automaticamente metriche lungo le fibre su tutti i fibrati tensoriali $T^h_k M$:

Proposizione 4.1.4: *Sia (M,g) una varietà Riemanniana, e h, $k \in \mathbb{N}$. Allora esiste un'unica metrica lungo le fibre di $T^h_k M$ tale che se $\{E_1,\dots,E_n\}$ è un riferimento locale ortonormale per TM e $\{\omega^1,\dots,\omega^n\}$ è il suo riferimento duale, allora $\{E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_h}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_k}\}$ forma un riferimento locale ortonormale per $T^h_k M$.*

Dimostrazione: Sia (g_{ij}) la matrice che rappresenta g in una qualche carta locale (U,φ), e prendiamo due elementi $F = F^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_k}\,\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_h}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_k}$, $G = G^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_k}\,\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_h}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_k} \in T^h_k U$. Allora ponendo

$$\langle F, G\rangle = g^{j_1 s_1}\cdots g^{j_k s_k} g_{i_1 r_1}\cdots g_{i_h r_h} F^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_k} G^{r_1\ldots r_h}_{s_1\ldots s_k}$$

è facile verificare (esercizio) che otteniamo una metrica lungo le fibre che soddisfa le condizioni richieste. Siccome data una base esiste un unico prodotto scalare rispetto a cui detta base è ortonormale, la metrica così ottenuta è l'unica possibile. □

Esercizio 4.1.5. Dimostra che la metrica lungo le fibre così ottenuta coincide con quella che si otterrebbe applicando la Proposizione 1.2.1 alla metrica Riemanniana data su ciascun spazio tangente.

In particolare, data una metrica Riemanniana su M otteniamo una metrica lungo le fibre di T^*M, e la Proposizione 1.2.1.(iv) ci dice che le applicazioni bemolle e diesis sono allora delle isometrie rispetto a queste metriche. Possiamo verificarlo anche in coordinate locali: infatti,

$$\langle \omega^\#, \eta^\# \rangle = g_{hk} g^{ih} \omega_i g^{kj} \eta_j = g^{ij} \omega_i \eta_j = \langle \omega, \eta \rangle,$$

e analogamente si vede che

$$\langle v^\flat, w^\flat \rangle = \langle v, w \rangle.$$

4.2 Esempi

In questo paragrafo descriveremo alcuni esempi importanti di varietà Riemanniane.

Esempio 4.2.1. *La sfera.* Sia S^n_R la sfera di raggio $R > 0$ e centro l'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$. La metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$ è detta *metrica sferica.* Vogliamo calcolare i coefficienti g_{ij} della metrica sferica rispetto alle coordinate sferiche introdotte nell'Esempio 2.1.11. Il riferimento locale di $T_pS^n_R$ indotto dalle coordinate sferiche è composto dai campi vettoriali locali

$$\frac{\partial}{\partial \theta^j} = R \sin\theta^{j+1} \cdots \sin\theta^n \left[\cos\theta^j \sum_{l=0}^{j-1} \cos\theta^l \sin\theta^{l+1} \cdots \sin\theta^{j-1} \frac{\partial}{\partial x^{l+1}} - \sin\theta^j \frac{\partial}{\partial x^{j+1}} \right],$$

per $j = 1, \ldots, n$, dove $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ sono le coordinate di $\mathbb{R}^{n+1}$, e dove abbiamo posto per convenzione $\theta^0 \equiv 0$. Quindi otteniamo

$$g_{ij} = \begin{cases} R^2 (\sin\theta^{i+1} \cdots \sin\theta^n)^2 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j; \end{cases}$$

in particolare, la matrice (g_{ij}) è diagonale.

Esempio 4.2.2. Sia $\pi\colon S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il rivestimento universale dello spazio proiettivo. Allora combinando gli Esempi 4.1.4 e 4.2.1 otteniamo una metrica Riemanniana sullo spazio proiettivo.

Una caratteristica interessante della sfera è che è localmente conformemente piatta (anche se, come vedremo, non è affatto piatta).

Definizione 4.2.1: Due metriche Riemanniane g_1 e g_2 su una varietà M sono dette *conformi* se esiste una funzione $f \in C^\infty(M)$ sempre positiva tale che $g_2 = f g_1$. Due varietà Riemanniane (M_1, g_1) e (M_2, g_2) sono dette *conformemente equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $F\colon M_1 \to M_2$, detto *equivalenza conforme,* tale che F^*g_2 sia conforme a g_1. Diremo che (M_1, g_1) è *localmente conforme* a (M_2, g_2) se per ogni $p \in M_1$ esistono un intorno $U \subseteq M_1$ di p e un diffeomorfismo con l'immagine $F\colon U \to M_2$ tale che $F^*g_2|_{F(U)}$ sia conforme a $g_1|_U$. Infine, diremo che (M, g) è *localmente conformemente piatta* se è localmente conforme a $\mathbb{R}^n$ con la metrica piatta, dove $n = \dim M$.

Proposizione 4.2.1: *S^n_R è localmente conformemente piatta.*

Dimostrazione: Sia $N = (0, \ldots, 0, R) \in S^n_R$ il polo nord, e indichiamo con $\varphi_N\colon S^n_R \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la proiezione stereografica dal polo nord descritta nell'Esempio 2.1.10; vogliamo dimostrare che φ_N è un'equivalenza conforme.

Indichiamo con g_R la metrica Riemanniana su S^n_R, e con g_0 la metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$; basta far vedere che $(\varphi_N^{-1})^* g_R$ e g_0 sono conformi. Preso $x \in \mathbb{R}^n$ e $v = v^j \partial_j \in T_x\mathbb{R}^n$ dobbiamo calcolare

$$(\varphi_N^{-1})^* g_R(v, v) = g_R\big(d(\varphi_N^{-1})_x(v), d(\varphi_N^{-1})_x(v)\big) = \left\| d(\varphi_N^{-1})_x(v) \right\|^2.$$

Ora,

$$d(\varphi_N^{-1})_x(v) = v^j \frac{\partial(\varphi_N^{-1})^h}{\partial x^j}\partial_h = \frac{2R^2}{\|x\|^2+R^2}\, v - \frac{4R^2\langle v,x\rangle}{(\|x\|^2+R^2)^2}(x^h\partial_h - R\partial_{n+1});$$

quindi

$$(\varphi_N^{-1})^* g_R(v,v) = \frac{4R^4}{(\|x\|^2+R^2)^2}\,\|v\|^2,$$

cioè

$$(\varphi_N^{-1})^* g_R = \frac{4R^4}{(\|x\|^2+R^2)^2}\, g_0,$$

per cui $(\varphi_N^{-1})^* g_R$ è conforme alla metrica euclidea, come voluto. Infine, usando la proiezione stereografica rispetto al polo sud $S = -N$ si conclude la dimostrazione che S_R^n è localmente conformemente piatta. □

ESEMPIO 4.2.3. *Lo spazio iperbolico.* Introduciamo ora un altro esempio importante di varietà Riemanniana, in tre incarnazioni diverse.

(a) *L'iperboloide.* Sia $U_R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^{n+1})^2 - \|x'\|^2 = R^2, x^{n+1} > 0\}$ la falda superiore dell'iperboloide ellittico, dove $x' = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Su U_R^n introduciamo il campo tensoriale simmetrico non-degenere

$$g_R^1 = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n - dx^{n+1} \otimes dx^{n+1};$$

dimostreremo fra un attimo che g_R^1 è effettivamente definita positiva su TU_R^n, per cui è effettivamente una metrica Riemanniana.

(b) *La palla di Poincaré.* Sia $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$ la palla aperta di raggio R in $\mathbb{R}^n$. Su B_R^n poniamo la metrica

$$g_R^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - \|x\|^2)^2}\,(dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n).$$

(c) *Il semispazio superiore di Poincaré.* Sia $H_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ il semispazio superiore in $\mathbb{R}^n$. Su H_R^n poniamo la metrica

$$g_R^3 = \frac{R^2}{(x^n)^2}\,(dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n).$$

Le ultime due metriche sono chiaramente conformi alla metrica euclidea, per cui B_R^n e H_R^n sono localmente conformemente piatte. In realtà questo vale anche per U_R^n, in quanto

Proposizione 4.2.2: *Le varietà Riemanniane (U_R^n, g_R^1), (B_R^n, g_R^2) e (H_R^n, g_R^3) sono isometriche.*

Dimostrazione: Cominciamo costruendo un'isometria $F: U_R^n \to B_R^n$. Dato $S = (0,\ldots,0,-R) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $x \in U_R^n$, sia $F(x) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il punto d'intersezione fra B_R^n e la retta da S a x. Si verifica subito che

$$F(x) = \frac{R}{R + x^{n+1}}\, x' \in B_R^n,$$

e che

$$F^{-1}(p) = \left(\frac{2R^2 p}{R^2 - \|p\|^2}, R\,\frac{R^2 + \|p\|^2}{R^2 - \|p\|^2}\right).$$

Vogliamo dimostrare che $F^* g_R^2 = g_R^1$. Per far ciò ricordiamo (Proposizione 2.5.5) che $v \in T_x U_R^n$ se e solo se $x^{n+1}v^{n+1} = \langle x', v'\rangle$; inoltre,

$$dF_x(v) = \frac{R}{R + x^{n+1}}\left(v' - \frac{v^{n+1}}{R + x^{n+1}}\, x'\right).$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
F^*g^2_R(v,v) &= g^2_R\big(dF_x(v), dF_x(v)\big) = \frac{4R^4}{\big(R^2-\|F(x)\|^2\big)^2}\|dF_x(v)\|^2 \\
&= \frac{4}{\Big(1-\frac{\|x'\|^2}{(R+x^{n+1})^2}\Big)^2}\frac{R^2}{(R+x^{n+1})^2}\left\|v'-\frac{v^{n+1}}{R+x^{n+1}}x'\right\|^2 \\
&= \|v'\|^2 - \frac{2v^{n+1}}{R+x^{n+1}}\langle x',v'\rangle + \frac{|v^{n+1}|^2}{(R+x^{n+1})^2}\|x'\|^2 \\
&= \|v'\|^2 - |v^{n+1}|^2 = g^1_R(v,v),
\end{aligned}
$$

come voluto.

Costruiamo ora un diffeomorfismo $G\colon B^n_R \to H^n_R$ imitando la trasformata di Cayley di una variabile complessa:

$$
G(p) = \left(\frac{2R^2p'}{\|p'\|^2+(p^n-R)^2}, R\,\frac{R^2-\|p'\|^2-|p^n|^2}{\|p'\|^2+(p^n-R)^2}\right),
$$

dove stavolta $p'=(p^1,\dots,p^{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$. L'inversa è data da

$$
G^{-1}(q) = \left(\frac{2R^2q'}{\|q'\|^2+(q^n+R)^2}, R\,\frac{\|q'\|^2+|q^n|^2-R^2}{\|q'\|^2+(q^n+R)^2}\right),
$$

e un conto analogo al precedente mostra che $G^*g^3_R = g^2_R$. □

Definizione 4.2.2: Una qualunque varietà Riemanniana isometrica a una delle tre varietà Riemanniane della proposizione precedente è detta *spazio iperbolico* di dimensione n.

Vedremo in seguito (nel paragrafo 6.4) che $\mathbb{R}^n$ con la metrica piatta, le sfere e gli spazi iperbolici sono le uniche (a meno di isometrie) varietà Riemanniane semplicemente connesse di curvatura sezionale costante. Per farlo, ci servirà il seguente

Esempio 4.2.4. Gli elementi del gruppo ortogonale $O(n+1)$ sono ovviamente delle isometrie di S^n_R. Inoltre,$O(n+1)$ agisce transitivamente sulle basi ortonomali in TS^n_R. In altre parole, per ogni p, $\tilde p\in S^n_R$ e basi ortonormali $\{E_j\}$ di $T_pS^n_R$ e $\{\tilde E_j\}$ di $T_{\tilde p}S^n_R$ esiste $A\in O(n+1)$ tale che $A(p)=\tilde p$ e $dA_p(E_j)=\tilde E_j$ per $j=1,\dots,n$. Infatti, è sufficiente far vedere che per ogni $p\in S^n_R$ e ogni base ortonormale $\{E_j\}$ di $T_pS^n_R$ esiste $A\in O(n+1)$ che manda il polo nord $N=(0,\dots,0,R)$ in p e la base canonica $\{e_1,\dots,e_n\}$ di $T_NS^n_R$ in $\{E_j\}$. Ma infatti sia $\{e_1,\dots,e_n,N/R\}$ che $\{E_1,\dots,E_n,p/\|p\|\}$ sono basi ortonormali di $\mathbb{R}^{n+1}$, per cui esiste un'unica $A\in O(n+1)$ che manda la prima nella seconda (e $dA_N=A$, in quanto A è lineare). Nel paragrafo 6.4 faremo vedere che, come conseguenza di questo fatto, $\mathrm{Iso}(S^n_R)=O(n+1)$.

Esercizio 4.2.1. Sia $O(n,1)$ il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^{n+1}$ che conserva g^1_R considerata come forma quadratica su $\mathbb{R}^{n+1}$, e indichiamo con $O_+(n,1)$ il sottogruppo che manda U^n_R in sé. Dimostra che gli elementi di $O_+(n,1)$ sono isometrie di U^n_R, e che $O_+(n,1)$ agisce transitivamente sulle basi ortonormali di TU^n_R.

Concludiamo questo paragrafo parlando di metriche Riemanniane su gruppi di Lie.

Definizione 4.2.3: Una metrica Riemanniana g su un gruppo di Lie G è *invariante a sinistra* (rispettivamente, *invariante a destra*) se $L_h^*g=g$ (rispettivamente, $R_h^*g=g$) per ogni $h\in G$, cioè se tutte le traslazioni sinistre (destre) sono delle isometrie. Una metrica Riemanniana invariante sia a sinistra che a destra è detta *bi-invariante*.

Sia G un gruppo di Lie. Se scegliamo arbitrariamente un prodotto scalare definito positivo $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, otteniamo (perché?) una metrica Riemanniana invariante a sinistra ponendo

$$
\forall h\in G,\ \forall v,w\in T_hG \qquad \langle v,w\rangle_h = \big\langle (dL_{h^{-1}})_h(v), (dL_{h^{-1}})_h(w)\big\rangle_e .
$$

In maniera analoga si ottengono metriche Riemanniane invarianti a destra, ed è chiaro che tutte le metriche Riemanniane invarianti a sinistra o a destra si ricavano in questo modo.

Esercizio 4.2.2. Dimostra che su un gruppo di Lie compatto G esiste sempre una metrica Riemanniana bi-invariante seguendo la traccia seguente:

(a) Dimostra che l'unico omomorfismo continuo $f\colon G \to \mathbb{R}^*$ è la costante 1.
(b) Sia $\nu \in A^n(G)$ una n-forma invariante a sinistra, cioè tale che $L_h^*\nu = \nu$ per ogni $h \in G$. Dimostra che ν è anche invariante a destra. (*Suggerimento:* per ogni $h \in G$, la n-forma $R_h^*\nu$ è invariante a sinistra, per cui $R_h^*\nu = f(h)\nu$; verifica che $f\colon G \to \mathbb{R}^*$ è un omomorfismo di gruppi.)
(c) Dimostra che esiste una n-forma di volume invariante a sinistra su G.
(d) Sia $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ una metrica Riemanniana invariante a sinistra su G, e sia ν una n-forma di volume invariante a sinistra su G. Dimostra che ponendo

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle_g = \int_G \langle (dR_x)_g v, (dR_x)_g w\rangle_{gx}\, d\nu$$

dove $g \in G$ e v, $w \in T_gG$, si ottiene una metrica Riemanniana bi-invariante su G.

Definizione 4.2.4: Se $\theta\colon G \times M \to M$ è un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà Riemanniana M tale che θ_g è un'isometria per ogni $g \in G$, diremo che G *agisce per isometrie* su M.

Dunque se G agisce fedelmente per isometrie su una varietà Riemanniana M allora G può essere pensato come un sottogruppo del gruppo $\mathrm{Iso}(M)$ di tutte le isometrie di M. A dire il vero, lo stesso gruppo $\mathrm{Iso}(M)$ è un gruppo di Lie e l'applicazione $g \mapsto \theta_g$ è sempre di classe C^∞, grazie ai seguenti due teoremi:

Teorema 4.2.3: *Siano G e H due gruppi di Lie, e $F\colon G \to H$ un omomorfismo continuo di gruppi. Allora F è automaticamente di classe C^∞.*

Teorema 4.2.4: (Myers, Steenrod) *Sia M una varietà Riemanniana. Allora il gruppo $\mathrm{Iso}(M)$ ammette una struttura di gruppo di Lie tale che l'applicazione naturale $(F, p) \mapsto F(p)$ sia un'azione di $\mathrm{Iso}(M)$ su M.*

Definizione 4.2.5: Diremo che una varietà Riemanniana M è *omogenea* se $\mathrm{Iso}(M)$ agisce in modo transitivo. Diremo che M è *isotropa* in un punto $p \in M$ se il sottogruppo di isotropia $\mathrm{Iso}(M)_p$ agisce in modo transitivo sui vettori unitari in T_pM, dove $\mathrm{Iso}(M)_p$ agisce su T_pM tramite l'applicazione $(F, v) \mapsto dF_p(v)$.

Osservazione 4.2.1. Se M è omogenea, e isotropa in un punto, allora è isotropa in ogni punto.

4.3 Connessioni

L'obiettivo di questo paragrafo è trovare un modo per derivare campi vettoriali definiti lungo una curva. Il problema è che i valori del campo vettoriale appartengono a spazi vettoriali diversi, per cui non è possibile scrivere un rapporto incrementale. Storicamente, questo problema venne risolto introducendo una tecnica (il trasporto parallelo) per confrontare spazi tangenti in punti diversi; noi invece faremo il percorso inverso, definendo prima cosa vuol dire derivare campi vettoriali e deducendo poi il concetto di trasporto parallelo.

La formalizzazione moderna del concetto di derivazione di campi vettoriali è data dalla definizione di connessione.

Definizione 4.3.1: Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M. Una *connessione* su E è un'applicazione $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$, scritta $(X, V) \mapsto \nabla_X V$, tale che

(a) $\nabla_X V$ è $C^\infty(M)$-lineare in X: per ogni X_1, $X_2 \in \mathcal{T}(M)$, $V \in \mathcal{E}(M)$, e f, $g \in C^\infty(M)$ si ha

$$\nabla_{fX_1+gX_2}V = f\nabla_{X_1}V + g\nabla_{X_2}V;$$

(b) $\nabla_X V$ è $\mathbb{R}$-lineare in V: per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, V_1, $V_2 \in \mathcal{E}(M)$, e a, $b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\nabla_X(aV_1 + bV_2) = a\nabla_X V_1 + b\nabla_X V_2;$$

(c) ∇ soddisfa un'identità di Leibniz: per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, $V \in \mathcal{E}(M)$, e $f \in C^\infty(M)$ si ha

$$\nabla_X(fV) = f\nabla_X V + (Xf)V.$$

La sezione $\nabla_X V$ è detta *derivata covariante* di V lungo X. Infine, una connessione su TM verrà chiamata *connessione lineare*, o semplicemente *connessione su* M.

Esempio 4.3.1. Sia $E = M \times \mathbb{R}^r$ un fibrato banale sulla varietà M. Ogni sezione $V \in \mathcal{E}(M)$ è della forma $V = V^j E_j$ per opportune $V^j \in C^\infty(M)$, dove $\{E_1, \ldots, E_r\}$ è il riferimento globale di E ottenuto ponendo $E_j(p) = (p, e_j)$ per ogni $p \in M$, dove $\{e_1, \ldots, e_r\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^r$. In altre parole, una sezione del fibrato banale di rango r è essenzialmente una r-upla di funzioni differenziabili. Possiamo allora definire la *connessione piatta* su E ponendo

$$\nabla_X V = X(V^j)E_j.$$

Si verifica subito che è effettivamente una connessione.

Usando la connessione piatta e le partizioni dell'unità è facile definire connessioni su qualsiasi fibrato:

Proposizione 4.3.1: *Su qualsiasi fibrato vettoriale $\pi: E \to M$ esiste sempre una connessione.*

Dimostrazione: Scegliamo un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M che banalizza E, con banalizzazioni locali date da $\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Su ciascun U_α definiamo una connessione ∇^α ponendo

$$\forall X \in \mathcal{T}(U_\alpha)\ \forall V \in \mathcal{E}(U_\alpha) \qquad \nabla^\alpha_X V = \chi_\alpha^{-1}\bigl(\nabla^0_X \chi_\alpha(V)\bigr),$$

dove ∇^0 è la connessione piatta su $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Incolliamo ora le ∇^α definendo

$$\forall X \in \mathcal{T}(M)\ \forall V \in \mathcal{E}(M) \qquad \nabla_X V = \sum_\alpha \rho_\alpha \bigl(\nabla^\alpha_{X|_{U_\alpha}} V|_{U_\alpha}\bigr).$$

Le proprietà (a) e (b) della Definizione 4.3.1 sono chiaramente soddisfatte. Per la proprietà (c) abbiamo

$$\begin{aligned}\nabla_X(fV) &= \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha_{X|_{U_\alpha}}(fV|_{U_\alpha}) = \sum_\alpha \rho_\alpha \bigl(f\nabla^\alpha_{X|_{U_\alpha}} V|_{U_\alpha} + X(f)V|_{U_\alpha}\bigr)\\ &= f\nabla_X V + \left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) X(f)V = f\nabla_X V + X(f)V,\end{aligned}$$

e quindi ∇ è una connessione. □

Osservazione 4.3.1. In generale, la somma di connessioni (o il prodotto di uno scalare per una connessione) non è una connessione, in quanto la proprietà (c) non viene conservata. Invece, la *combinazione affine* di connessioni è una connessione: se $\nabla^1, \ldots, \nabla^k$ sono connessioni su un fibrato E e $\mu_1, \ldots .\mu_k \in \mathbb{R}$ sono tali che $\mu_1 + \cdots + \mu_k = 1$, allora si verifica facilmente che $\mu_1\nabla^1 + \cdots + \mu_k\nabla^k$ è ancora una connessione.

Facciamo ora vedere che in realtà $\nabla_X V(p)$ dipende solo dal valore di X in $p \in M$ e dal comportamento di V in un intorno di p (o, più precisamente, solo da $X(p)$ e dal comportamento di V ristretto a una curva tangente a $X(p)$ in p):

Lemma 4.3.2: *Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale, e $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione.*

(i) *Se X, $\tilde{X} \in \mathcal{T}(M)$ e V, $\tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che $X(p) = \tilde{X}(p)$ e $V \equiv \tilde{V}$ in un intorno di $p \in M$ allora si ha $\nabla_X V(p) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{V}(p)$.*

(ii) *Per ogni aperto $U \subseteq M$ esiste un'unica connessione $\nabla^U: \mathcal{T}(U) \times \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$ su $E|_U$ tale che per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, $V \in \mathcal{E}(M)$ e $p \in U$ si abbia*

$$\nabla^U_{X|_U} V|_U(p) = \nabla_X V(p).$$

(iii) *Se* $X \in \mathcal{T}(M)$ *e* $V, \tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ *sono tali che esiste una curva* $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ *con* $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X(p)$ *e* $V \circ \sigma = \tilde{V} \circ \sigma$ *allora* $\nabla_X V(p) = \nabla_X \tilde{V}(p)$.

Dimostrazione: Prima di tutto dimostriamo che se $V \equiv O$ in un intorno U di p allora $\nabla_X V(p) = O$ per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$. Sia $g \in C^\infty(M)$ tale che $g(p) = 1$ e $g|_{M\setminus U} \equiv 0$ (vedi il Corollario 2.3.2). Allora $gV \equiv O$, per cui $\nabla_X(gV) = \nabla_X(0 \cdot gV) = 0\nabla_X(gV) \equiv O$ e quindi

$$O = \nabla_X(gV)(p) = g(p)\nabla_X V(p) + (Xg)(p)V(p) = \nabla_X V(p).$$

Dunque se $V, \tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che $V \equiv \tilde{V}$ in un intorno di p, abbiamo $V - \tilde{V} \equiv O$ in un intorno di p, e quindi $\nabla_X V(p) = \nabla_X \tilde{V}(p)$ quale che sia $X \in \mathcal{T}(M)$.

Dimostriamo analogamente che se $X \equiv O$ in un intorno U di p allora $\nabla_X V(p) = O$ per ogni $V \in \mathcal{E}(M)$. Infatti, se $g \in C^\infty(M)$ è la stessa funzione di prima si ha $gX \equiv O$, per cui $\nabla_{gX} V = \nabla_{0gX} V = 0\nabla_{gX} V \equiv O$ e quindi

$$O = \nabla_{gX} V(p) = g(p)\nabla_X V(p) = \nabla_X V(p).$$

Da questo segue, come prima, che se $X \equiv \tilde{X}$ in un intorno di p allora $\nabla_X V(p) = \nabla_{\tilde{X}} V(p)$ quale che sia $V \in \mathcal{E}(M)$.

In particolare, quindi, il valore di $\nabla_X V$ in p dipende solo dal comportamento di X e V in un intorno di p, per cui se una connessione ∇^U come in (ii) esiste allora è unica. Ma possiamo usare questa proprietà anche per definire ∇^U. Infatti, per ogni $p \in U$ scegliamo, usando la Proposizione 2.3.1, una $\chi_p \in C^\infty(M)$ tale che $\chi_p \equiv 1$ in un intorno di p e $\operatorname{supp}(\chi_p) \subset U$. Allora per ogni $X \in \mathcal{T}(U)$ il campo vettoriale $\chi_p X$, esteso a zero fuori da U, è un campo vettoriale globale che coincide con X in un intorno di p. In modo analogo, per ogni $V \in \mathcal{E}(U)$ possiamo considerare $\chi_p V$ come una sezione globale di E che coincide con V in un intorno di p. Quindi se definiamo $\nabla^U\colon \mathcal{T}(U) \times \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$ ponendo

$$\nabla^U_X V(p) = \nabla_{\chi_p X}(\chi_p V)(p)$$

per quanto visto otteniamo una connessione ben definita (cioè indipendente dalla scelta delle χ_p), e abbiamo dimostrato (ii).

Possiamo ora completare la dimostrazione di (i), facendo vedere che in realtà $\nabla_X V(p)$ dipende solo dal valore di X in p (e dal comportamento di V in un intorno di p). Al solito, basta far vedere che $X(p) = O$ implica $\nabla_X V(p) = O$ per ogni $V \in \mathcal{E}(M)$. Sia (U,φ) una carta locale centrata in p, e scriviamo $X|_U = X^j \partial_j$, con $X^j(p) = 0$ per $j = 1,\ldots,n$ in quanto $X(p) = O$. Per quanto detto, ha senso calcolare $\nabla_{\partial_j} V(p)$, e si ha

$$\nabla_X V(p) = \nabla_{X^j\partial_j} V(p) = X^j(p)\nabla_{\partial_j} V(p) = O.$$

Per dimostrare (iii), basta far vedere che se $V \circ \sigma \equiv O$ allora $\nabla_X V(p) = O$. Sia $\{E_1,\ldots,E_r\}$ un riferimento locale per E su un intorno U di p, e scriviamo $V = V^j E_j$. Da $V(p) = V\big(\sigma(0)\big) = O$ otteniamo $V^1(p) = \cdots = V^r(p) = 0$. Per quanto detto ha senso calcolare $\nabla_X E_j(p)$, e si ha

$$\nabla_X V(p) = \nabla_X(V^j E_j)(p) = V^j(p)\nabla_X E_j(p) + X(p)(V^j)E_j(p) = \frac{d(V^j \circ \sigma)}{dt}(0)E_j(p) = O.$$

□

Per non appesantire le notazioni, nel seguito indicheremo con ∇ e non con ∇^U la connessione indotta sull'aperto $U \subseteq M$.

Sia (U,φ) una carta locale che banalizza E, e $\{E_1,\ldots,E_r\}$ un riferimento locale su U. Allora si deve poter scrivere

$$\nabla_{\partial_j} E_h = \Gamma^k_{jh} E_k,$$

per opportune funzioni $\Gamma^k_{jh} \in C^\infty(U)$.

Definizione 4.3.2: Le funzioni Γ_{ij}^k sono dette *simboli di Christoffel* della connessione rispetto al dato riferimento locale.

I simboli di Christoffel determinano completamente la connessione: infatti se $X \in \mathcal{T}(U)$ e $V \in \mathcal{E}(U)$, localmente possiamo scrivere $X = X^j \partial_j$ e $V = V^h E_h$, e abbiamo

$$\nabla_X V = X^j \nabla_{\partial_j} V = [X^j \partial_j (V^k) + \Gamma_{jh}^k X^j V^h] E_k. \tag{4.3.1}$$

In particolare, i simboli di Christoffel della connessione piatta su un fibrato banale sono identicamente nulli.

Il Lemma 4.3.2.(iii) ci dice che per calcolare la derivata covariante di una sezione basta conoscerne il comportamento lungo una curva. Questo ci suggerisce la seguente:

Definizione 4.3.3: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale e $\sigma: I \to M$ una curva in M, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Una *sezione* di E *lungo* σ è un'applicazione $V: I \to E$ di classe C^∞ tale che $V(t) \in E_{\sigma(t)}$ per ogni $t \in I$. Lo spazio vettoriale delle sezioni di E lungo σ verrà indicato con $\mathcal{E}(\sigma)$, o con $\mathcal{T}(\sigma)$ se $E = TM$. Una sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è *estendibile* se esiste un intorno U del sostegno di σ e una sezione $\tilde{V} \in \mathcal{E}(U)$ tale che $V(t) = \tilde{V}\big(\sigma(t)\big)$ per ogni $t \in I$.

Esempio 4.3.2. Il vettore tangente a una curva $\sigma'(t) = d\sigma(d/dt)$ è un tipico esempio di sezione di TM lungo una curva. Inoltre, se $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ ma $\sigma'(t_1) \neq \sigma'(t_2)$ allora σ' non è estendibile.

Esercizio 4.3.1. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale, e $\sigma: I \to M$ una curva di classe C^∞. Sia $t_0 \in I$ tale che $\sigma'(t_0) \neq O$. Dimostra che esiste un intervallo aperto $U \subseteq I$ contenente t_0 tale che ogni $X \in \mathcal{E}(\sigma|_U)$ è estendibile.

Il vero significato del Lemma 4.3.2.(iii) è contenuto nella

Proposizione 4.3.3: *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Allora per ogni curva $\sigma: I \to M$ esiste un unico operatore $D: \mathcal{E}(\sigma) \to \mathcal{E}(\sigma)$ soddisfacente le seguenti proprietà:*

(i) *è $\mathbb{R}$-lineare:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad D(aV_1 + bV_2) = aDV_1 + bDV_2;$$

(ii) *soddisfa una regola di Leibniz:*

$$\forall f \in C^\infty(I) \qquad D(fV) = f'V + fDV;$$

(iii) *se $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è estendibile, e $\tilde{V}$ è un'estensione di V, si ha*

$$DV(t) = \nabla_{\sigma'(t)} \tilde{V}.$$

Dimostrazione: Cominciamo con l'unicità. Dato $t_0 \in I$, un ragionamento analogo a quello usato per dimostrare il Lemma 4.3.2.(i) mostra che $DV(t_0)$ dipende solo dai valori di V in un intorno di t_0. Possiamo allora usare un riferimento locale e coordinate locali, scrivere $V(t) = V^h(t) E_h\big(\sigma(t)\big)$, $\sigma'(t_0) = (\sigma^j)'(t_0) \partial_j\big(\sigma(t_0)\big)$ e usare le proprietà di D per ottenere

$$\begin{aligned} DV(t_0) &= (V^h)'(t_0) E_h\big(\sigma(t_0)\big) + V^h(t_0) D(E_h \circ \sigma)(t_0) \\ &= (V^h)'(t_0) E_h\big(\sigma(t_0)\big) + V^h(t_0) \nabla_{\sigma'(t_0)} E_h\big(\sigma(t_0)\big) \\ &= \Big[(V^k)'(t_0) + \Gamma_{jh}^k\big(\sigma(t_0)\big)(\sigma^j)'(t_0) V^h(t_0)\Big] E_k\big(\sigma(t_0)\big), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

dove abbiamo usato il fatto che $E_h \circ \sigma$ è estendibile in un intorno di t_0; quindi D è univocamente determinato.

Per l'esistenza, se il sostegno di σ è contenuto in una sola carta locale banalizzante E, possiamo usare (4.3.2) per definire D, ed è facile verificare che soddisfa le condizioni richieste. In generale, copriamo $\sigma(I)$ con carte locali banalizzanti E, e usiamo (4.3.2) per definire un operatore D su ciascuna di queste carte. Nelle intersezioni, abbiamo due operatori che soddisfano (i)–(iii); per l'unicità, questi due operatori devono coincidere, e quindi abbiamo definito D globalmente. □

Definizione 4.3.4: L'operatore D definito sopra è detto *derivata covariante* lungo la curva $\sigma\colon I \to M$. Se $t \in I$ e $V \in \mathcal{E}(\sigma)$, scriveremo spesso $D_t V$ invece di $DV(t)$.

Esercizio 4.3.2. Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon I \to M$ una curva di classe C^∞; indichiamo con $D\colon \mathcal{E}(\sigma) \to \mathcal{E}(\sigma)$ la derivata covariante lungo σ. Sia poi $h\colon J \to I$ di classe C^∞, dove $J \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, e indichiamo con $\tilde{D}$ la derivata covariante lungo la curva $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h$. Dimostra che per ogni $X \in \mathcal{E}(\sigma)$ si ha $X \circ h \in \mathcal{E}(\sigma \circ h)$ e

$$\tilde{D}(X \circ h) = h'(DX \circ h).$$

Se $E = M \times \mathbb{R}^r$ è il fibrato banale, ∇ è la connessione piatta, e $\sigma\colon I \to M$ è una curva, si vede subito che $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ soddisfa $DV \equiv O$ se e solo se V è costante, cioè se $V(t)$ è sempre lo stesso vettore di $\mathbb{R}^r$ che si sposta parallelamente lungo la curva σ. Questo fatto suggerisce la seguente definizione:

Definizione 4.3.5: Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon I \to M$ una curva. Una sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è detta *parallela* se $DV \equiv O$.

La condizione di parallelismo è localmente un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie: infatti (4.3.2) implica che $DV \equiv O$ in una carta banalizzante E se e solo se

$$\frac{dV^k}{dt} + (\Gamma^k_{jh} \circ \sigma)(\sigma^j)' V^h = 0. \tag{4.3.3}$$

Citiamo a questo punto il Teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari:

Teorema 4.3.4: *Dati un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, un punto $t_0 \in I$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e un'applicazione $A\colon I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ di classe C^∞, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt}(t) = A(t)V(t) \\ V(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

ammette una e una sola soluzione $V\colon I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞.

Questo teorema implica che, posto $I = [a,b]$ e $p = \sigma(a)$, per ogni $v \in E_p$ esiste un unico $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ parallelo tale che $V(a) = v$. Infatti, essendo $\sigma(I)$ compatto, possiamo trovare un numero finito di carte $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_r, \varphi_r)$ banalizzanti E che coprono il sostegno di σ; possiamo anche supporre che si abbia $U_j \cap \sigma(I) = \sigma([s_j, t_j])$ per $j = 1, \ldots, r$, con $a = s_1 < s_2 < t_1 < s_3 < t_2 < \cdots < s_r < t_{r-1} < t_r = b$. Allora il Teorema 4.3.4 applicato a (4.3.3) ci fornisce un'unica sezione parallela V_1 lungo $\sigma|_{[s_1,t_1]}$ tale che $V_1(a) = v$. Analogamente, il Teorema 4.3.4 ci fornisce un'unica sezione parallela V_2 lungo $\sigma|_{[s_2,t_2]}$ tale che $V_2(t_1) = V_1(t_1)$; in particolare, l'unicità implica che V_1 e V_2 coincidono in $[s_2, t_1]$, definendo quindi un'unica sezione parallela lungo $\sigma|_{[s_1,t_2]}$. Procedendo in questo modo troviamo un'unica sezione V parallela lungo σ tale che $V(a) = v$. Questo ci permette di introdurre la seguente

Definizione 4.3.6: Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon [0,1] \to M$ una curva. Poniamo $p_0 = \sigma(0)$ e $p_1 = \sigma(1)$. Dato $v \in E_{p_0}$, l'unica sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ parallela lungo σ tale che $V(0) = v \in E_{p_0}$ è detta *estensione parallela* di v lungo σ. Il *trasporto parallelo* lungo σ (relativo a ∇) è l'applicazione $\tilde{\sigma}\colon E_{p_0} \to E_{p_1}$ definita da $\tilde{\sigma}(v) = V(1)$, dove $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è l'estensione parallela di $v \in E_{p_0}$.

Lemma 4.3.5: *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon [0,1] \to M$ una curva. Poniamo $p_0 = \sigma(0)$ e $p_1 = \sigma(1)$. Allora il trasporto parallelo lungo σ è un isomorfismo fra E_{p_0} e E_{p_1}.*

Dimostrazione: Siccome (4.3.3) è un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie, la soluzione dipende linearmente dalle condizioni iniziali, e quindi $\tilde{\sigma}$ è un'applicazione lineare.

Poniamo ora $\sigma_-(t) = \sigma(1-t)$, e sia D^- la derivata covariante lungo σ_-; inoltre per ogni $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ poniamo $V^-(t) = V(1-t)$, in modo da avere $V^- \in \mathcal{E}(\sigma^-)$. La formula (4.3.2) mostra subito che

$$D^-_t V^- = -D_{1-t} V;$$

in particolare, V^- è parallelo lungo σ_- se e solo se V è parallelo lungo σ. Questo vuol dire in particolare che se V è l'estensione parallela di $v \in E_{p_0}$, allora V^- è l'estensione parallela di $V(1) = \tilde{\sigma}(v) \in E_{p_1}$, per cui $\tilde{\sigma}_- = \tilde{\sigma}^{-1}$, e $\tilde{\sigma}$ è un isomorfismo. □

Osservazione 4.3.2. Il trasporto parallelo è definito anche lungo curve C^∞ a tratti; basta fare la composizione dei trasporti paralleli lungo i singoli pezzi lisci.

Osservazione 4.3.3. Un fatto utile è che dati una curva $\sigma\colon I \to M$, un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$ di rango r e una connessione su E esiste sempre un riferimento locale parallelo lungo σ, cioè una r-upla di sezioni $E_1, \ldots, E_r \in \mathcal{E}(\sigma)$ parallele lungo σ tali che $\{E_1(t), \ldots, E_r(t)\}$ sia una base di $E_{\sigma(t)}$ per ogni $t \in I$. Infatti, basta prendere un qualsiasi $t_0 \in I$, una qualsiasi base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ di $E_{\sigma(t_0)}$, ed estendere parallelamente $e_1, \ldots, e_r$ lungo σ.

Partendo da una connessione abbiamo costruito il trasporto parallelo. Possiamo fare anche il viceversa:

Proposizione 4.3.6: *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, $\sigma\colon I \to M$ una curva in M, e $t_0 \in I$. Allora*

$$\forall V \in \mathcal{E}(\sigma) \qquad D_{t_0} V = \frac{d}{dt}\tilde\sigma_t^{-1}\bigl(V(t)\bigr)\Bigr|_{t=t_0},$$

dove $\tilde\sigma_t\colon E_{\sigma(t_0)} \to E_{\sigma(t)}$ è il trasporto parallelo lungo σ, e D è la derivata covariante lungo σ. In particolare, se $\sigma(t_0) = p$ e $\sigma'(t_0) = v \in T_pM$ allora

$$\forall V \in \mathcal{E}(M) \qquad \nabla_v V = \frac{d}{dt}\tilde\sigma_t^{-1}\Bigl(V\bigl(\sigma(t)\bigr)\Bigr)\Bigr|_{t=t_0}.$$

Dimostrazione: Sia $\{E_1, \ldots, E_r\}$ un riferimento locale parallelo lungo σ (ottenuto prendendo una base qualsiasi di E_p e trasportandola parallelamente lungo σ), e scriviamo $V(t) = V^j(t)E_j(t)$. Allora

$$\tilde\sigma_t^{-1}\bigl(V(\sigma(t))\bigr) = V^j(t)E_j(t_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\tilde\sigma_t^{-1}\Bigl(V\bigl(\sigma(t)\bigr)\Bigr)\Bigr|_{t=t_0} = \frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0).$$

D'altra parte, abbiamo

$$D_{t_0}(V^jE_j) = \frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0) + V^j(t_0)D_{t_0}E_j = \frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0),$$

perché gli E_j sono paralleli lungo σ. □

Nel seguito lavoreremo principalmente con connessioni lineari, cioè con connessioni definite sul fibrato tangente TM. Una delle caratteristiche delle connessioni lineari è che inducono una connessione su ciascun fibrato tensoriale:

Proposizione 4.3.7: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora esiste un unico modo di definire per ogni h, $k \in \mathbb{N}$ una connessione su T^h_kM, ancora indicata con ∇, in modo da soddisfare le seguenti condizioni:*

(i) *su TM la connessione ∇ coincide con la connessione lineare data;*
(ii) *su $T^0M = C^\infty(M)$ si ha $\nabla_X(f) = X(f)$;*
(iii) *se $K_j \in \mathcal{T}^{h_j}_{k_j}(M)$, per $j = 1, 2$ e $X \in \mathcal{T}(M)$ si ha*

$$\nabla_X(K_1 \otimes K_2) = (\nabla_X K_1) \otimes K_2 + K_1 \otimes (\nabla_X K_2);$$

(iv) *∇ commuta con le contrazioni.*

Inoltre, se $\eta \in A^1(M)$ e $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ si ha

$$(\nabla_X\eta)(Y) = X\bigl(\eta(Y)\bigr) - \eta(\nabla_X Y). \tag{4.3.5}$$

Infine, se $p \in M$, $v \in T_pM$, e $K \in \mathcal{T}^h_k(M)$ si ha

$$\nabla_v K = \frac{d}{dt}\Bigl[T(\tilde\sigma_t)^{-1}\Bigl(K\bigl(\sigma(t)\bigr)\Bigr)\Bigr]\Bigr|_{t=0} \in T^h_k(M)_p, \tag{4.3.6}$$

dove $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ *è una curva in* M *con* $\sigma(0)=p$ *e* $\sigma'(0)=v$, *e* $T(\tilde\sigma_t)$ *è l'isomorfismo fra* $(T^h_kM)_p$ *e* $(T^h_kM)_{\sigma(t)}$ *indotto dal trasporto parallelo lungo* σ *come descritto nell'Osservazione 1.2.3.*

Dimostrazione: Cominciamo a verificare l'unicità. Se ∇ soddisfa (i)–(iv) allora abbiamo

$$\begin{aligned}X\bigl(\eta(Y)\bigr)&=\nabla_X\bigl(\eta(Y)\bigr)=\nabla_X\mathcal{C}^1_1(Y\otimes\eta)\\&=\mathcal{C}^1_1\nabla_X(Y\otimes\eta)=\mathcal{C}^1_1(\nabla_XY\otimes\eta+Y\otimes\nabla_X\eta)\\&=\nabla_X\eta(Y)+\eta(\nabla_XY),\end{aligned}$$

per cui (4.3.5) è una conseguenza. Questo vuol dire che la connessione ∇ su T^*M è univocamente determinata da (i)–(iv); conoscendola su TM e su $C^\infty(M)$ la (iii) implica che ∇ è univocamente determinata su qualsiasi T^h_kM. Per l'esattezza, otteniamo la seguente formula:

$$\begin{aligned}(\nabla_XK)(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\\=X\bigl(K(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\bigr)\\-\sum_{r=1}^hK(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^r,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)-\sum_{s=1}^kK(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,\nabla_XY_s,\ldots,Y_k).\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

Infatti, ci basta dimostrarla per campi tensoriali della forma $K=X_1\otimes\cdots\otimes X_h\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^k$. Allora la proprietà (iii) e la formula (4.3.5) implicano

$$\begin{aligned}&\nabla_XK(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\\&=\sum_{r=1}^h(X_1\otimes\cdots\otimes\nabla_XX_r\otimes\cdots\otimes X_h\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\eta^k)(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\\&\quad+\sum_{s=1}^k(X_1\otimes\cdots\otimes X_h\otimes\eta^1\otimes\cdots\otimes\nabla_X\eta^s\otimes\cdots\otimes\cdots\otimes\eta^k)(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\\&=\sum_{r=1}^h\omega^1(X_1)\cdots\omega^r(\nabla_XX_r)\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\eta^k(Y_k)\\&\quad+\sum_{s=1}^k\omega^1(X_1)\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\nabla_X\eta^s(Y_s)\cdots\eta^k(Y_k)\\&=\sum_{r=1}^h\omega^1(X_1)\cdots\bigl[X\bigl(\omega^r(X_r)\bigr)-(\nabla_X\omega^r)(X_r)\bigr]\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\eta^k(Y_k)\\&\quad+\sum_{s=1}^k\omega^1(X_1)\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\bigl[X\bigl(\eta^s(Y_s)\bigr)-\eta^s(\nabla_XY_s)\bigr]\cdots\eta^k(Y_k)\\&=X\bigl(K(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\bigr)\\&\quad-\sum_{r=1}^hK(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^r,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)-\sum_{s=1}^kK(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,\nabla_XY_s,\ldots,Y_k),\end{aligned}$$

e ci siamo.

Viceversa, usiamo la (4.3.5) per definire ∇ su T^*M. Prima di tutto,

$$\nabla_X\eta(fY)=X(f)\eta(Y)+fX\bigl(\eta(Y)\bigr)-\eta\bigl(f\nabla_XY+X(f)Y\bigr)=f\nabla_X\eta(Y),$$

per cui la Proposizione 3.2.1 ci assicura che $\nabla_X\eta$ è effettivamente una 1-forma. Siccome $\nabla_X\eta$ è chiaramente $C^\infty(M)$-lineare in X, e per ogni $Y\in\mathcal{T}(M)$ si ha

$$\nabla_X(f\eta)(Y)=X\bigl(f\eta(Y)\bigr)-f\eta(\nabla_XY)=[X(f)\eta+f\nabla_X\eta](Y),$$

otteniamo effettivamente una connessione su T^*M. Analogamente, definiamo ∇ su ciascun $T^h_k M$ tramite la (4.3.7); si verifica facilmente (esercizio) che si ottiene una connessione che possiede le proprietà volute.

Rimane da dimostrare che ∇ è data anche da (4.3.6). Ricordando la Proposizione 4.3.6, basta verificare che il trasporto parallelo indotto da ∇ su ciascun $T^h_k M$ (che indichiamo provvisoriamente con $\hat\sigma_t$) coincide con l'isomorfismo $T(\tilde\sigma_t)$. Scegliamo un riferimento locale $\{v_1,\dots,v_n\}$ di TM parallelo lungo σ, e sia $\{v^1,\dots,v^n\}$ il riferimento duale di T^*M. Nota che anche i v^j sono paralleli rispetto a ∇: infatti la (4.3.5) implica

$$(Dv^j)(v_i) = \sigma'\big(v^j(v_i)\big) - v^j(Dv_i) = O$$

per ogni i e j, per cui $Dv^j = O$. Questo implica che

$$\hat\sigma_t\big(v_i(0)\big) = v_i(t) = T(\tilde\sigma_t)\big(v_i(0)\big) \qquad \text{e} \qquad \hat\sigma_t\big(v^j(0)\big) = v^j(t) = T(\tilde\sigma_t)\big(v^j(0)\big)$$

per ogni $1 \le i,\, j \le n$. Ma allora la proprietà (iii) e la definizione di $T(\tilde\sigma_t)$ implicano che

$$\begin{aligned}\hat\sigma_t\big(v_{i_1}(0)\otimes\cdots\otimes v_{i_h}(0)\otimes v^{j_1}(0)\otimes\cdots\otimes v^{j_k}(0)\big) &= v_{i_1}(t)\otimes\cdots\otimes v_{i_h}(t)\otimes v^{j_1}(t)\otimes\cdots\otimes v^{j_k}(t)\\ &= T(\tilde\sigma_t)\big(v_{i_1}(0)\otimes\cdots\otimes v_{i_h}(0)\otimes v^{j_1}(0)\otimes\cdots\otimes v^{j_k}(0)\big),\end{aligned}$$

per ogni $1 \le i_1,\dots,j_k \le n$, e quindi $\hat\sigma_t \equiv T(\tilde\sigma_t)$, come volevamo. □

Ora, prendiamo $K \in \mathcal{T}^h_k(M)$. Siccome ∇ è $C^\infty(M)$-lineare in X, l'applicazione

$$(\omega^1,\dots,\omega^h,Y_1,\dots,Y_k,X) \mapsto \nabla_X K(\omega^1,\dots,\omega^h,Y_1,\dots,Y_k) \tag{4.3.8}$$

è $C^\infty(M)$-multilineare in tutte le variabili, e quindi (Proposizione 3.2.1) definisce un campo tensoriale.

Definizione 4.3.7: Se $K \in \mathcal{T}^h_k(M)$ allora il campo tensoriale $\nabla K \in \mathcal{T}^h_{k+1}(M)$ definito da (4.3.8) si chiama *derivata covariante totale* di K.

Esempio 4.3.3. Se $f \in C^\infty(M)$ allora $\nabla f = df$. Infatti per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$ si ha

$$df(X) = X(f) = \nabla_X f = (\nabla f)(X).$$

Nel paragrafo 4.1 usando una metrica Riemanniana abbiamo definito il gradiente di una funzione. Usando la derivata covariante totale possiamo generalizzare altri due concetti dell'Analisi classica:

Definizione 4.3.8: Se $f \in C^\infty(M)$ il campo tensoriale $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f) \in \mathcal{T}_2(M)$ è detto *Hessiano* di f.

Definizione 4.3.9: La derivata covariante totale di un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{1}$. Quindi possiamo definire la funzione $\operatorname{div}(X) = \mathcal{C}^1_1(\nabla X)$, che è detta *divergenza* di X.

Calcoliamo l'espressione in coordinate locali di Hessiano e divergenza. Se X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ abbiamo

$$\nabla^2 f(X,Y) = \nabla(\nabla f)(X,Y) = \big(\nabla_Y(df)\big)(X) = Y\big(df(X)\big) - df(\nabla_Y X) = Y\big(X(f)\big) - \nabla_Y X(f). \tag{4.3.9}$$

Quindi in coordinate locali

$$\nabla^2 f(\partial_i,\partial_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

In particolare, su $\mathbb{R}^n$ con la connessione piatta ritroviamo l'Hessiano usuale. Nota però che per connessioni generali questo Hessiano *non* è simmetrico, in quanto non è detto che si abbia $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$.

Poi, (4.3.1) permette di stabilire che se $X = X^h\partial_h$ allora

$$\nabla X = \partial_k \otimes (dX^k + \Gamma^k_{jh}X^h\,dx^j),$$

per cui

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X^k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{kh}X^h,$$

(con sommatoria sottintesa sull'indice k), e di nuovo su $\mathbb{R}^n$ con la connessione piatta recuperiamo la solita divergenza.

Esercizio 4.3.3. Sia ∇ una connessione sulla varietà M. Dato $X \in \mathcal{T}(M)$ e $p \in M$, sia $A_{X,p}\colon T_pM \to T_pM$ l'applicazione lineare data da $A_{X,p}(v) = \nabla_v X$. Dimostra che $\operatorname{div}(X)(p) = \operatorname{tr} A_{X,p}$.

Esercizio 4.3.4. Indichiamo con $\mathcal{L}: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ la derivata di Lie $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$. Dimostra che $\mathcal{L}$ *non* è una connessione, e che esistono due campi vettoriali X, $Y \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ tali che $X(O) = O$ ma $\mathcal{L}_X Y(O) \neq O$.

Concludiamo questo paragrafo discutendo due altri modi di definire le connessioni.

Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Sia $\{E_1, \ldots, E_r\}$ un riferimento locale per E sopra un aperto $U \subseteq M$. Allora possiamo definire una matrice $\boldsymbol{\omega} = (\omega_j^k)$ di 1-forme su U ponendo

$$\forall X \in \mathcal{T}(U) \qquad \nabla_X E_j = \omega_j^k(X) E_k;$$

sono 1-forme in quanto $C^\infty(M)$-lineari in X. Se U è il dominio di una carta locale, in coordinate locali chiaramente abbiamo

$$\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k \, dx^i.$$

Definizione 4.3.10: Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$, e $\{E_1, \ldots, E_r\}$ un riferimento locale per E su un aperto U. La matrice $\boldsymbol{\omega} = (\omega_j^k)$ di 1-forme su U appena definita è detta *matrice delle forme di connessione* rispetto al dato riferimento locale.

Sia $\{\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_r\}$ un altro riferimento locale per E sopra U. Allora deve esistere una matrice invertibile $\mathbf{A} = (A_h^k)$ di funzioni C^∞ su U tali che $\tilde{E}_h = A_h^k E_k$. Se indichiamo con $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\omega}_i^h)$ la matrice delle forme di connessione rispetto a questo riferimento locale abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_i^h(X) A_h^k E_k = \tilde{\omega}_i^h(X) \tilde{E}_h = \nabla_X \tilde{E}_i = \nabla_X (A_i^j E_j) = A_i^j \nabla_X E_j + X(A_i^j) E_j \\ = [A_i^j \omega_j^k(X) + dA_i^k(X)] E_k. \end{aligned}$$

In termini matriciali questo vuol dire $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + d\mathbf{A}$, cioè

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A}. \tag{4.3.10}$$

Esercizio 4.3.5. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Supponiamo di avere una famiglia di riferimenti locali $\{E^\alpha\}$ per E definiti su aperti $\{U_\alpha\}$ che ricoprono M, e di avere una famiglia di matrici di 1-forme $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$, con $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ definita su U_α, che soddisfano (4.3.10) sull'intersezione dei domini di definizione. Dimostra che esiste un'unica connessione ∇ su E per cui le $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ siano le matrici delle forme di connesione rispetto ai riferimenti locali E^α.

L'ultima interpretazione delle connessioni è in termini di sottofibrati orizzontali, e la presenteremo con una serie di definizioni ed esercizi.

Definizione 4.3.11: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r. Il *sottofibrato verticale* $\mathcal{V} \subset TE$ è il nucleo del differenziale di π, cioè $\mathcal{V} = \ker(d\pi)$. Siccome $d\pi: TE \to TM$, il fibrato verticale (che è un fibrato vettoriale su E) ha rango r.

Dato $p \in M$ e $v \in E_p$, indichiamo con $j_p: E_p \to E$ l'inclusione, e con $k_v: E_p \to T_v(E_p)$ la solita identificazione canonica. Siccome $\pi \circ j_p \equiv p$, si ha $d\pi \circ dj_p \equiv O$, per cui

$$\iota_v = d(j_p)_v \circ k_v: E_p \to \mathcal{V}_v$$

è un isomorfismo fra E_p e lo spazio verticale $\mathcal{V}_v$.

Definizione 4.3.12: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, indichiamo con $\mu_\lambda: E \to E$ la moltiplicazione per λ, cioè $\mu_\lambda(v) = \lambda v$. Inoltre, indichiamo con $\sigma: E \oplus E \to E$ la somma $\sigma(v_1, v_2) = v_1 + v_2$.

Esercizio 4.3.6. Dimostra che $\mathcal{V}_{\mu_\lambda(v)} = d(\mu_\lambda)_v(\mathcal{V}_v)$ e che $\iota_{\mu_\lambda(v)} \circ d(\mu_\lambda)_v = d(\mu_\lambda)_v \circ \iota_v$ per ogni $v \in E$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.3.7. Dimostra che $\mathcal{V}_{\sigma(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)}(\mathcal{V}_{v_1} \oplus \mathcal{V}_{v_2})$ e che $\iota_{\sigma(v_1,v_2)} \circ d\sigma_{(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)} \circ (\iota_{v_1} \oplus \iota_{v_2})$ per ogni $(v_1, v_2) \in E \oplus E$.

Definizione 4.3.13: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Un *sottofibrato orizzontale* è un sottofibrato $\mathcal{H} \subset TE$ tale che $TE = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. Dato un sottofibrato orizzontale $\mathcal{H}$, indicheremo con $\kappa: TE \to \mathcal{V}$ la proiezione associata. Diremo che un sottofibrato orizzontale è *lineare* se $\kappa_{\mu_\lambda(v)} \circ d(\mu_\lambda)_v = d(\mu_\lambda)_v \circ \kappa_v$ per ogni $v \in E$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\kappa_{\sigma(v_1,v_2)} \circ d\sigma_{(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)} \circ (\kappa_{v_1} \oplus \kappa_{v_2})$ per ogni $(v_1, v_2) \in E \oplus E$.

Esercizio 4.3.8. Dimostra che un sottofibrato orizzontale $\mathcal{H}$ è lineare se e solo se si ha $\mathcal{H}_{\mu_\lambda(v)} = d(\mu_\lambda)_v(\mathcal{H}_v)$ per ogni $v \in E$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{H}_{\sigma(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)}(\mathcal{H}_{v_1} \oplus \mathcal{H}_{v_2})$ per ogni $(v_1, v_2) \in E \oplus E$.

Definizione 4.3.14: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Una *k-forma a valori in E* è una sezione del fibrato $\bigwedge^k M \otimes E$. Indicheremo con $A^k(M; E)$ lo spazio delle k-forme a valori in E.

Esercizio 4.3.9. Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Dimostra che ∇ induce un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $D: \mathcal{E}(M) \to A^1(M; E)$ tale che

$$D(fV) = df \otimes V + f DV \tag{4.3.11}$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$ e ogni $V \in \mathcal{E}(M)$ ponendo $DV(X) = \nabla_X V$. Viceversa, dimostra che ogni applicazione $\mathbb{R}$-lineare $D: \mathcal{E}(M) \to A^1(M; E)$ che soddisfa (4.3.11) è indotta da un'unica connessione su E.

Esercizio 4.3.10. Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Dati $p \in M$ e $v \in E_p$, siano V, $\tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ tali che $V(p) = \tilde{V}(p) = v$. Dimostra che

$$d\tilde{V}_p - \iota_v \circ D\tilde{V}_p = dV_p - \iota_v \circ DV_p: T_pM \to T_vE.$$

Definizione 4.3.15: Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Per ogni $v \in E$ definiamo l'applicazione $\Theta_v: T_{\pi(v)}M \to T_vE$ data da

$$\Theta_p(X) = dV_{\pi(v)}(X) - \iota_v(\nabla_X V)$$

per ogni $X \in T_{\pi(v)}M$, dove $V \in \mathcal{E}(M)$ è una qualsiasi sezione tale che $V\bigl(\pi(v)\bigr) = v$. Il *sottofibrato orizzontale $\mathcal{H}^\nabla$ associato a ∇* è allora definito ponendo $\mathcal{H}^\nabla_v = \Theta_v(T_{\pi(v)}M)$ per ogni $v \in E$.

Esercizio 4.3.11. Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Dimostra che $\mathcal{H}^\nabla$ è effettivamente un sottofibrato orizzontale, e che è lineare.

Definizione 4.3.16: Sia $\mathcal{H}$ un sottofibrato orizzontale lineare di un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$, e sia $\kappa: TE \to \mathcal{V}$ la proiezione relativa. La *connessione $D^\mathcal{H}$ associata a $\mathcal{H}$* è l'applicazione $D^\mathcal{H}: \mathcal{E}(M) \to A^1(M; E)$ definita da $D^\mathcal{H} V = \iota_V^{-1} \circ \kappa_V \circ dV$.

Esercizio 4.3.12. Sia $\mathcal{H}$ un sottofibrato orizzontale lineare di un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Dimostra che la connessione $D^\mathcal{H}$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare che soddisfa (4.3.11), per cui proviene da una connessione su E, che indicheremo con $\nabla^\mathcal{H}$.

Esercizio 4.3.13. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Dimostra che le corrispondenze $\nabla \mapsto \mathcal{H}^\nabla$ e $\mathcal{H} \mapsto \nabla^\mathcal{H}$ sono una inversa dell'altra, per cui abbiamo una corrispondenza biunivoca fra connessioni su E e sottofibrati orizzontali lineari di TE.

4.4 La connessione di Levi-Civita

Connessioni su una varietà qualunque ne esistono a bizzeffe; ma lo scopo di questa sezione è mostrare come sia possibile definire in modo canonico una connessione particolarmente utile su ogni varietà Riemanniana.

Definizione 4.4.1: Una connessione ∇ su una varietà Riemanniana (M, g) è *compatibile con la metrica* se

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

per tutti gli X, Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$.

Proposizione 4.4.1: *Sia ∇ una connessione su una varietà Riemanniana (M,g). Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) ∇ *è compatibile con* g;
(ii) $\nabla g \equiv O$;
(iii) *in un qualunque sistema di coordinate si ha*

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il};$$

(iv) *per ogni coppia di campi vettoriali V e W lungo una curva σ abbiamo*

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle = \langle DV,W\rangle + \langle V,DW\rangle;$$

(v) *per ogni coppia di campi vettoriali V e W paralleli lungo una curva σ il prodotto $\langle V,W\rangle$ è costante;*
(vi) *il trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva è un'isometria.*

Dimostrazione: (i)$\Longleftrightarrow$(ii): per definizione,

$$\nabla g(Y,Z,X) = (\nabla_X g)(Y,Z) = X\bigl(\langle Y,Z\rangle\bigr) - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

e ci siamo.

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii): fissato un sistema di coordinate si ha

$$\nabla g(\partial_i,\partial_j,\partial_k) = \partial_k(\langle\partial_i,\partial_j\rangle) - \langle \nabla_{\partial_k}\partial_i,\partial_j\rangle - \langle \partial_i,\nabla_{\partial_k}\partial_j\rangle = \partial_k(g_{ij}) - \Gamma^l_{ki}g_{lj} - \Gamma^l_{kj}g_{il},$$

e ci siamo.

(i)$\Longrightarrow$(iv): Basta scrivere localmente $V = V^h\partial_h\circ\sigma$, $W = W^k\partial_k\circ\sigma$, e usare il fatto che

$$\frac{d}{dt}\langle\partial_h,\partial_k\rangle_\sigma = \sigma'(\langle\partial_h,\partial_k\rangle_\sigma).$$

(iv)$\Longrightarrow$(v): se $DV = DW \equiv O$ la (iv) implica che $\langle V,W\rangle$ è costante.

(v)$\Longrightarrow$(vi): infatti la (v) dice esattamente che il trasporto parallelo conserva la metrica.

(vi)$\Longrightarrow$(i): scelto $p\in M$, sia σ una curva con $\sigma(0)=p$ e $\sigma'(0)=X_p$. Fissiamo una base ortonormale $\{v_1,\dots,v_n\}$ di T_pM; per (vi) possiamo estendere ciascun v_j a un campo vettoriale $v_j(t)$ parallelo lungo σ e tale che $\{v_1(t),\dots,v_n(t)\}$ sia una base ortonormale di $T_{\sigma(t)}M$ per ogni t. Scriviamo $Y\bigl(\sigma(t)\bigr) = Y^h(t)v_h(t)$ e $Z\bigl(\sigma(t)\bigr) = Z^k(t)v_k(t)$; allora

$$\begin{aligned}\nabla_{X_p}\langle Y,Z\rangle &= \frac{d}{dt}\langle Y\bigl(\sigma(t)\bigr), Z\bigl(\sigma(t)\bigr)\rangle\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^n Y^hZ^h\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{h=1}^n\left(\frac{dY^h}{dt}(0)Z^h(0) + Y^h(0)\frac{dZ^h}{dt}(0)\right)\\ &= \left\langle \frac{dY^h}{dt}(0)v_h, Z(0)\right\rangle + \left\langle Y(0), \frac{dZ^h}{dt}(0)v_h\right\rangle = \langle D_0Y,Z\rangle + \langle Y,D_0Z\rangle\\ &= \langle\nabla_{X_p}Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_{X_p}Z\rangle,\end{aligned}$$

e ci siamo. □

Esercizio 4.4.1. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà Riemanniana (M,g). Dimostra che ∇ è compatibile con g se e solo se le 1-forme di connessione (ω^i_j) rispetto a qualsiasi riferimento locale $\{E_1,\dots,E_n\}$ di TM sono tali che

$$g_{jk}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j = dg_{ij},$$

dove $g_{ij} = g(E_i,E_j)$, come al solito. In particolare, se ∇ è compatibile con la metrica allora la matrice (ω^i_j) rispetto a un riferimento locale ortonormale è necessariamente antisimmetrica.

La compatibilità con la metrica non identifica univocamente una connessione, sfortunatamente:

Esercizio 4.4.2. Dimostra che se ∇ è una connessione compatibile con la metrica su una varietà Riemanniana (M,g), e $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ è tale che

$$\langle A(X,Y), Z\rangle + \langle Y, A(X,Z)\rangle = 0 \tag{4.4.1}$$

per ogni X, Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$ allora $\nabla + A$ è ancora una connessione compatibile con la metrica. Dimostra inoltre che se ∇^1 e ∇^2 sono due connessioni compatibili con la metrica allora $\nabla^1 - \nabla^2$ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{2}$ che soddisfa (4.4.1).

In un certo senso, un campo tensoriale che soddisfa (4.4.1) è antisimmetrico, il che fa sospettare che una connessione compatibile con la metrica e che sia simmetrica in qualche senso dovrebbe essere unica. Il concetto giusto di simmetria è rivelato dal

Lemma 4.4.2: *Data una connessione lineare ∇ su una varietà M, definiamo $\tau\colon \mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\to\mathcal{T}(M)$ ponendo*

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Allora τ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{2}$.

Dimostrazione: Siccome $\tau(Y,X) = -\tau(X,Y)$, per far vedere che τ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{2}$ grazie alla Proposizione 3.2.1.(ii) è sufficiente dimostrare che τ è $C^\infty(M)$-lineare nella prima variabile. Ma infatti

$$\tau(fX,Y) = \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] = f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)X - f[X,Y] + Y(f)X = f\tau(X,Y).$$

□

Definizione 4.4.2: La *torsione* di una connessione ∇ su una varietà M è il campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}_2^1(M)$ definito da

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

La connessione ∇ è detta *simmetrica* se $\tau \equiv O$.

Esercizio 4.4.3. Dimostra che se ∇ è una connessione lineare di torsione τ allora $\tilde\nabla = \nabla - \frac{1}{2}\tau$ è una connessione lineare simmetrica.

Lemma 4.4.3: *Sia ∇ una connessione su una varietà M. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) ∇ *è simmetrica;*
(ii) *i simboli di Christoffel rispetto a un qualsiasi sistema di coordinate sono simmetrici, cioè* $\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h$*;*
(iii) *l'Hessiano* $\nabla^2 f$ *è simmetrico per ogni* $f \in C^\infty(M)$.

Dimostrazione: (i)$\Longleftrightarrow$(ii): Fissiamo una carta locale, e scriviamo $X = X^h\partial_h$ e $Y = Y^k\partial_k$. Allora (4.3.1) ci dà

$$\tau(X,Y) = X^hY^k[\Gamma_{hk}^j - \Gamma_{kh}^j]\partial_j,$$

per cui $\tau(X,Y)\equiv O$ per ogni X, $Y\in\mathcal{T}(M)$ se e solo se i simboli di Christoffel sono simmetrici.

(i)$\Longleftrightarrow$(iii): Grazie a (4.3.9) abbiamo

$$\nabla^2 f(X,Y) - \nabla^2 f(Y,X) = -[X,Y](f) - \nabla_Y X(f) + \nabla_X Y(f) = \tau(X,Y)(f),$$

e ci siamo. □

Esercizio 4.4.4. Trova una connessione lineare ∇ compatibile con una metrica Riemanniana g tale che $\tilde\nabla = \nabla - \frac{1}{2}\tau$ non sia compatibile con g, dove τ è la torsione di ∇.

Esercizio 4.4.5. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, $\{E_1,\ldots,E_n\}$ un riferimento locale di TM, $\{\varphi^1,\ldots,\varphi^n\}$ il riferimento duale di T^*M, e (ω^i_j) la matrice delle 1-forme di connessione. Sia infine τ la torsione di ∇, e definiamo $\tau^j\colon \mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\to C^\infty(M)$ per $j=1,\ldots,n$ tramite la formula

$$\tau(X,Y)=\tau^j(X,Y)E_j.$$

Dimostra che $\tau^1,\ldots,\tau^n$ sono delle 2-forme locali (dette *forme di torsione*), e dimostra la *prima equazione di struttura di Cartan:*

$$d\varphi^j=\varphi^i\wedge\omega^j_i+\tau^j$$

per $j=1,\ldots,n$.

Il risultato che permette alla geometria Riemanniana di prendere davvero vita è il seguente:

Teorema 4.4.4: *Su ogni varietà Riemanniana (M,g) esiste un'unica connessione ∇ simmetrica e compatibile con la metrica. Inoltre, ∇ soddisfa*

$$\langle\nabla_X Y,Z\rangle=\frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle\}\tag{4.4.2}$$

per ogni X, Y, $Z\in\mathcal{T}(M)$. In particolare, se $\{E_1,\ldots,E_n\}$ è un riferimento locale ortonormale abbiamo

$$\langle\nabla_{E_i}E_j,E_k\rangle=\frac{1}{2}\Big\{\langle[E_i,E_j],E_k\rangle-\langle[E_j,E_k],E_i\rangle+\langle[E_k,E_i],E_j\rangle\Big\},\tag{4.4.3}$$

mentre i simboli di Christoffel di ∇ sono dati da

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).\tag{4.4.4}$$

Dimostrazione: Cominciamo con l'unicità. Se ∇ è una connessione compatibile con g si deve avere

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle&=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle,\\ Y\langle Z,X\rangle&=\langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle,\\ Z\langle X,Y\rangle&=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle.\end{aligned}$$

Quindi se ∇ è anche simmetrica otteniamo

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle&=\langle\nabla_X Z-\nabla_Z X,Y\rangle+\langle\nabla_Y Z-\nabla_Z Y,X\rangle+\langle\nabla_X Y+\nabla_Y X,Z\rangle\\ &=-\langle[Z,X],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle+2\langle\nabla_X Y,Z\rangle,\end{aligned}$$

e quindi ∇ è data da (4.4.2).

Viceversa, definiamo $\nabla\colon\mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\to\mathcal{T}(M)$ tramite (4.4.2); dobbiamo verificare che otteniamo una connessione simmetrica compatibile con la metrica. Iniziamo mostrando che il secondo membro di (4.4.2) è $C^\infty(M)$-lineare in Z; infatti

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y,fZ\rangle&=\frac{1}{2}\{X\langle Y,fZ\rangle+Y\langle fZ,X\rangle-fZ\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],fZ\rangle-\langle[Y,fZ],X\rangle+\langle[fZ,X],Y\rangle\}\\ &=f\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\frac{1}{2}\{X(f)\langle Y,Z\rangle+Y(f)\langle Z,X\rangle-Y(f)\langle Z,X\rangle-X(f)\langle Z,Y\rangle\}\\ &=f\langle\nabla_X Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

Quindi $\langle\nabla_X Y,\cdot\rangle$ è una 1-forma, per cui $\nabla_X Y=\langle\nabla_X Y,\cdot\rangle^\#$ è effettivamente un campo vettoriale.

Poi, ∇ è $C^\infty(M)$-lineare nel primo argomento:

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{fX}Y,Z\rangle&=\frac{1}{2}\Big\{fX\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,fX\rangle-Z\langle fX,Y\rangle+\langle[fX,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],fX\rangle+\langle[Z,fX],Y\rangle\Big\}\\&=f\langle\nabla_XY,Z\rangle+\frac{1}{2}\Big\{Y(f)\langle Z,X\rangle-Z(f)\langle X,Y\rangle-Y(f)\langle X,Z\rangle+Z(f)\langle X,Y\rangle\Big\}=\langle f\nabla_XY,Z\rangle,\end{aligned}$$

come voluto. In modo analogo (esercizio) si verifica la formula di Leibniz. Controlliamo ora la compatibilità con la metrica:

$$\begin{aligned}\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle&=\frac{1}{2}\Big\{X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle\Big\}\\&\quad+\frac{1}{2}\Big\{X\langle Z,Y\rangle+Z\langle Y,X\rangle-Y\langle X,Z\rangle+\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Z,Y],X\rangle+\langle[Y,X],Z\rangle\Big\}\\&=X\langle Y,Z\rangle,\end{aligned}$$

come desiderato. Infine è facile vedere (esercizio) che ∇ è anche simmetrica.

La (4.4.2) chiaramente implica la (4.4.3). Infine, siccome $[\partial_h,\partial_k]=O$ per ogni h, $k=1,\dots,n$, abbiamo

$$g_{kl}\Gamma^k_{ij}=\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l\rangle=\frac{1}{2}\big(\partial_i(g_{jl})+\partial_j(g_{li})-\partial_l(g_{ij})\big),$$

e la (4.4.4) segue. □

Definizione 4.4.3: Sia M una varietà Riemanniana. L'unica connessione ∇ simmetrica e compatibile con la metrica si dice *connessione di Levi-Civita* della varietà Riemanniana M.

Osservazione 4.4.1. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato solo il fatto che $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_p$ fosse un prodotto scalare non-degenere, e non che fosse definito positivo. Quindi è possibile definire una connessione di Levi-Civita in varietà equipaggiate con un campo tensoriale $g\in\mathcal{T}_2(M)$ simmetrico e non-degenere (cioè tale che $g_p(v,w)=0$ per ogni $w\in T_pM$ implica $v=O$). Questo è utile, per esempio, in relatività generale.

Esempio 4.4.1. La connessione piatta è la connessione di Levi-Civita per la metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 4.4.2. Sia M una varietà Riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇^M, e N una sottovarietà di M. Se indichiamo con $\pi\colon TM\to TN$ la proiezione ortogonale (dove: per ogni $p\in N$ consideriamo T_pN come sottospazio di T_pM, e $\pi|_{T_pM}\colon T_pM\to T_pN$ è la proiezione ortogonale rispetto al prodotto scalare dato dalla metrica su M), allora si verifica facilmente (esercizio) che $\nabla^N\colon\mathcal{T}(N)\times\mathcal{T}(N)\to\mathcal{T}(N)$ data da

$$\forall X,Y\in\mathcal{T}(N)\qquad\qquad \nabla^N_XY=\pi(\nabla^M_XY)$$

è una connessione simmetrica, in quanto ∇^M lo è. Inoltre, se mettiamo su N la metrica g^N indotta da quella di M, si vede subito (esercizio) che ∇^N è compatibile con g^N, e quindi ∇^N è proprio la connessione di Levi-Civita di N considerata con la metrica indotta.

Esercizio 4.4.6. Dimostra che se M è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ equipaggiata con la metrica indotta dalla metrica euclidea, allora i simboli di Christoffel introdotti nella teoria classica delle superfici coincidono con quelli introdotti qui.

Una conseguenza immediata dell'unicità della connessione di Levi-Civita è la seguente

Proposizione 4.4.5: *Sia $F\colon(M,g)\to(\tilde M,\tilde g)$ un'isometria fra due varietà Riemanniane. Allora:*

(i) *F porta la connessione di Levi-Civita ∇ di M nella connessione di Levi-Civita $\tilde\nabla$ di $\tilde M$ nel senso che*

$$\forall X,Y\in\mathcal{T}(M)\qquad\qquad dF(\nabla_XY)=\tilde\nabla_{dF(X)}dF(Y);$$

(ii) *se σ è una curva in M si ha*

$$\forall V\in\mathcal{T}(\sigma)\qquad\qquad dF(DV)=\tilde D\big(dF(V)\big),$$

dove D (rispettivamente, $\tilde{D}$) è la derivata covariante lungo la curva σ (rispettivamente, $\tilde{\sigma} = F \circ \sigma$) indotta da ∇ (rispettivamente, $\tilde{\nabla}$).

Dimostrazione: (i) Definiamo un'applicazione $F^*\tilde{\nabla}: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ ponendo

$$\forall X, Y \in \mathcal{T}(M) \qquad (F^*\tilde{\nabla})_X Y = (dF)^{-1}\bigl(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)\bigr).$$

Si vede subito che $F^*\tilde{\nabla}$ è una connessione su M. Inoltre

$$\begin{aligned}
\langle (F^*\tilde{\nabla})_X Y, Z\rangle_M + \langle Y, (F^*\tilde{\nabla})_X Z\rangle_M &= \bigl\langle (dF)^{-1}\bigl(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)\bigr), Z\bigr\rangle_M + \bigl\langle Y, (dF)^{-1}\bigl(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Z)\bigr)\bigr\rangle_M \\
&= \langle \tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y), dF(Z)\rangle_{\tilde{M}} + \langle dF(Y), \tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Z)\rangle_{\tilde{M}} \\
&= dF(X)\bigl(\langle dF(Y), dF(Z)\rangle_{\tilde{M}}\bigr) = dF(X)\bigl(\langle Y, Z\rangle_M \circ F^{-1}\bigr) \\
&= X\langle Y, Z\rangle_M,
\end{aligned}$$

per cui $F^*\tilde{\nabla}$ è compatibile con la metrica. Infine

$$\begin{aligned}
(F^*\tilde{\nabla})_X Y - (F^*\tilde{\nabla})_Y X - [X, Y] &= (dF)^{-1}\bigl(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y) - \tilde{\nabla}_{dF(Y)} dF(X)\bigr) - [X, Y] \\
&= (dF)^{-1}\bigl([dF(X), dF(Y)]\bigr) - [X, Y] \\
&= O,
\end{aligned}$$

(dove abbiamo usato l'Esercizio 3.3.3), per cui $F^*\tilde{\nabla}$ è simmetrica. Il Teorema 4.4.4 implica allora $F^*\tilde{\nabla} = \nabla$, come voluto.

(ii) Se si definisce $F^*\tilde{D}: \mathcal{T}(\sigma) \to \mathcal{T}(\sigma)$ con

$$(F^*\tilde{D})V = (dF)^{-1}\bigl(\tilde{D} dF(V)\bigr),$$

l'unicità di D enunciata nella Proposizione 4.3.3 (assieme a $F^*\tilde{\nabla} = \nabla$) implicano che $F^*\tilde{D} = D$, e ci siamo. $\square$

Esercizio 4.4.7. Sia $F: M \to N$ un'immersione globalmente iniettiva, e g una metrica Riemanniana su N. Indichiamo con ∇ la connessione di Levi-Civita su N, e per ogni $p \in M$ sia $\pi_p: T_{F(p)}N \to dF_p(T_pM)$ la proiezione ortogonale. Definiamo $F^*\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ ponendo

$$F^*\nabla_X Y(p) = (dF_p)^{-1}\bigl(\pi_p\bigl(\nabla_{dF_p(X)} dF(Y)\bigr)\bigr).$$

Dimostra che $F^*\nabla$ è la connessione di Levi-Civita della metrica F^*g su M.

Avendo a disposizione una connessione e una metrica possiamo introdurre la generalizzazione di un altro concetto dell'Analisi classica. Per farlo ci serve un risultato di algebra lineare che lasciamo per esercizio.

Definizione 4.4.4: La *traccia* di una forma bilineare simmetrica $S: V \times V \to \mathbb{R}$ su uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto scalare definito positivo è definita da

$$\operatorname{tr}(S) = \sum_{j=1}^{n} S(v_j, v_j), \tag{4.4.5}$$

dove $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una qualunque base ortonormale di V.

Esercizio 4.4.8. Verifica che il secondo membro di (4.4.5) non dipende dalla base ortonormale scelta, per cui la traccia di una forma bilineare simmetrica è ben definita.

Definizione 4.4.5: Sia M una varietà Riemanniana, e $f \in C^\infty(M)$. Diremo *Laplaciano* di f la funzione

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\nabla^2 f),$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di f.

Esercizio 4.4.9. Dimostra che
$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad}(f),$$
e che in coordinate locali si ha
$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{G}\, g^{jk}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right),$$
dove $G = \det(g_{ij})$.

Concludiamo questo capitolo determinando la connessione di Levi-Civita in alcuni casi particolarmente significativi. Nell'Esempio 4.4.1 abbiamo trovato la connessione di Levi-Civita per $\mathbb{R}^n$; vediamo adesso l'aspetto delle connessioni di Levi-Civita sulla sfera e sullo spazio iperbolico.

Esempio 4.4.3. Sia g_R la metrica sferica su $S^n_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (Esempio 4.2.1); vogliamo calcolare i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita di g_R rispetto alle coordinate sferiche. Conservando le notazioni introdotte nell'Esempio 4.2.1 abbiamo
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^l} = \begin{cases} 2R^2(\sin\theta^{l+1}\cdots\sin\theta^n)^2\dfrac{\cos\theta^l}{\sin\theta^l} & \text{se } i=j<l,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$
Quindi (4.4.4) ci dà
$$\Gamma^k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta^{\max\{i,j\}}}{\sin\theta^{\max\{i,j\}}} & \text{se } k=i<j \text{ o } k=j<i,\\ -\dfrac{1}{2}(\sin\theta^{i+1}\cdots\sin\theta^{k-1})^2\sin(2\theta^k) & \text{se } i=j<k,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$
In particolare, per la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ otteniamo
$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{22}=0,\quad \Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\operatorname{ctg}\theta^2,\quad \Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2}\sin(2\theta^2).$$

Esempio 4.4.4. Calcoliamo i simboli di Christoffel per la connessione di Levi-Civita sullo spazio iperbolico (Esempio 4.2.3). Cominciamo con B^n_R; una base dello spazio tangente è data da $\{\partial/\partial x^1,\ldots,\partial/\partial x^n\}$, per cui
$$g_{ij} = \frac{4R^4}{(R^2-\|x\|^2)^2}\,\delta_{ij},\qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{16R^4x^k}{(R^2-\|x\|^2)^3}\delta_{ij},$$
e quindi
$$\Gamma^k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2x^j}{R^2-\|x\|^2} & \text{se } i=k,\\ \dfrac{2x^i}{R^2-\|x\|^2} & \text{se } j=k\neq i,\\ -\dfrac{2x^k}{R^2-\|x\|^2} & \text{se } i=j\neq k,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$
Nel caso di H^n_R, la base dello spazio tangente è la stessa, ma
$$g_{ij} = \frac{R^2}{(x^n)^2}\delta_{ij},\qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -\frac{2R^2}{(x^n)^3}\delta_{ij}\delta_{kn},$$
per cui
$$\Gamma^k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} & \text{se } i=j<k=n,\\ -\dfrac{1}{x^n} & \text{se } i=k<j=n \text{ o } j=k<i=n \text{ o } i=j=k=n,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Esercizio 4.4.10. Calcola i simboli di Christoffel della metrica g^1_R di U^n_R rispetto alle coordinate locali

$$\varphi(u^1,\dots,u^n)=\left(u^1,\dots,u^n,\sqrt{R^2+\|u\|^2}\right).$$

ESEMPIO 4.4.5. Sia G un gruppo di Lie su cui abbiamo messo una metrica invariante a sinistra g, e indichiamo con $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie, e con ∇ la connessione di Levi-Civita. Prima di tutto, è facile verificare che ∇ è invariante a sinistra, cioè che

$$\nabla_X Y(h)=dL_h\big(\nabla_{dL_{h^{-1}}(X)}dL_{h^{-1}}(Y)(e)\big) \tag{4.4.6}$$

per ogni X, $Y\in\mathcal{T}(G)$ e $h\in G$. Infatti, se usiamo il lato destro di (4.4.6) per definire una nuova connessione $\tilde\nabla$, si vede subito che $\tilde\nabla$ è (effettivamente una connessione ed è) simmetrica e compatibile con la metrica, per cui coincide con ∇. Se $\{X_1,\dots,X_n\}$ è una base di $\mathfrak{g}$, estendiamo gli X_j a campi vettoriali invarianti a sinistra. Chiaramente otteniamo un riferimento globale per TG, e ogni campo vettoriale su G (non necessariamente invariante a sinistra) si scrive come combinazione lineare a coefficienti in $C^\infty(G)$ di $X_1,\dots,X_n$. Quindi per determinare ∇ ci basta vedere quanto fa applicata agli X_j; e per l'invarianza a sinistra ci basta effettuare questo calcolo nell'identità. Ora, l'invarianza a sinistra di g implica che $g_{ij}=\langle X_i,X_j\rangle$ è costante su G; quindi la (4.4.2) ci dice che

$$\langle\nabla_{X_i}X_j,X_k\rangle_e=\frac{1}{2}\big(g_{lk}c^l_{ij}-g_{li}c^l_{jk}+g_{lj}c^l_{ki}\big), \tag{4.4.7}$$

dove le c^l_{ij} sono le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ rispetto alla base $\{X_1,\dots,X_n\}$ (vedi la Definizione 3.3.10), e abbiamo determinato ∇.

ESEMPIO 4.4.6. Sia $G=GL(n,\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili a coefficienti reali. Prendiamo come base di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ la base canonica $\{E_{ij}\}$, dove E_{ij} è la matrice con 1 al posto (i,j) e 0 altrove, cioè

$$(E_{ij})_{rs}=\delta_{ir}\delta_{js}.$$

Abbiamo visto (Esempio 3.3.2) che le costanti di struttura sono

$$c^{(rs)}_{(ij)(hk)}=\delta_{ir}\delta_{ks}\delta_{jh}-\delta_{rh}\delta_{sj}\delta_{ik}.$$

Mettiamo su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ il prodotto scalare rispetto a cui la base canonica $\{E_{ij}\}$ è ortonormale, ed estendiamolo in modo da avere una metrica Riemanniana invariante a sinistra (che *non* è la metrica euclidea). Allora la (4.4.7) ci fornisce la connessione di Levi-Civita rispetto a questa metrica:

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{E_{ij}}E_{hk},E_{rs}\rangle&=\frac{1}{2}[c^{(rs)}_{(ij)(hk)}-c^{(ij)}_{(hk)(rs)}+c^{(hk)}_{(rs)(ij)}]\\&=\frac{1}{2}[\delta_{ir}\delta_{kj}\delta_{jh}-\delta_{hr}\delta_{js}\delta_{ik}-\delta_{hi}\delta_{sj}\delta_{kr}+\delta_{ir}\delta_{jk}\delta_{hs}+\delta_{hr}\delta_{jk}\delta_{is}-\delta_{ih}\delta_{ks}\delta_{jr}].\end{aligned}$$

Capitolo 5

Geodetiche

5.1 La mappa esponenziale

Il concetto chiave che ci permetterà di penetrare nella struttura geometrica delle varietà Riemanniane è quello di geodetica.

Definizione 5.1.1: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Una *geodetica* per ∇ è una curva $\sigma: I \to M$ tale che $D\dot\sigma \equiv 0$. In altre parole σ è una geodetica se e solo se il vettore tangente $\dot\sigma$ è parallelo lungo σ.

Osservazione 5.1.1. Il simbolo $\dot\sigma$ verrà usato per indicare il vettore tangente a σ anche quando σ non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. In altre parole, σ' e $\dot\sigma$ sono la stessa cosa.

Se (U, φ) è una carta locale e scriviamo $\sigma^j = \varphi^j \circ \sigma$, da (4.3.3) vediamo che la curva σ è una geodetica se e solo se soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot\sigma^k + (\Gamma^k_{ij} \circ \sigma)\, \dot\sigma^i \dot\sigma^j = 0. \tag{5.1.1}$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Possiamo trasformarlo in un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine introducendo delle variabili ausiliarie $v^1, \ldots, v^n$ per rappresentare le componenti di $\dot\sigma$ (vedi più oltre la dimostrazione della Proposizione 5.1.2 per il significato geometrico di questa operazione), in modo da ridurci al sistema equivalente del primo ordine

$$\begin{cases} \dot v^k + (\Gamma^k_{ij} \circ \sigma)\, v^i v^j = 0, \\ \dot\sigma^k = v^k. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

In particolare:

Proposizione 5.1.1: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ esistono un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in I$ e una geodetica $\sigma: I \to M$ tale che $\sigma(0) = p$ e $\dot\sigma(0) = v$. Inoltre, se $\tilde\sigma: \tilde I \to M$ è un'altra geodetica soddisfacente le stesse condizioni allora σ e $\tilde\sigma$ coincidono in $I \cap \tilde I$.*

Dimostrazione: Il Teorema 3.3.3 applicato a (5.1.2) ci dice che esistono $\varepsilon > 0$ e una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset M$ che sia soluzione di (5.1.1) con condizioni iniziali $\sigma(0) = p$ e $\dot\sigma(0) = v$. Inoltre, se $\tilde\sigma$ è un'altra geodetica che soddisfa le stesse condizioni iniziali allora σ e $\tilde\sigma$ coincidono in un qualche intorno di 0. Sia I_0 il massimo intervallo contenuto in $I \cap \tilde I$ su cui σ e $\tilde\sigma$ coincidono. Se I_0 è strettamente contenuto in $I \cap \tilde I$, esiste un estremo t_0 di I_0 contenuto in $I \cap \tilde I$, e possiamo applicare il solito Teorema 3.3.3 con condizioni iniziali $\sigma(t_0)$ e $\dot\sigma(t_0)$. Ma allora σ e $\tilde\sigma$ coincidono anche in un intorno di t_0, contro la definizione di I_0. Quindi $I_0 = I \cap \tilde I$. □

Definizione 5.1.2: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, $p \in M$ e $v \in T_pM$. Indicheremo con $\sigma_v: I \to M$ l'unica geodetica *massimale* (che esiste per la proposizione precedente) tale che $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$.

Vogliamo ora studiare come dipendono le geodetiche dalle condizioni iniziali. Per far ciò, mostriamo come associare alle geodetiche delle traiettorie di un opportuno campo vettoriale definito sul fibrato tangente TM.

Ogni curva liscia $\sigma: I \to M$ definisce la curva dei vettori tangenti $\dot\sigma: I \to TM$. L'equazione (5.1.1) è in realtà un'affermazione su quest'ultima curva:

Proposizione 5.1.2: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora esiste un unico campo vettoriale $G \in \mathcal{T}(TM)$ le cui traiettorie siano tutte e sole le curve $\dot\sigma\colon I \to TM$ con $\sigma\colon I \to M$ geodetica in M.*

Dimostrazione: Cominciamo col riscrivere (5.1.1) in una forma più utile ai nostri scopi. Come visto nell'Esempio 3.2.2, una carta locale (U, φ) per M determina una carta locale $(TU, \tilde\varphi)$ di TM ponendo

$$\tilde\varphi(v) = (x^1, \ldots, x^n; v^1, \ldots, v^n) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

per ogni $p \in U$ e $v \in T_pM$, dove $(x^1, \ldots, x^n) = \varphi(p)$ e $v = v^j \partial_j|_p$. Sia $\sigma\colon I \to M$ una curva con sostegno contenuto in U, in modo da poter scrivere $\varphi \circ \sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$. Allora la curva $\dot\sigma$ è rappresentata in queste coordinate locali da $\tilde\varphi \circ \dot\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n; \dot\sigma^1, \ldots, \dot\sigma^n)$, in quanto $\dot\sigma = \dot\sigma^j \partial_j$.

Sia ora $\gamma\colon I \to TM$ una qualsiasi curva con sostegno contenuto in TU, per cui possiamo scrivere

$$\tilde\varphi \circ \gamma(t) = \bigl(x^1(t), \ldots, x^n(t); v^1(t), \ldots, v^n(t)\bigr)$$

per opportune funzioni $x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n \in C^\infty(I)$. Allora γ è una curva della forma $\dot\sigma$ per una qualche curva $\sigma\colon I \to U$ se e solo se $v^j \equiv \dot x^j$ per $j = 1, \ldots, n$; quindi γ è una curva della forma $\dot\sigma$ con σ geodetica se e solo se $\tilde\varphi \circ \gamma$ soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{dx^k}{dt} = v^k, \\ \dfrac{dv^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij}(x) v^i v^j. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Nell'Esempio 3.2.2 abbiamo visto che un riferimento locale per $T(TM)$ sopra TU è ovviamente dato da $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n; \partial/\partial v^1, \ldots, \partial/\partial v^n\}$; la (5.1.3) suggerisce allora di introdurre il campo vettoriale (per il momento definito solo sopra TU e dipendente dalle coordinate locali scelte)

$$G = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ij} v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k}. \tag{5.1.4}$$

La (5.1.3) dice esattamente che $\gamma\colon I \to TU$ è una traiettoria di G in TU se e solo se $\sigma = \pi \circ \gamma$ è una geodetica per ∇ in U e $\gamma = \dot\sigma$ (dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica).

Quindi per concludere la dimostrazione rimane solo da verificare che G non dipende dalle coordinate scelte, per cui si estende a un campo vettoriale globale su TM. Per far ciò basta far vedere che per ogni $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\mathbf{f} \in C^\infty(v)$ il numero $G(v)(\mathbf{f})$ è indipendente dalle coordinate. Basta quindi dimostrare, per esempio, che

$$G(v)(\mathbf{f}) = \frac{d(f \circ \dot\sigma_v)}{dt}(0),$$

dove f è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{f}$. Ma infatti

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \dot\sigma_v)}{dt}(0) &= \frac{\partial f}{\partial x^k}(v)\dot\sigma_v^k(0) + \frac{\partial f}{\partial v^k}(v)\ddot\sigma_v^k(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^k}(v) v^k - \frac{\partial f}{\partial v^k}(v)\Gamma^k_{ij}(p) v^i v^j = G(v)(\mathbf{f}), \end{aligned}$$

e ci siamo. □

Definizione 5.1.3: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Il campo $G \in \mathcal{T}(TM)$ definito localmente da (5.1.4) è detto *campo geodetico*, e il suo flusso *flusso geodetico*.

La conseguenza principale di questo risultato è che ci permette di applicare il Teorema 3.3.4 allo studio delle geodetiche, e quindi di controllare simultaneamente il comportamento di tutte le geodetiche uscenti da un unico punto. Per enunciare al meglio questo risultato, ci servono un lemma e una definizione.

Lemma 5.1.3: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, $p \in M$, $v \in T_pM$ e $c, t \in \mathbb{R}$. Allora si ha*

$$\sigma_{cv}(t) = \sigma_v(ct) \tag{5.1.5}$$

non appena uno dei due membri è definito.

Dimostrazione: Se $c = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Se $c \neq 0$, cominciamo col dimostrare che (5.1.5) vale non appena $\sigma_v(ct)$ esiste. Poniamo $\tilde{\sigma}(t) = \sigma_v(ct)$; chiaramente $\tilde{\sigma}(0) = p$ e $\dot{\tilde{\sigma}}(0) = cv$, per cui basta dimostrare che $\tilde{\sigma}$ è una geodetica. Ma infatti se indichiamo con $\tilde{D}$ la derivata covariante lungo $\tilde{\sigma}$ abbiamo

$$\tilde{D}_t\dot{\tilde{\sigma}} = \left[\frac{d}{dt}\dot{\tilde{\sigma}}^k(t) + \Gamma^k_{ij}\bigl(\tilde{\sigma}(t)\bigr)\dot{\tilde{\sigma}}^i(t)\dot{\tilde{\sigma}}^j(t)\right]\partial_k = \bigl[c^2\ddot{\sigma}^k_v(ct) + c^2\Gamma^k_{ij}\bigl(\sigma_v(ct)\bigr)\dot{\sigma}^i_v(ct)\dot{\sigma}^j_v(ct)\bigr]\partial_k = c^2 D_{ct}\dot{\sigma}_v = O,$$

e ci siamo.

Infine, supponiamo che $\sigma_{cv}(t)$ esista, e poniamo $v' = cv$ e $s = ct$. Allora $\sigma_{cv}(t) = \sigma_{v'}(c^{-1}s)$ esiste, per cui è uguale a $\sigma_{c^{-1}v'}(s) = \sigma_v(ct)$, e ci siamo. □

Definizione 5.1.4: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Il *dominio della mappa esponenziale* è l'insieme

$$\mathcal{E} = \{v \in TM \mid \sigma_v \text{ è definita in un intervallo contenente } [0,1]\} \subset TM.$$

La *mappa esponenziale* $\exp\colon \mathcal{E} \to M$ di ∇ è allora definita da $\exp(v) = \sigma_v(1)$. Inoltre, se $p \in M$ scriveremo $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$ e $\exp_p = \exp|_{\mathcal{E}_p}$.

Il motivo per cui quest'applicazione si chiama "esponenziale" si può far risalire al seguente esercizio (ma vedi anche il Teorema 5.4.7 più oltre):

Esercizio 5.1.1. Consideriamo $\mathbb{R}^+$ con la metrica $\|t\|_h = h^{-1}|t|$ per ogni $h \in \mathbb{R}^+$ e $t \in T_h\mathbb{R}^+$, dove abbiamo identificato $T_h\mathbb{R}^+$ con $\mathbb{R}$ come al solito. Dimostra che $\exp_h\colon T_h\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è data dalla formula $\exp_1(t) = he^t$.

Il Teorema 3.3.4 ci fornisce allora le seguenti proprietà della mappa esponenziale:

Teorema 5.1.4: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora:*

(i) *L'insieme $\mathcal{E}$ è un intorno aperto della sezione nulla di TM, e ciascun $\mathcal{E}_p$ è stellato rispetto all'origine.*
(ii) *Per ogni $v \in TM$ la geodetica massimale σ_v è data da*

$$\sigma_v(t) = \exp(tv)$$

per tutti i $t \in \mathbb{R}$ per cui uno dei due membri è definito.
(iii) *La mappa esponenziale è di classe C^∞.*

Dimostrazione: Il Lemma 5.1.3 applicato con $t = 1$ dice esattamente che $\exp(cv) = \sigma_{cv}(1) = \sigma_v(c)$ non appena uno dei due membri è definito, per cui (ii) è soddisfatta. In particolare, se $0 \leq t \leq 1$ e $v \in \mathcal{E}$ abbiamo che $\exp(tv) = \sigma_{tv}(1) = \sigma_v(t)$ è definito, per cui ciascun $\mathcal{E}_p$ è stellato rispetto all'origine.

Ora, per la Proposizione 5.1.2 le geodetiche di ∇ sono la proiezione delle traiettorie del campo geodetico G. Indichiamo con $\Gamma\colon \mathcal{U} \to TM$ il flusso del campo geodetico che, grazie al Teorema 3.3.4, è definito in un intorno aperto $\mathcal{U}$ di $\{0\} \times TM$ in $\mathbb{R} \times TM$. In particolare, $v \in \mathcal{E}$ se e solo se $(1, v) \in \mathcal{U}$; ma allora $\mathcal{E} = \pi_2\bigl(\mathcal{U} \cap (\{1\} \times TM)\bigr)$, dove $\pi_2\colon \mathbb{R} \times TM \to TM$ è la proiezione sulla seconda coordinata, per cui $\mathcal{E}$ è aperto. Infine, sempre per il Teorema 3.3.4 il flusso di G è di classe C^∞, per cui la mappa esponenziale, essendo data dalla formula $\exp(v) = \pi_2\bigl(\Gamma(1, v)\bigr)$, è anch'essa di classe C^∞. □

Essendo la mappa esponenziale differenziabile, possiamo calcolarne il differenziale. In particolare, è interessante considerare $d(\exp_p)_O\colon T_O(T_pM) \to T_pM$; infatti, essendo T_pM uno spazio vettoriale, possiamo identificare canonicamente $T_O(T_pM)$ con T_pM, per cui $d(\exp_p)_O$ risulta essere un endomorfismo di T_pM. Ed è un endomorfismo molto particolare:

Proposizione 5.1.5: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, e $p \in M$. Allora $d(\exp_p)_O = \mathrm{id}$. In particolare, esistono un intorno U di O in T_pM e un intorno V di p in M tali che $\exp_p|_U\colon U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

Dimostrazione: Dato $v \in T_O(T_pM) = T_pM$, una curva in T_pM che parte da O tangente a v è $\gamma(t) = tv$. Allora

$$d(\exp_p)_O(v) = \frac{d}{dt}\exp_p\bigl(\gamma(t)\bigr)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp_p(tv)\Big|_{t=0} = \dot\sigma_v(0) = v.$$

La seconda affermazione segue dal teorema della funzione inversa. □

Definizione 5.1.5: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, e $p \in M$. Un intorno aperto V di p in M diffeomorfo tramite $\exp_p$ a un intorno stellato U di O in T_pM è detto *intorno normale* di p.

Tutto quanto visto finora chiaramente si applica anche alla connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana. Inoltre, in questo caso possiamo introdurre le definizioni seguenti:

Definizione 5.1.6: Sia ∇ la connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana (M, g), e $p \in M$. Indichiamo con $B_\varepsilon(O_p) \subset T_pM$ la palla aperta rispetto alla metrica g di centro l'origine e raggio $\varepsilon > 0$ in T_pM. Il *raggio d'iniettività* $\mathrm{inj\,rad}(p) \in \mathbb{R}^+$ di M in p è definito da

$$\mathrm{inj\,rad}(p) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exp_p \text{ ristretto a } B_\varepsilon(O_p) \text{ è un diffeomorfismo con l'immagine}\}.$$

La *palla geodetica* $B_\varepsilon(p)$ di centro p e raggio $0 < \varepsilon \le \mathrm{inj\,rad}(p)$ in M è l'intorno normale di p della forma $\exp_p\bigl(B_\varepsilon(O_p)\bigr)$. Il suo bordo $\partial B_\varepsilon(p) = \exp_p\bigl(\partial B_\varepsilon(O_p)\bigr)$ è detto *sfera geodetica.* Le geodetiche in $B_\varepsilon(p)$ uscenti da p sono dette *geodetiche radiali.* Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ è una base ortonormale di T_pM, e $\chi\colon T_pM \to \mathbb{R}^n$ è l'isomorfismo dato dalle coordinate rispetto a questa base, allora le coordinate $\varphi = \chi \circ \exp_p^{-1}\colon B_\varepsilon(p) \to \mathbb{R}^n$ sono dette *coordinate normali* centrate in p.

Il raggio d'iniettività chiaramente dipende dal punto. Non è necessariamente continuo, ma ha estremo inferiore strettamente positivo sui compatti. Per dimostrarlo, introduciamo la seguente

Definizione 5.1.7: Il *raggio d'iniettività* di un sottoinsieme $C \subseteq M$ è il numero

$$\mathrm{inj\,rad}(C) = \inf\{\mathrm{inj\,rad}(q) \mid q \in C\}.$$

Diremo che un aperto $W \subseteq M$ è *uniformemente normale* se ha raggio d'iniettività positivo. In altre parole, esiste $\delta > 0$ tale che $\exp_q$ è un diffeomorfismo in $B_\delta(O_q)$ per ogni $q \in W$.

Allora

Proposizione 5.1.6: *Sia ∇ la connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana (M, g). Allora ogni $p \in M$ ha un intorno uniformemente normale W.*

Dimostrazione: Dati un intorno V di p e $\delta > 0$, gli insiemi

$$V_\delta = \{v \in TM \mid q = \pi(v) \in V, \|v\|_q < \delta_1\},$$

dove, come al solito, $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica, formano un sistema fondamentale d'intorni di O_p. Siccome $O_p \in \mathcal{E}$, possiamo trovare V e $\delta_1 > 0$ tali che $V_{\delta_1} \subset \mathcal{E}$

Sia $E\colon V_{\delta_1} \to M \times M$ data da $E(v) = \bigl(\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v)\bigr)$; cominciamo col dimostrare che E è invertibile in un intorno di O_p.

A meno di restringere V, possiamo supporre che sia il dominio di una carta locale $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ centrata in p. Come già visto nel corso della dimostrazione della Proposizione 5.1.2, φ induce coordinate locali $\tilde\varphi = (x^1, \ldots, x^n; v^1, \ldots, v^n)$ in V_{δ_1}. Una base di $T_{O_p}V_{\delta_1}$ è quindi $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n, \partial/\partial v^1, \ldots, \partial/\partial v^n\}$. Una curva γ in V_{δ_1} con $\gamma(0) = O_p$ e $\dot\gamma(0) = \partial/\partial v^j|_{O_p}$ è $\gamma(t) = t\,\partial/\partial x^j|_p$. Quindi

$$dE_{O_p}\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) = \frac{d}{dt}E\bigl(\gamma(t)\bigr)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\bigl(p, \exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)\bigr)\Big|_{t=0} = \left(O_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right).$$

D'altra parte, una curva τ in V_{δ_1} con $\tau(0) = O_p$ e $\dot\tau(0) = \partial/\partial x^j|_{O_p}$ è $\tau(t) = O_{\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)}$; quindi

$$\begin{aligned} dE_{O_p}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \frac{d}{dt}\bigl(\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p), \exp_{\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)}(O)\bigr)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\bigl(\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p), \exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)\bigr)\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right). \end{aligned}$$

Quindi dE_{O_p}, mandando una base di $T_{O_p}V_{\delta_1}$ in una base di $T_pM \times T_pM$, è non singolare, per cui esistono un intorno $W \subset V$ di p e un $0 < \delta < \delta_1$ tali che $E|_{W_\delta}$ sia un diffeomorfismo. Ma questo implica in particolare che per ogni $q \in W$ la mappa esponenziale $\exp_q\colon B_\delta(O_q) \to B_\delta(q)$ è un diffeomorfismo, e ci siamo. □

Corollario 5.1.7: *Sia M una varietà Riemanniana. Allora ogni $K \subseteq M$ compatto ha raggio d'iniettività positivo.*

Dimostrazione: La proposizione precedente ci fornisce per ogni $p \in K$ un $\delta_p > 0$ e un intorno W_p di p tali che $\operatorname{inj\,rad}(q) \ge \delta_p$ per ogni $q \in W_p$. Sia $\{W_{p_1}, \ldots, W_{p_k}\}$ un sottoricoprimento finito di K; allora

$$\operatorname{inj\,rad}(K) \ge \min\{\delta_{p_1}, \ldots, \delta_{p_k}\} > 0.$$

□

Esercizio 5.1.2. Dimostra che un'isometria locale fra varietà Riemanniana manda geodetiche in geodetiche, nel senso che se $H\colon M \to N$ è un'isometria locale allora $\sigma\colon I \to M$ è una geodetica in M se e solo se $H \circ \sigma$ è una geodetica in N.

Esercizio 5.1.3. Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e sia $E\colon \mathcal{E} \to M \times M$ data da $E(v) = \bigl(\pi(v), \exp(v)\bigr)$, dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica. Dimostra che dE_v è invertibile se e solo se $d(\exp_p)_v$ è invertibile, dove $p = \pi(v)$.

Esercizio 5.1.4. Date due connessioni lineari ∇ e $\tilde\nabla$ su una varietà M, siano B, S, $A\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ definite da $B(X, Y) = \tilde\nabla_X Y - \nabla_X Y$,

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}\bigl(B(X, Y) + B(Y, X)\bigr) \qquad \text{e} \qquad A(X, Y) = \frac{1}{2}\bigl(B(X, Y) - B(Y, X)\bigr).$$

Indichiamo inoltre con τ la torsione di ∇, e con $\tilde\tau$ la torsione di $\tilde\nabla$.

(i) Dimostra che B, S, $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$.
(ii) Dimostra che $2A = \tilde\tau - \tau$.
(iii) Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
 (a) ∇ e $\tilde\nabla$ hanno le stesse geodetiche (cioè ogni geodetica di ∇ è anche geodetica di $\tilde\nabla$, e viceversa);
 (b) $B(v, v) = O$ per ogni $v \in TM$;
 (c) $S \equiv O$;
 (d) $B \equiv A$.
(iv) Dimostra che ∇ e $\tilde\nabla$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione se e solo se $\nabla \equiv \tilde\nabla$.
(v) Dimostra che esiste un'unica connessione simmetrica ∇^* che ha le stesse geodetiche di ∇.

Definizione 5.1.8: Diremo che due connessioni ∇ e $\tilde\nabla$ su una varietà M sono *riferite proiettivamente* se per ogni geodetica $\sigma\colon I \to M$ di ∇ esiste un diffeomorfismo $h\colon J \to I$ tale che $\sigma \circ h$ sia una geodetica di $\tilde\nabla$.

Esercizio 5.1.5. Dimostra che due connessioni simmetriche ∇ e $\tilde\nabla$ su una varietà M sono riferite proiettivamente se e solo se esiste una 1-forma $\varphi \in A^1(M)$ tale che $\tilde\nabla - \nabla = \varphi \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \varphi$.

5.2 La distanza Riemanniana

In questo paragrafo dimostreremo che una varietà Riemanniana è in maniera canonica uno spazio metrico; vedremo poi che le relazioni fra le proprietà topologiche della distanza canonica e le proprietà geometriche della varietà sono estremamente interessanti. Cominciamo con delle definizioni che ci serviranno per introdurre la distanza.

Definizione 5.2.1: Una curva continua $\sigma\colon[a,b]\to M$ in una varietà M è detta *regolare a tratti* se esiste una suddivisione $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ di $[a,b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ sia di classe C^∞ e regolare (cioè con vettore tangente mai nullo) o costante per $j=1,\ldots,k$.

Definizione 5.2.2: Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti in una varietà Riemanniana (M,g). La *lunghezza d'arco* di σ è la funzione

$$s(t)=\int_a^t \|\dot\sigma(u)\|_{\sigma(u)}\,du,$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma di T_pM indotta da g. La *lunghezza* di σ è

$$L(\sigma)=\int_a^b \|\dot\sigma(u)\|_{\sigma(u)}\,du.$$

Diremo che σ è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* se $\|\dot\sigma(u)\|_{\sigma(u)}=1$ quando $\dot\sigma(u)$ è definito; in particolare, σ non ha tratti costanti, e $s(t)=t-a$.

Esercizio 5.2.1. Se $\sigma\colon[a,b]\to M$ è una curva regolare a tratti con $\dot\sigma\ne O$ dove definito, di lunghezza ℓ, dimostra che esiste un omeomorfismo C^∞ a tratti $h\colon[0,\ell]\to[a,b]$ tale che $\sigma\circ h$ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. (*Suggerimento:* h^{-1} è la lunghezza d'arco di σ.)

Esercizio 5.2.2. Sia $H\colon M\to N$ una isometria locale fra varietà Riemanniane, e $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti. Dimostra che la lunghezza di σ in M è uguale alla lunghezza di $H\circ\sigma$ in N.

Definizione 5.2.3: Sia (M,g) una varietà Riemanniana (connessa). La funzione $d\colon M\times M\to\mathbb{R}^+$ data da

$$d(p,q)=\inf\{L(\sigma)\mid \sigma\colon[a,b]\to M \text{ è una curva regolare a tratti con } \sigma(a)=p \text{ e } \sigma(b)=q\}$$

è detta *distanza Riemanniana* su M indotta da g.

Proposizione 5.2.1: *Sia (M,g) una varietà Riemanniana connessa. Allora la funzione $d\colon M\times M\to\mathbb{R}^+$ appena definita è una distanza che induce la topologia della varietà.*

Dimostrazione: Dalla definizione è chiaro che $d(p,q)=d(q,p)\ge 0$ e che $d(p,p)=0$. La disuguaglianza triangolare segue (esercizio) dal fatto che possiamo combinare una curva regolare a tratti da p_1 a p_2 con una da p_2 a p_3 ottenendo una curva regolare a tratti la cui lunghezza è la somma delle lunghezze delle prime due curve.

Rimane da dimostrare che se $p\ne q$ allora $d(p,q)\ne 0$, e che la topologia indotta da d è quella della varietà. Scegliamo $p\in M$, e sia $\varphi\colon B_{2\varepsilon}(p)\to B_{2\varepsilon}(O)\subseteq\mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate normali centrato in p, dove $B_{2\varepsilon}(O)$ è la palla di centro l'origine e raggio $0<2\varepsilon\le\operatorname{inj\,rad}(p)$ in $\mathbb{R}^n$ rispetto alla norma euclidea $\|\cdot\|_0$. Indichiamo con g_0 la metrica Riemanniana su $B_{2\varepsilon}(p)$ indotta tramite φ dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$: in altre parole, se $q\in B_{2\varepsilon}(p)$ e $v\in T_qM$ la norma di v rispetto a g_0 è data da

$$\|v\|_{0,q}=\|d\varphi_q(v)\|_0.$$

In particolare, se $L_0(\sigma)$ è la lunghezza rispetto a g_0 di una curva regolare a tratti $\sigma\colon[a,b]\to B_{2\varepsilon}(p)$, abbiamo

$$L_0(\sigma)=L_0'(\varphi\circ\sigma)\ge\big\|\varphi\big(\sigma(b)\big)-\varphi\big(\sigma(a)\big)\big\|,\tag{5.2.1}$$

dove $L_0'(\varphi\circ\sigma)$ è la lunghezza euclidea della curva $\varphi\circ\sigma$.

Ora, l'insieme

$$K=\{v\in T_qM\mid q\in\overline{B_\varepsilon(p)},\ \|v\|_{0,q}=1\}\subset TM$$

è chiaramente compatto; quindi se poniamo

$$c_p = \inf_{v \in K} \|v\|_{\pi(v)} \le \sup_{v \in K} \|v\|_{\pi(v)} = C_p,$$

dove $\pi: TM \to M$ è la proiezione canonica, e $\|\cdot\|_p$ è la norma su T_pM indotta dalla metrica Riemanniana g, abbiamo $0 < c_p \le C_p < +\infty$ e

$$c_p\|v\|_{0,q} \le \|v\|_q \le C_p\|v\|_{0,q}$$

per ogni $q \in \overline{B_\varepsilon(p)}$ e $v \in T_qM$. Dunque se σ è una curva regolare a tratti la cui immagine è contenuta in $\overline{B_\varepsilon(p)}$ otteniamo

$$c_pL_0(\sigma) \le L(\sigma) \le C_pL_0(\sigma). \tag{5.2.2}$$

Se $q \ne p$ possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che $q \notin \overline{B_\varepsilon(p)}$. Quindi ogni curva regolare a tratti $\sigma: [a,b] \to M$ da p a q deve intersecare la sfera geodetica $\partial B_\varepsilon(p)$ in un primo punto $\sigma(t_0)$, per cui (5.2.1) e (5.2.2) danno

$$L(\sigma) \ge L(\sigma|_{[a,t_0]}) \ge c_p\, L_0(\sigma|_{[a,t_0]}) \ge c_p\, \bigl\|\varphi\bigl(\sigma(t_0)\bigr)\bigr\| = c_p\varepsilon > 0. \tag{5.2.3}$$

Siccome questo vale per ogni curva regolare a tratti σ otteniamo $d(p,q) \ge c_p\varepsilon > 0$, come voluto.

Rimane da far vedere che la topologia di M e quella indotta dalla distanza d coincidono. Siccome le palle geodetiche $B_\varepsilon(p)$ formano un sistema fondamentale di intorni di p per la topologia di M, e le palle metriche $B(p,\delta)$ formano un sistema fondamentale di intorni per la topologia metrica, è sufficiente far vedere che

$$B(p, c_p\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq B(p, C_p\varepsilon)$$

per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo.

Prendiamo $q \in B_\varepsilon(p)$, e sia $\sigma: [0,l] \to B_\varepsilon(p)$ la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco misurata con g_0. In altre parole, $\sigma(t) = \varphi^{-1}(tv)$ per un opportuno $v \in \mathbb{R}^n$ di lunghezza unitaria, per cui $l < \varepsilon$ e quindi

$$d(p,q) \le L(\sigma) \le C_pL_0(\sigma) = C_pl < C_p\varepsilon,$$

da cui segue $B_\varepsilon(p) \subseteq B(p, C_p\varepsilon)$.

Viceversa, sia $q \in B(p, c_p\varepsilon)$, per cui esiste una curva regolare a tratti σ da p a q di lunghezza strettamente minore di $c_p\varepsilon$. Se fosse $q \notin B_p(\varepsilon)$, questo contraddirebbe (5.2.3). Quindi $B(p, c_p\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon(p)$, e abbiamo finito. □

Osservazione 5.2.1. Faremo vedere fra poco che in realtà $B_\varepsilon(p) = B(p,\varepsilon)$ per ogni $0 < \varepsilon < \operatorname{inj\,rad}(p)$.

Le curve che realizzano la distanza meritano chiaramente un nome particolare.

Definizione 5.2.4: Una curva regolare a tratti $\sigma: [a,b] \to M$ è detta *minimizzante* se ha lunghezza minore o uguale a quella di qualsiasi altra curva regolare a tratti con gli stessi estremi, ovvero se e solo se $d\bigl(\sigma(a), \sigma(b)\bigr) = L(\sigma)$. La curva σ è *localmente minimizzante* se per ogni $t \in [a,b]$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\sigma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ è minimizzante (con le ovvie convenzioni se $t = a$ o $t = b$).

Ovviamente, ogni curva minimizzante è anche localmente minimizzante (perché?); il viceversa è falso (un esempio è dato dai cerchi massimi sulla sfera: vedi l'Esempio 5.4.2).

Il nostro obiettivo ora è dimostrare che una curva è localmente minimizzante se e solo se è una geodetica, che è il risultato che fornirà il legame fra la distanza Riemanniana e la geometria della varietà.

Cominciamo con l'osservare che tutte le geodetiche non costanti sono parametrizzate rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, e quindi sono in particolare curve regolari:

Lemma 5.2.2: *Se $\sigma: I \to M$ è una geodetica di una varietà Riemanniana M allora $\|\dot\sigma\|$ è costante. In particolare, σ è sempre (costante oppure) regolare.*

Dimostrazione: Infatti, indicata con D la derivata covariante lungo σ, abbiamo

$$\frac{d}{dt}\langle \dot\sigma, \dot\sigma \rangle = 2\langle D\dot\sigma, \dot\sigma \rangle \equiv 0.$$

□

Abbiamo introdotto in precedenza il concetto di campo vettoriale lungo una curva liscia. Nel seguito ci servirà l'analogo concetto per curve regolari a tratti:

Definizione 5.2.5: Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una curva regolare a tratti. Un *campo vettoriale* X *lungo* σ è dato da:

(a) una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b$ di $[a,b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ sia di classe C^∞ per $j = 1, \ldots, h$;
(b) campi vettoriali $X|_{[t_{j-1},t_j]} \in \mathcal{T}(\sigma|_{[t_{j-1},t_j]})$ per $j = 1, \ldots, h$.

Se i vari campi vettoriali si raccordano con continuità nei punti interni $t_1, \ldots, t_{k-1}$ della suddivisione, diremo che X è un campo *continuo*. Lo spazio dei campi vettoriali lungo σ è ancora indicato con $\mathcal{T}(\sigma)$. Infine, un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(\sigma)$ lungo σ è detto *proprio* se $X(a) = X(b) = O$.

Osservazione 5.2.2. Notiamo esplicitamente che non tutti i campi vettoriali $X \in \mathcal{T}(\sigma)$ sono continui; per esempio, il vettore tangente di una curva regolare a tratti non liscia è un campo vettoriale non continuo lungo la curva.

Per stabilire se una curva è minimizzante o meno, dovremo confrontare la sua lunghezza con quella di curve vicine. Il concetto di "curve vicine" è formalizzato nella seguente

Definizione 5.2.6: Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una curva regolare a tratti. Una *variazione* di σ è un'applicazione continua $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ tale che, posto $\sigma_s = \Sigma(s,\cdot)$, si ha

(i) $\sigma_0 = \sigma$;
(ii) ciascuna *curva principale* σ_s è una curva regolare a tratti;
(iii) esiste una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ di $[a,b]$ (detta *suddivisione associata* a Σ) tale che $\Sigma_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{j-1},t_j]}$ sia di classe C^∞ per $j = 1, \ldots, k$.

Le curve *trasverse* alla variazione sono le curve $\sigma^t = \Sigma(\cdot,t)$, che sono tutte curve di classe C^∞. Infine, una variazione Σ è detta *propria* se $\sigma_s(a) = \sigma(a)$ e $\sigma_s(b) = \sigma(b)$ per ogni $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

I vettori tangenti ci forniscono due campi vettoriali lungo le curve principali e trasverse di una variazione:

Definizione 5.2.7: Sia $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma\colon [a,b] \to M$. Allora poniamo

$$S(s,t) = \dot\sigma^t(s) = d\Sigma_{(s,t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s,t)$$

per ogni $(s,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b]$, e

$$T(s,t) = \dot\sigma_s(t) = d\Sigma_{(s,t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s,t)$$

per ogni $(s,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times [t_{j-1},t_j]$ e $j = 1, \ldots, k-1$, dove $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ è una suddivisione associata a Σ. In particolare, i campi $t \mapsto S(s,t)$ e $t \mapsto T(s,t)$ sono campi vettoriali lungo σ_s, e i campi $s \mapsto S(s,t)$ e $s \mapsto T(s,t)$ sono campi vettoriali lungo σ^t. Infine, il *campo variazione* di Σ è $V = S(0,\cdot) \in \mathcal{T}(\sigma)$.

Il campo variazione è un campo continuo lungo σ. Viceversa, dato un campo vettoriale continuo lungo una curva regolare a tratti possiamo trovare una variazione che abbia quel campo come campo variazione:

Lemma 5.2.3: *Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una curva regolare a tratti, e $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ un campo continuo. Allora esiste una variazione Σ di σ con V come campo variazione. Inoltre, se V è proprio si può trovare Σ propria.*

Dimostrazione: Essendo $[a,b]$ compatto, il raggio d'iniettività δ del sostegno di σ è strettamente positivo, e il massimo M di $\|V(t)\|_{\sigma(t)}$ è finito. Se $\varepsilon = \delta/M > 0$, allora l'applicazione $\Sigma(s,t) = \exp\bigl(sV(t)\bigr)$ è definita su $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b]$, e quindi è una variazione di σ. Siccome

$$S(0,t) = \frac{\partial}{\partial s}\exp\bigl(sV(t)\bigr)\bigg|_{s=0} = d(\exp)_{O_{\sigma(t)}}\bigl(V(t)\bigr) = V(t),$$

il campo variazione coincide con V. Infine, se $V(a) = V(b) = O$ è evidente che Σ è propria. □

Nel seguito ci servirà il seguente lemma elementare ma fondamentale:

Lemma 5.2.4: *Sia $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma\colon[a,b]\to M$ in una varietà Riemanniana M. Allora su ogni rettangolo $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{j-1},t_j]$ su cui Σ è di classe C^∞ si ha*

$$D_sT=D_tS,$$

dove D_s è la derivata covariante lungo le curve trasverse, e D_t quella lungo le curve principali.

Dimostrazione: Basta fare il conto in coordinate locali. Scrivendo

$$S(s,t)=\frac{\partial\Sigma^i}{\partial s}(s,t)\,\partial_i|_{\Sigma(s,t)},\qquad T(s,t)=\frac{\partial\Sigma^j}{\partial t}(s,t)\,\partial_j|_{\Sigma(s,t)},$$

la formula (4.3.2) dà

$$\begin{aligned}D_sT&=\left[\frac{\partial^2\Sigma^k}{\partial s\partial t}+(\Gamma^k_{ij}\circ\Sigma)\frac{\partial\Sigma^i}{\partial s}\frac{\partial\Sigma^j}{\partial t}\right]\partial_k|_\Sigma\\&=\left[\frac{\partial^2\Sigma^k}{\partial t\partial s}+(\Gamma^k_{ji}\circ\Sigma)\frac{\partial\Sigma^i}{\partial s}\frac{\partial\Sigma^j}{\partial t}\right]\partial_k|_\Sigma=D_tS,\end{aligned}$$

grazie alla simmetria della connessione di Levi-Civita. □

Definizione 5.2.8: Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti, e $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che σ sia di classe C^∞ in ciascun intervallo $[t_{j-1},t_j]$. Allora per $j=0,\dots,k$ definiamo $\Delta_j\dot\sigma\in T_{\sigma(t_j)}M$ ponendo $\Delta_0\dot\sigma=\dot\sigma(a)$, $\Delta_k\dot\sigma=-\dot\sigma(b)$ e

$$\Delta_j\dot\sigma=\dot\sigma(t_j^+)-\dot\sigma(t_j^-)$$

per $j=1,\dots,k-1$, dove $\dot\sigma(t_j^+)=\lim_{t\to t_j^+}\dot\sigma(t)$, e $\dot\sigma(t_j^-)=\lim_{t\to t_j^-}\dot\sigma(t)$.

E ora siamo in grado di dimostrare una formula importante:

Teorema 5.2.5: (Prima variazione della lunghezza d'arco) *Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M, e $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ una sua variazione con suddivisione associata $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$. Indichiamo con $V\in\mathcal{T}(\sigma)$ il campo variazione di Σ, e definiamo la funzione $L\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ ponendo $L(s)=L(\sigma_s)$. Allora*

$$\frac{dL}{ds}(0)=-\int_a^b\langle V(t),D_t\dot\sigma\rangle\,dt-\sum_{j=0}^k\langle V(t_j),\Delta_j\dot\sigma\rangle.\tag{5.2.4}$$

Dimostrazione: In un intervallo $[t_{j-1},t_j]$ dove tutto è di classe C^∞ abbiamo

$$\frac{d}{ds}L(\sigma_s|_{[t_{j-1},t_j]})=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial}{\partial s}\langle T,T\rangle^{1/2}\,dt=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\|T\|}\langle D_sT,T\rangle\,dt=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\|T\|}\langle D_tS,T\rangle\,dt,$$

dove abbiamo usato il Lemma 5.2.4. Ponendo $s=0$ e ricordando che $S(0,t)=V(t)$, $T(0,t)=\dot\sigma(t)$ e $\|\dot\sigma\|\equiv1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}L(\sigma_s|_{[t_{j-1},t_j]})\right|_{s=0}&=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle D_tV,\dot\sigma(t)\rangle\,dt=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[\frac{d}{dt}\langle V,\dot\sigma\rangle-\langle V(t),D_t\dot\sigma\rangle\right]dt\\&=\langle V(t_j),\dot\sigma(t_j^-)\rangle-\langle V(t_{j-1}),\dot\sigma(t_{j-1}^+)\rangle-\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle V(t),D_t\dot\sigma\rangle\,dt.\end{aligned}$$

Sommando su j otteniamo la tesi. □

Siamo ora in grado di dimostrare che ogni curva localmente minimizzante è una geodetica:

Teorema 5.2.6: *Ogni curva localmente minimizzante parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana è una geodetica — e quindi in particolare è di classe C^∞.*

Dimostrazione: Siccome l'enunciato è locale, possiamo supporre che $\sigma\colon [a,b] \to M$ sia una curva regolare a tratti minimizzante parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco; dobbiamo dimostrare che è una geodetica. Essendo una curva minimizzante, $dL(\sigma_s)/ds(0) = 0$ per ogni variazione propria Σ di σ; quindi il Lemma 5.2.3 ci assicura che il secondo membro di (5.2.4) è nullo per ogni campo vettoriale V proprio lungo σ.

Sia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che σ sia di classe C^∞ in ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$, e sia $\chi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione tale che $\chi_j > 0$ in (t_{j-1}, t_j) e $\chi_j \equiv 0$ altrove. Allora (5.2.4) con $V = \chi_j D\dot\sigma$ diventa

$$0 = -\int_{t_{j-1}}^{t_j} \chi_j(t) \|D_t\dot\sigma\|^2\, dt,$$

per cui $D\dot\sigma \equiv 0$ in ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$, e quindi σ è una geodetica all'interno di ciascuno di questi intervalli.

Ora vogliamo dimostrare che $\Delta_j\dot\sigma = O$ per $j = 1, \ldots, k-1$. Ma infatti basta prendere un campo vettoriale $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ tale che $V(t_j) = \Delta_j\dot\sigma$ e $V(t_i) = O$ per $i \neq j$; in tal caso (5.2.4) si riduce a $0 = -\|\Delta_j\dot\sigma\|^2$, e ci siamo.

Dunque $\dot\sigma$ è continuo; per l'unicità delle geodetiche tangenti a una data direzione otteniamo che $\sigma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ è la continuazione di $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ per $j - 1, \ldots, k-1$, e quindi σ è liscia e una geodetica dappertutto. □

In realtà abbiamo dimostrato qualcosina di più.

Definizione 5.2.9: Diremo che una curva regolare a tratti $\sigma\colon [a,b] \to M$ in una varietà Riemanniana M è un *punto critico del funzionale lunghezza* se

$$\frac{dL(\sigma_s)}{ds}(0) = 0$$

per ogni variazione propria Σ di σ.

Allora la dimostrazione del teorema precedente implica chiaramente il

Corollario 5.2.7: *Una curva regolare a tratti parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana è un punto critico del funzionale lunghezza se e solo se è una geodetica.*

Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare il viceversa del Teorema 5.2.6, cioè dimostrare che ogni geodetica è localmente minimizzante. Per far ciò ci serve il seguente

Lemma 5.2.8: (Gauss) *Sia M una varietà Riemanniana, $p \in M$ e $v \in \mathcal{E}_p$. Allora si ha*

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle_{\exp_p(v)} = \langle v, w \rangle_p \tag{5.2.5}$$

per ogni $w \in T_pM$, dove abbiamo identificato come al solito $T_v(T_pM)$ con T_pM.

Dimostrazione: Cominciamo a dimostrare (5.2.5) per $w = v$. Una curva in T_pM passante per v e tangente a v è $\tau(t) = v + tv$; quindi

$$d(\exp_p)_v(v) = \left.\frac{d}{dt} \exp_p\bigl((1+t)v\bigr)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\sigma_v(1+t)\right|_{t=0} = \dot\sigma_v(1), \tag{5.2.6}$$

dove come sempre σ_v denota la geodetica massimale con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$. Quindi

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(v) \rangle_{\exp_p(v)} = \|\dot\sigma_v(1)\|^2 = \langle v, v \rangle_p,$$

perché, grazie al Lemma 5.2.2, $\|\dot\sigma_v(1)\| = \|\dot\sigma_v(0)\| = \|v\|$.

Per la linearità di $d(\exp_p)_v$ ci basta allora dimostrare che se w è perpendicolare a v allora

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle_{\exp_p(v)} = 0.$$

Siccome $\langle w, v\rangle_p = 0$, il vettore w, considerato come vettore in $T_v(T_pM)$, è tangente in v alla sfera $\partial B_{\|v\|_p}(O_p)$ di centro l'origine e raggio $\|v\|_p$. Quindi possiamo trovare una curva $\tau\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to T_pM$ con $\tau(0)=v$, $\dot\tau(0)=w$ e $\|\tau(s)\|_p\equiv\|v\|_p$. Siccome $v\in\mathcal{E}_p$, possiamo supporre che $\tau(s)\in\mathcal{E}_p$ per ogni s, e definire una variazione $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\to T_pM$ di σ_v ponendo

$$\Sigma(s,t)=\exp_p\bigl(t\tau(s)\bigr).$$

Notiamo esplicitamente che le curve principali di Σ sono geodetiche, che $\Sigma(0,1)=\exp_p(v)$, e che

$$T(0,1)=d(\exp_p)_v(v)=\dot\sigma_v(1),\qquad S(0,1)=d(\exp_p)_v(w),$$

per cui ci basta dimostrare che $\langle T(0,1),S(0,1)\rangle_{\exp_p(v)}=0$. Ora,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle T,S\rangle_\Sigma=\langle D_tT,S\rangle_\Sigma+\langle T,D_tS\rangle_\Sigma=\langle T,D_sT\rangle_\Sigma=\frac12\frac{\partial}{\partial s}\|T\|^2_\Sigma=0,$$

dove abbiamo usato: $D_tT\equiv O$, in quanto ciascuna σ_s è una geodetica; il Lemma 5.2.4; e

$$\|T(s,t)\|_{\Sigma(s,t)}=\|\dot\sigma_s(t)\|_{\sigma_s(t)}\equiv\|\dot\sigma_s(0)\|_p=\|\tau(s)\|_p\equiv\|v\|_p.$$

Dunque $\langle T,S\rangle_\Sigma$ non dipende da t; e quindi

$$\langle T(0,1),S(0,1)\rangle_{\exp_p(v)}=\langle T(0,0),S(0,0)\rangle_p=0,$$

in quanto $\sigma^0\equiv p$ implica $S(0,0)=\dot\sigma^0(0)=O_p$. □

Vogliamo dare un'interpretazione più geometrica di questo risultato.

Definizione 5.2.10: Sia $B_\varepsilon(p)\subset M$ una palla geodetica di centro p in una varietà Riemanniana M, dove $0<\varepsilon\le\operatorname{inj\,rad}(p)$, e poniamo $B^*_\varepsilon(p)=B_\varepsilon(p)\setminus\{p\}$. Indichiamo con $r\colon B_\varepsilon(p)\to\mathbb{R}^+$ la funzione data da $r(q)=\|\exp_p^{-1}(q)\|_p$ per ogni $q\in B_\varepsilon(p)$. Chiaramente, $r\in C^\infty\bigl(B^*_\varepsilon(p)\bigr)$. Il *campo radiale* $\partial/\partial r\in\mathcal{T}\bigl(B^*_\varepsilon(p)\bigr)$ è il gradiente di r:

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_q=(\operatorname{grad}r)(q)$$

per ogni $q\in B^*_\varepsilon(p)$.

Osservazione 5.2.3. Dimostreremo fra poco che $r\colon B_\varepsilon(p)\to\mathbb{R}^+$ è la distanza Riemanniana dal punto p; nota nel frattempo che $B_\delta(p)=r^{-1}([0,\delta))$ per ogni $0\le\delta\le\varepsilon$.

Proposizione 5.2.9: *Sia $B_\varepsilon(p)$ una palla geodetica in una varietà Riemanniana M. Allora:*

(i) *per ogni $q=\exp_p(v)\in B^*_\varepsilon(p)$ si ha*

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_q=d(\exp_p)_v\left(\frac{v}{\|v\|_p}\right)=\frac{\dot\sigma_v(1)}{\|v\|_p}=\dot\sigma_{v/\|v\|_p}(\|v\|_p),$$

e in particolare, $\|\partial/\partial r\|\equiv1$;

(ii) *le geodetiche radiali uscenti da p parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco sono le traiettorie di $\partial/\partial r$;*

(iii) *il campo radiale è ortogonale alle sfere geodetiche $\partial B_\delta(p)$ contenute in $B_\varepsilon(p)$.*

Dimostrazione: (i) Prima di tutto, derivando l'uguaglianza $\sigma_{v/\|v\|_p}(t)=\sigma_v(t/\|v\|_p)$ otteniamo

$$\dot\sigma_{v/\|v\|_p}(\|v\|_p)=\frac{\dot\sigma_v(1)}{\|v\|_p};$$

quindi, ricordando la (5.2.6), rimane da dimostrare solo che

$$dr_{\exp_p(v)}(\tilde w)=\frac{1}{\|v\|_p}\langle d(\exp_p)_v(v),\tilde w\rangle_{\exp_p(v)}\tag{5.2.7}$$

per ogni $v \in B_\varepsilon(O_p)$, $v \neq O_p$, e ogni $\tilde{w} \in T_{\exp_p(v)}M$.

Ora, ogni $\tilde{w} \in T_{\exp_p(v)}M$ è della forma $\tilde{w} = d(\exp_p)_v(w)$ per un unico $w \in T_pM$, in quanto $\exp_p$ è un diffeomorfismo fra $B_\varepsilon(O_p)$ e $B_\varepsilon(p)$ — e stiamo identificando $T_v(T_pM)$ con T_pM come al solito. Dunque

$$dr_{\exp_p(v)}(\tilde{w}) = dr_{\exp_p(v)}\bigl(d(\exp_p)_v(w)\bigr) = d(r \circ \exp_p)_v(w) = \frac{\langle v, w\rangle_p}{\|v\|_p},$$

dove l'ultima eguaglianza segue da $r \circ \exp_p = \|\cdot\|_p$, e quindi (5.2.7) è esattamente equivalente al Lemma 5.2.8.

(ii) Se $q = \exp_p(v) \in B^*_\varepsilon(p)$, la geodetica radiale parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco uscente da p passante per q è esattamente $t \mapsto \sigma_{v/\|v\|_p}(t)$, e raggiunge q per $t = \|v\|_p$. La tesi segue allora da (i).

(iii) Siccome $\partial B_\delta(p) = \exp_p\bigl(\partial B_\delta(O_p)\bigr)$, i vettori tangenti a $\partial B_\delta(p)$ in $q = \exp_p(v)$ sono esattamente l'immagine tramite $d\exp_p$ dei vettori tangenti a $\partial B_\delta(O_p)$ in v, i quali sono proprio i vettori ortogonali a v. La tesi segue allora dal Lemma 5.2.8. □

E ora siamo arrivati al cruciale

Teorema 5.2.10: *Sia (M, g) una varietà Riemanniana, $p \in M$ e $0 < \varepsilon \le \operatorname{inj rad}(p)$. Allora:*

(i) *Se q appartiene a una palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ di centro p, allora la geodetica radiale da p a q è l'unica (a meno di riparametrizzazioni) curva minimizzante da p a q.*
(ii) *La funzione r introdotta nella Definizione 5.2.10 coincide con la distanza Riemanniana dal punto p, per cui ogni palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ è la palla di centro p e raggio ε per la distanza Riemanniana di M.*
(iii) *Ogni geodetica di M è localmente minimizzante.*

Dimostrazione: (i) Sia $\sigma\colon [0, \ell] \to M$ la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, per cui $\sigma(t) = \exp_p(tv)$ per un opportuno vettore $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria. Siccome $L(\sigma) = \ell = r(q)$, dobbiamo dimostrare che ogni altra curva regolare a tratti da p a q ha lunghezza maggiore o uguale a ℓ, e uguale a ℓ se e solo se è una riparametrizzazione di σ.

Sia $\tau\colon [a, b] \to M$ una curva regolare a tratti da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e supponiamo per il momento che l'immagine di τ sia tutta contenuta in $B_\varepsilon(p)$. Chiaramente, possiamo anche supporre che $\tau(t) \neq p$ per $t > a$. Per la proposizione precedente possiamo scrivere $\dot\tau$ in tutti i punti in cui esiste come

$$\dot\tau(t) = \alpha(t) \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{\tau(t)} + w(t),$$

per un'opportuna funzione α e un'opportuno campo $w \in \mathcal{T}(\tau)$, con la proprietà che $w(t)$ è tangente alla sfera geodetica passante per $\tau(t)$. Siccome questa è una decomposizione ortogonale abbiamo

$$\|\dot\tau(t)\|^2 = |\alpha(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \ge |\alpha(t)|^2.$$

Inoltre, siccome le sfere geodetiche sono le ipersuperfici di livello della funzione r, abbiamo $dr(w) \equiv 0$, e quindi

$$\alpha(t) = dr\bigl(\dot\tau(t)\bigr).$$

Di conseguenza

$$L(\tau) = \int_a^b \|\dot\tau(t)\|\, dt \ge \int_a^b |\alpha(t)|\, dt \ge \int_a^b dr\bigl(\dot\tau(t)\bigr)\, dt = \int_a^b \frac{d(r \circ \tau)}{dt}\, dt = r(q) - r(p) = \ell,$$

come voluto. Inoltre, si ha uguaglianza se e solo se $\dot\tau$ è un multiplo positivo di $\partial/\partial r$; essendo entrambi di lunghezza unitaria, dobbiamo avere $\dot\tau \equiv (\partial/\partial r) \circ \tau$. Quindi sia τ che σ sono traiettorie di $\partial/\partial r$ passanti per q al tempo $t = \ell$, e quindi $\tau = \sigma$.

Infine, se $\tau\colon [a, b] \to M$ è una qualsiasi curva regolare a tratti da p a q, sia $a_0 \in [a, b]$ l'ultimo valore t per cui $\tau(t) = p$, e $b_0 \in [a, b]$ il primo valore $t > a_0$ tale che $\tau(t) \in \partial B_\varepsilon(p)$, se esiste; altrimenti poniamo $b_0 = b$. Chiaramente, la curva $\sigma|_{[a_0, b_0]}$ ha supporto contenuto in $B_\varepsilon(t)$ tranne eventualmente per il punto finale; siccome

$$L(\tau) \ge L(\tau|_{[a_0, b_0]}),$$

con eguaglianza se e solo se $a_0 = a$ e $b_0 = b$, la tesi segue allora da quanto già visto.

(ii) Se $q \in B_\varepsilon(p)$, esiste un unico $v \in B_\varepsilon(O_p)$ tale che $q = \exp_p(v)$, e la geodetica minimizzante da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è $\sigma_{v/\|v\|_p}$. Quindi $r(q) = \|v\|_p = L(\sigma_{v/\|v\|_p}|_{[0,\|v\|_p]}) = d(p,q)$, e r coincide con la distanza Riemanniana da p. In particolare, $B_\varepsilon(p)$ è contenuta nella palla $B(p,\varepsilon)$ di centro p e raggio ε per la distanza Riemanniana. Viceversa, se $q \in B(p,\varepsilon)$ deve esistere una curva σ da p a q di lunghezza minore di ε; ma abbiamo visto che ogni curva che esce da $B_\varepsilon(p)$ deve avere lunghezza almeno uguale a ε, per cui $q \in B_\varepsilon(p)$, e ci siamo.

(iii) Sia $\sigma\colon I \to M$ una geodetica massimale parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, $t_0 \in I$ e $p = \sigma(t_0)$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $B_\varepsilon(p)$ sia una palla geodetica. Allora per ogni $q \in B_\varepsilon(p) \cap \sigma(I)$ la geodetica σ è la geodetica radiale da p a q, e quindi è la curva minimizzante da p a q, per cui in particolare σ è localmente minimizzante nell'intorno $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ di t_0. □

5.3 Il teorema di Hopf-Rinow

Possiamo finalmente affrontare il problema di quando l'esponenziale è definito su tutto lo spazio tangente.

Teorema 5.3.1: (Hopf-Rinow) *Sia M una varietà Riemanniana. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *la distanza Riemanniana è completa;*
(ii) *per ogni $p \in M$ la mappa esponenziale $\exp_p$ è definita su tutto T_pM;*
(iii) *esiste un punto $p \in M$ tale che la mappa esponenziale $\exp_p$ è definita su tutto T_pM;*
(iv) *ogni insieme chiuso limitato di M è compatto.*

Inoltre, ciascuna di queste condizioni implica che

(v) *ogni coppia di punti di M può essere collegata da una geodetica minimizzante.*

Dimostrazione: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Dobbiamo dimostrare che per ogni $p \in M$ e ogni $v \in T_pM$ la geodetica σ_v è definita anche in $t = 1$. Sia $[0, t_0)$ il più grande intervallo aperto su cui σ_v è definita, e supponiamo per assurdo che t_0 sia finito. Siccome

$$d\big(\sigma_v(s), \sigma_v(t)\big) \le L(\sigma_v|_{[s,t]}) = \|v\|\,|s-t|$$

per ogni $0 \le s \le t < t_0$, se $\{t_k\} \subset [0, t_0)$ converge crescendo a t_0 la successione $\{\sigma_v(t_k)\}$ è di Cauchy in M per la distanza d, e quindi converge a un punto $q \in M$, chiaramente indipendente dalla successione scelta. Dunque ponendo $\sigma_v(t_0) = q$ otteniamo un'applicazione continua da $[0, t_0]$ in M. Sia U un intorno uniformemente normale di q, con raggio d'iniettività $\delta > 0$. Per ogni k abbastanza grande, abbiamo sia $|t_k - t_0| < \delta/\|v\|$ che $\sigma_v(t_k) \in U$. In particolare, le geodetiche radiali uscenti da $\sigma_v(t_k)$ si prolungano per una lunghezza almeno uguale a δ; siccome $L(\sigma_v|_{[t_k,t_0]}) = |t_0 - t_k|\|v\| < \delta$, la geodetica σ_v si prolunga oltre t_0, contraddizione. Quindi $t_0 = +\infty$, e in particolare $v \in \mathcal{E}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Ovvio.

Introduciamo ora la condizione

(v′) *Esiste un punto $p \in M$ che può essere collegato a qualsiasi altro punto con una geodetica minimizzante.*

(iii) $\Longrightarrow$ (v′): Dato $q \in M$, poniamo $r = d(p,q)$, e sia $B_{2\varepsilon}(p)$ una palla geodetica di centro p tale che $q \notin \overline{B_\varepsilon(p)}$. Sia $x_0 \in \partial B_\varepsilon(p)$ un punto in cui la funzione continua $d(q,x)$ ammette minimo. Possiamo scrivere $x_0 = \exp_p(\varepsilon v)$ per un opportuno $v \in T_pM$ di norma uno; vogliamo dimostrare che $\sigma_v(r) = q$.

Poniamo

$$A = \{s \in [0,r] \mid d\big(\sigma_v(s), q\big) = r - s\}.$$

L'insieme A è non vuoto ($0 \in A$), ed è chiuso in $[0,r]$; se dimostriamo che $\sup A = r$ abbiamo finito. Sia $s_0 \in A$ minore di r; ci basta far vedere che $s_0 + \delta \in A$ per $\delta > 0$ abbastanza piccolo (inoltre, se $s_0 = 0$ l'argomento che stiamo per presentare dimostrerà che $\varepsilon \in A$). Prendiamo una palla geodetica $B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$; possiamo supporre che $q \notin B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$. Per costruzione,

$$d\big(p, \sigma_v(s_0)\big) \le s_0 = d(p,q) - d\big(\sigma_v(s_0), q\big),$$

che è possibile se e solo se $d\big(p,\sigma_v(s_0)\big)=s_0$. Sia $x_0'\in\partial B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$ un punto in cui $d(x,q)$ assume minimo. Allora

$$r-s_0=d\big(\sigma_v(s_0),q\big)\le\delta+d(x_0',q);$$

d'altra parte, se τ è una curva regolare a tratti da $\sigma_v(s_0)$ a q, suddividendo τ nella parte fino all'ultima intersezione con $\partial B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$ e nel resto, si ha

$$L(\tau)\ge\delta+\min_{x\in\partial B_\delta(\sigma_v(s_0))}d(x,q)=\delta+d(x_0',q),$$

per cui abbiamo

$$r-s_0=\delta+d(x_0',q),$$

e quindi

$$d(p,x_0')\ge d(p,q)-d(q,x_0')=r-(r-s_0-\delta)=s_0+\delta.$$

D'altra parte, la curva $\tilde\sigma$ ottenuta unendo $\sigma_v|_{[0,s_0]}$ con la geodetica radiale da $\sigma_v(s_0)$ a x_0' ha lunghezza esattamente $s_0+\delta$; quindi $d(p,x_0')=s_0+\delta$. In particolare, la curva $\tilde\sigma$ è minimizzante, per cui è una geodetica e dunque coincide con σ_v. Ma allora $\sigma_v(s_0+\delta)=x_0'$ e quindi

$$d\big(\sigma_v(s_0+\delta),q\big)=d(x_0',q)=r-(s_0+\delta),$$

cioè $s_0+\delta\in A$, come voluto.

(iii)+(v$'$) $\Longrightarrow$ (iv): basta far vedere che le palle chiuse di centro p per la distanza sono compatte. Ma infatti, grazie a (v$'$) coincidono con le immagini tramite $\exp_p$ delle palle $\overline{B_r(O_p)}$, che sono compatte.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): è un risultato classico di topologia.

(ii) $\Longrightarrow$ (v): si ragiona come in (iii) $\Longrightarrow$ (v$'$). □

Definizione 5.3.1: Una varietà Riemanniana la cui distanza Riemanniana è completa sarà detta *completa*.

Come vedremo, le varietà Riemanniane complete sono l'ambiente giusto in cui studiare proprietà globali. Uno dei motivi è che una varietà Riemanniana completa non può essere allargata, nel senso che non può essere realizzata come aperto di una varietà Riemanniana più grande:

Proposizione 5.3.2: *Sia M una varietà Riemanniana, e supponiamo che esista un embedding $F\colon M\to N$ in un'altra varietà Riemanniana N connessa tale che $F(M)$ sia un aperto proprio di N, e F sia un'isometria fra M ed $F(M)$. Allora M non è completa.*

Dimostrazione: Scegliamo un punto $q_0\in\partial F(M)$, e una geodetica radiale $\sigma\colon[0,\varepsilon)\to N$ minimizzante uscente da q_0 contenuta in $F(M)$ tranne per il punto iniziale. Scegliamo una successione $\{t_k\}\subset(0,\varepsilon)$ convergente a 0; in particolare, la successione $\{q_k=\sigma(t_k)\}$ converge a q_0 ed è di Cauchy per la distanza Riemanniana di N. Poniamo $p_k=F^{-1}(q_k)$. La distanza in M fra p_h e p_k è minore o uguale alla lunghezza in M di $F^{-1}\circ\sigma|_{[t_h,t_k]}$; essendo F un'isometria, questa lunghezza è uguale alla lunghezza di $\sigma|_{[t_h,t_k]}$, e quindi alla distanza in N di q_h e q_k. In particolare, quindi, la successione $\{p_k\}$ è di Cauchy per la distanza Riemanniana di M. Se M fosse completa, allora $\{p_k\}$ dovrebbe convergere a un punto $p_0\in M$; ma allora $q_k=F(p_k)\to F(p_0)\in F(M)$, contro l'ipotesi che $\{q_k\}$ convergesse a un punto del bordo di $F(M)$. □

Esercizio 5.3.1. Dimostra che ogni varietà Riemanniana omogenea è completa.

5.4 Esempi

Esempio 5.4.1. *Lo spazio euclideo.* Le geodetiche di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla metrica euclidea sono chiaramente le rette. In particolare, un aperto convesso limitato di $\mathbb{R}^n$ mostra che in generale non è vero che la condizione (v) del Teorema di Hopf-Rinow implichi le altre.

Esempio 5.4.2. *La sfera.* Un *cerchio massimo* su S_R^n è l'intersezione di S_R^n con un piano passante per l'origine. Vogliamo far vedere che le geodetiche di S_R^n sono proprio i cerchi massimi, parametrizzati rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco. Sia σ una geodetica uscente dal polo nord $N = (0, \dots, 0, 1)$ e tangente al vettore $\partial/\partial x^1$. Se l'immagine di σ non fosse contenuta nel piano π di equazione $x^2 = \cdots = x^n = 0$, la simmetria ρ rispetto a questo piano (che è un'isometria della metrica sferica) manderebbe σ in una geodetica $\rho \circ \sigma$ diversa ma sempre uscente da N e tangente a $\partial/\partial x^1$, impossibile. Quindi l'immagine di σ dev'essere contenuta in π, per cui è necessariamente una parametrizzazione a velocità costante del cerchio massimo $S_R^n \cap \pi$. Siccome, grazie all'Esempio 4.2.4, possiamo mandare con una rotazione il vettore $\partial/\partial x^1|_N$ in un qualunque vettore di TS_R^n di lunghezza unitaria, e le rotazioni mandano geodetiche in geodetiche e cerchi massimi in cerchi massimi, abbiamo finito. In particolare, abbiamo esempi di geodetiche non minimizzanti: i cerchi massimi smettono di essere minimizzanti non appena si supera il punto diametralmente opposto. Più precisamente, abbiamo $\operatorname{inj\,rad}(p) = \pi R$ ed $\exp_p\bigl(B_{\pi R}(O_p)\bigr) = S_R^n \setminus \{-p\}$ per ogni $p \in S_R^n$. Infine, la sfera è per forza completa, in quanto compatta.

Esercizio 5.4.1. Dimostra che le geodetiche dello spazio iperbolico sono: in U_R^n le "iperboli massime", cioè le intersezioni di U_R^n con piani passanti per l'origine; in B_R^n i diametri e gli archi di circonferenza che intersecano ∂B_R^n ortogonalmente; in H_R^n le semirette verticali e le semicirconferenze con centro in ∂H_R^n. Deduci che lo spazio iperbolico è completo, che il raggio d'iniettività di ogni punto è infinito, e che per ogni punto p dello spazio iperbolico la mappa esponenziale è un diffeomorfismo fra lo spazio tangente nel punto e l'intero spazio iperbolico.

Esempio 5.4.3. *Il cilindro piatto.* Consideriamo $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2 = 1\}$, con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$. Siccome M è omogeneo (esercizio), possiamo limitarci a studiare le geodetiche uscenti dal punto $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Lo spazio tangente a M in p_0 è l'iperpiano $T_{p_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v^1 = 0\}$, e un versore normale a M in $\mathbb{R}^n$ nel punto $p \in M$ è $N(p) = (p^1, \dots, p^{n-1}, 0)$. Sia $\sigma\colon I \to M$ la geodetica con $\sigma(0) = p_0$ e $\dot\sigma(0) = v \in T_{p_0}M$. Allora sappiamo che

$$|\sigma^1|^2 + \cdots + |\sigma^{n-1}|^2 \equiv 1, \qquad |\dot\sigma^1|^2 + \cdots + |\dot\sigma^n|^2 \equiv \|v\|^2; \tag{5.4.1}$$

inoltre, siccome la connessione di Levi-Civita di M è la proiezione della connessione piatta di $\mathbb{R}^n$, l'equazione delle geodetiche diventa

$$\ddot\sigma = \lambda N \circ \sigma \tag{5.4.2}$$

per un'opportuna funzione $\lambda \in C^\infty(I)$. In particolare, abbiamo subito $\sigma^n(t) = v^n t$, e se $\sigma_o = (\sigma^1, \dots, \sigma^{n-1})$ l'equazione (5.4.2) diventa

$$\ddot\sigma_o = \lambda\sigma_o.$$

Derivando due volte $\|\sigma_o\|^2 \equiv 1$ troviamo $(\ddot\sigma_o, \sigma_o) + \|\dot\sigma_o\|^2 \equiv 0$, per cui $\lambda = -\|v_o\|^2$, dove $v_o = (0, v^2, \dots, v^{n-1})$. Mettendo tutto insieme ricaviamo

$$\sigma(t) = \left(\cos(\|v_o\|t), \frac{v^2}{\|v_o\|}\sin(\|v_o\|t), \dots, \frac{v^{n-1}}{\|v_o\|}\sin(\|v_o\|t), v^n t\right).$$

Nel resto di questo paragrafo studieremo le geodetiche di un gruppo di Lie connesso G; fra l'altro, daremo un'ulteriore motivazione per il nome della mappa esponenziale.

Cominciamo con una definizione cruciale:

Definizione 5.4.1: Sia G un gruppo di Lie connesso. Un *sottogruppo a un parametro* di G è una $\theta\colon \mathbb{R} \to G$ di classe C^∞ che sia un omomorfismo di gruppi. In altre parole, richiediamo che $\theta(0) = e$ sia l'identità di G, e che $\theta(t + s) = \theta(t) \cdot \theta(s)$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$.

Come vedremo, i sottogruppi a un parametro sono geodetiche per opportune connessioni lineari. Iniziamo con il realizzarli come curve integrali:

Lemma 5.4.1: *Sia G un gruppo di Lie, $X \in \mathfrak{g}$ e $\tilde{X} \in \mathcal{T}(G)$ il campo vettoriale invariante a sinistra associato a X. Allora:*

(i) *la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e è un sottogruppo a un parametro di G;*
(ii) *viceversa, se $\theta: \mathbb{R} \to G$ è un semigruppo a un parametro con $\theta'(0) = X$, allora θ è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e.*

Dimostrazione: (i) Sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ la curva integrale massimale di $\tilde{X}$ uscente da e. Vogliamo dimostrare che per ogni $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ data da $\gamma(t) = \sigma(t_0)\sigma(t)$ è una curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da $\sigma(t_0)$. Infatti si ha

$$\gamma'(t) = d(L_{\sigma(t_0)})_{\sigma(t)}\big(\sigma'(t)\big) = d(L_{\sigma(t_0)})_{\sigma(t)}\big(\tilde{X}(\sigma(t))\big) = \tilde{X}\big(\gamma(t)\big),$$

come voluto. Ma l'unicità delle curve integrali ci dice che allora $\gamma(t) = \sigma(t_0 + t)$, cioè

$$\sigma(t_0 + t) = \sigma(t_0)\sigma(t)$$

per ogni t_0, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. In particolare questo implica che ε dev'essere necessariamente infinito (perché?), e che σ è un sottogruppo a un parametro.

(ii) Supponiamo che θ sia un sottogruppo a un parametro con $\theta'(0) = X$. Allora

$$\theta'(t_0) = \left.\frac{d}{dt}(L_{\theta(t_0)} \circ \theta)\right|_{t=0} = d(L_{\theta(t_0)})_e\big(\theta'(0)\big) = d(L_{\theta(t_0)})_e(X) = \tilde{X}\big(\theta(t_0)\big),$$

per cui θ è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e. □

In particolare, quindi, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ esiste un unico sottogruppo a un parametro $\theta_X: \mathbb{R} \to G$ tale che $\theta'_X(0) = X$: è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e.

Definizione 5.4.2: Sia G un gruppo di Lie. L'*applicazione esponenziale* di G è l'applicazione $\exp: \mathfrak{g} \to G$ data da $\exp(X) = \theta_X(1)$.

Osservazione 5.4.1. Se $s \in \mathbb{R}$, abbiamo che $t \mapsto \theta_X(st)$ è un semigruppo a un parametro tangente a sX in 0; quindi $\exp(sX) = \theta_X(s)$. In altre parole, tutti i sottogruppi a un parametro di G sono della forma $t \mapsto \exp(tX)$ per qualche $X \in \mathfrak{g}$.

Esempio 5.4.4. Sia $G = GL(n, \mathbb{R})$, per cui $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Allora per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n, R)$ possiamo definire $\theta_X: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ ponendo

$$\theta_X(t) = e^{tX},$$

dove e^{tX} è il solito esponenziale di matrici. Si verifica subito che θ_X è un sottogruppo a un parametro con $\theta'_X(0) = X$, per cui l'applicazione esponenziale di $GL(n, \mathbb{R})$ è l'usuale esponenziale di matrici. Lo stesso argomento lo si può applicare a $GL(V)$, dove V è un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita, usando come definizione di esponenziale di un endomorfismo $L \in \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ la

$$e^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k,$$

dove L^k indica la composizione di L con se stesso k volte.

Ora, se sul gruppo di Lie G mettiamo una connessione lineare, ci troviamo con due applicazioni esponenziali a disposizione: quella appena definita, e quella che viene dalle geodetiche. Vogliamo determinare delle condizioni per cui queste due applicazioni coincidano.

La prima richiesta naturale è che la connessione sia invariante a sinistra:

Definizione 5.4.3: Sia G un gruppo di Lie. Diremo che una connessione lineare ∇ su G è *invariante a sinistra* se

$$d(L_g)(\nabla_X Y) = \nabla_{d(L_g)(X)} d(L_g)(Y)$$

per ogni X, $Y \in \mathcal{T}(G)$ e $g \in G$.

Il seguente esercizio è elementare:

Esercizio 5.4.2. Dimostra che esiste una corrispondenza biunivoca fra le connessioni lineari invarianti a sinistra su un gruppo di Lie G e l'insieme delle applicazioni bilineari $\alpha\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, corrispondenza ottenuta associando alla connessione ∇ l'applicazione $\alpha_\nabla(X, Y) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}(e)$, dove per ogni $X \in \mathfrak{g}$ il campo $\tilde{X} \in \mathcal{T}(G)$ è l'unico campo invariante a sinistra tale che $\tilde{X}(e) = X$.

Corollario 5.4.2: *Sia ∇ una lineare connessione invariante a sinistra su un gruppo di Lie G, e $X \in \mathfrak{g}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) $\alpha_\nabla(X, X) = O$;
(ii) *la geodetica σ_X uscente da e tangente a X è un sottogruppo a un parametro di G.*

Dimostrazione: Essendo ∇ invariante a sinistra, da $\alpha_\nabla(X, X) = O$ otteniamo $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X} \equiv O$, dove $\tilde{X} \in \mathcal{T}(G)$ è il campo vettoriale invariante a sinistra associato a X. In particolare, quindi, la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e è una geodetica per ∇, e questa geodetica risulta essere un sottogruppo a un parametro grazie al Lemma 5.4.1.(i)

Viceversa, se $\sigma_X(t)$ è un sottogruppo a un parametro, il Lemma 5.4.1.(ii) ci dice che è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e; ma allora abbiamo $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X}(e) = O$, cioè $\alpha_\nabla(X, X) = O$. □

Di connessioni lineari che soddisfano le condizioni di questo corollario ce ne sono a bizzeffe; per esempio quelle ottenute prendendo $\alpha_\nabla(X, Y) = c[X, Y]$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Ma a noi interessa sapere quando la connessione di Levi-Civita (ottenuta partendo da una metrica invariante a sinistra) soddisfa questa condizione. Per enunciare in maniera pulita il risultato, introduciamo la seguente

Definizione 5.4.4: Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora l'applicazione *aggiunta* di $\mathfrak{g}$ è l'omomorfismo di algebre di Lie $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dato da $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$.

Proposizione 5.4.3: *Sia $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ una metrica invariante a sinistra su un gruppo di Lie G, e ∇ la connessione di Levi-Civita. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(i) $\alpha_\nabla(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]$;
(ii) $\mathrm{ad}(X)$ *è antisimmetrico per ogni* $X \in \mathfrak{g}$;
(iii) $\exp_e = \exp$, *cioè i semigruppi a un parametro sono tutte e sole le geodetiche di G uscenti da e.*

Dimostrazione: Il Teorema 4.4.4 ci dice che
$$\langle \alpha_\nabla(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2}\bigl[\langle [X, Y], Z \rangle + \langle \mathrm{ad}(Z)X, Y \rangle + \langle X, \mathrm{ad}(Z)(Y) \rangle\bigr], \tag{5.4.3}$$
per cui l'equivalenza fra (i) e (ii) è evidente.

Il Corollario 5.4.2 ci dice che (iii) vale se e solo se $\alpha_\nabla(X, X) = O$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Ora, (5.4.3) implica
$$\langle \alpha_\nabla(X, X), Z \rangle = \langle \mathrm{ad}(Z)X, X \rangle.$$
Quindi $\alpha_\nabla(X, X) = O$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ se e solo se $\langle \mathrm{ad}(Z)X, X \rangle = 0$ per ogni Z, $X \in \mathfrak{g}$, e questo accade se e solo se $\mathrm{ad}(Z)$ è antisimmetrico per ogni $Z \in \mathfrak{g}$. □

La cosa interessante è che tutto ciò è legato a quando una metrica invariante a sinistra è anche invariante a destra. Per dimostrarlo ci servono un paio di risultati generali sui gruppi di Lie, importanti anche indipendentemente.

Proposizione 5.4.4: *Sia $\psi\colon G \to H$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora $d\psi_e\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un omomorfismo delle corrispondenti algebre di Lie, e si ha*
$$\forall X \in \mathfrak{g} \qquad \psi\bigl(\exp(X)\bigr) = \exp\bigl(d\psi_e(X)\bigr). \tag{5.4.4}$$

Dimostrazione: Sia $\theta_X(t) = \exp(tX)$ il sottogruppo a un parametro in G tangente a $X \in \mathfrak{g}$. Allora $\psi \circ \theta_X$ è un sottogruppo a un parametro in H tangente a $d\psi_e(X)$, per cui $\psi\bigl(\theta_X(t)\bigr) = \exp\bigl(td\psi_e(X)\bigr)$, e (5.4.4) vale.

Inoltre, abbiamo $\psi \circ L_g = L_{\psi(g)} \circ \psi$ per ogni $g \in G$; quindi per ogni $X \in \mathfrak{g}$ abbiamo
$$d\psi_g\bigl(d(L_g)_e(X)\bigr) = d(L_{\psi(g)})_e\bigl(d\psi_e(X)\bigr).$$
Questo vuol dire che il campo $\tilde{X}$ invariante a sinistra che estende X è sempre ψ-correlato al campo invariante a sinistra che estende $d\psi_e(X)$. L'Esercizio 3.3.3 ci assicura allora che $d\psi_e$ è un omomorfismo di algebre di Lie. □

Proposizione 5.4.5: *Sia $U \subset G$ un intorno aperto dell'elemento neutro in un gruppo di Lie connesso G. Allora U genera tutto G, nel senso che ogni elemento di G si ottiene come prodotto di un numero finito di elementi di U.*

Dimostrazione: Notiamo prima di tutto che un sottogruppo aperto è anche chiuso. Infatti, se $H \subseteq G$ è un sottogruppo aperto, allora

$$G \setminus H = \bigcup_{g \notin H} gH$$

è aperto, per cui H è chiuso.

Ora, se U è un intorno aperto di e, allora il sottogruppo generato da U è

$$\langle U \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n,$$

dove U^n è l'insieme di tutti i possibili prodotti di n elementi di U. Quindi $\langle U \rangle$ è un sottogruppo aperto, e dunque chiuso, di G; essendo G connesso, dev'essere $\langle U \rangle = G$, come affermato. □

Definizione 5.4.5: Sia G un gruppo di Lie. Se $g \in G$, indichiamo con $C_g \colon G \to G$ il coniugio $C_g(x) = gxg^{-1}$, in modo che $C_g \circ C_h = C_{gh}$ per ogni g, $h \in G$. La *rappresentazione aggiunta* di G è l'omomorfismo $\mathrm{Ad} \colon G \to GL(\mathfrak{g})$ definito da $\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_e$.

Notiamo che la (5.4.4) implica che

$$C_g(\exp X) = \exp\bigl(\mathrm{Ad}(g)(X)\bigr). \tag{5.4.5}$$

Ci servirà il seguente

Esercizio 5.4.3. Dimostra che se $X \in caT(G)$ è un campo vettoriale invariante a sinistra su un gruppo di Lie G si ha $\theta_t \circ L_g = L_g \circ \theta_t$ per ogni $g \in G$, dove $\theta_t = \Theta(t, \cdot)$ è il flusso di X. (*Suggerimento:* ricorda l'Esercizio 3.3.4.)

Da questo otteniamo il

Lemma 5.4.6: *Sia G un gruppo di Lie, e $\mathrm{Ad} \colon G \to GL(\mathfrak{g})$ la rappresentazione aggiunta. Allora*

$$d(\mathrm{Ad})_e(X) = \mathrm{ad}(X)$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}$. In particolare, quindi,

$$\forall X \in \mathfrak{g} \qquad \mathrm{Ad}(\exp X) = e^{\mathrm{ad}(X)}. \tag{5.4.6}$$

Dimostrazione: Siccome $t \mapsto \exp(tX)$ è una curva in G tangente a X in e, abbiamo

$$d(\mathrm{Ad})_e(X)(Y) = \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp tX)(Y) \Bigr|_{t=0}$$

per ogni X, $Y \in \mathfrak{g}$. Indicando con $\tilde{Y} \in \mathcal{T}(G)$ l'estensione invariante a sinistra di Y, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\exp tX)(Y) &= d(C_{\exp(tX)})_e(Y) = d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)} \circ d(L_{\exp(tX)})_e(Y) \\ &= d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)}\bigl(\tilde{Y}(\exp(tX))\bigr). \end{aligned}$$

Ora, per ogni $g \in G$ si ha

$$R_{\exp(tX)}(g) = g \exp(tX) = L_g\bigl(\exp(tX)\bigr) = L_g\bigl(\theta_t(e)\bigr) = \theta_t\bigl(L_g(e)\bigr) = \theta_t(g),$$

dove θ_t è il flusso di $\tilde{X}$, l'estensione invariante a sinistra di X, e abbiamo usato l'Esercizio 5.4.3. Ma allora questo vuol dire che $R_{\exp(-tX)} = \theta_{-t}$, per cui

$$\mathrm{Ad}(\exp tX)(Y) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(e)}(\tilde{Y}),$$

e la Proposizione 3.3.6 ci permette di concludere che

$$d(\mathrm{Ad})_e(X)(Y) = \frac{d}{dt} d(\theta_{-t})_{\theta_t(e)}(\tilde{Y}) \Bigr|_{t=0} = \mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y}(e) = [X, Y] = \mathrm{ad}(X)(Y),$$

come voluto. Infine, (5.4.6) segue da (5.4.4) e dall'Esempio 5.4.4. □

Siamo ora in grado di dimostrare il

Teorema 5.4.7: *Sia G un gruppo di Lie connesso, e $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ una metrica Riemanniana invariante a sinistra su G. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *è anche invariante a destra;*
(ii) $\mathrm{Ad}(g)$ *è un'isometria di $\mathfrak{g}$ per ogni $g\in G$;*
(iii) $\mathrm{ad}(X)$ *è antisimmetrica per ogni $X\in\mathfrak{g}$;*
(iv) $\exp_e=\exp$, *cioè i semigruppi a un parametro sono tutte e sole le geodetiche di G uscenti da e.*

Dimostrazione: La metrica $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ è invariante a destra se e solo se $\langle d(R_g)_h(v), d(R_g)_h(w)\rangle_{hg}=\langle v,w\rangle_h$ per ogni g, $h\in G$ e v, $w\in T_gG$. Usando l'invarianza a sinistra della metrica, questo si riduce a dimostrare che

$$\langle d(L_{hg}^{-1}\circ R_g\circ L_h)_e(X), d(L_{hg}^{-1}\circ R_g\circ L_h)_e(Y)\rangle_e=\langle X,Y\rangle_e$$

per ogni h, $g\in G$ e X, $Y\in\mathfrak{g}$. Ma $L_{hg}^{-1}\circ R_g\circ L_h=C_{g^{-1}}$, e quindi $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ è invariante a destra se e solo se ogni $\mathrm{Ad}(g)$ è un'isometria di $\mathfrak{g}$.

Supponiamo ora che (ii) valga. Per il Lemma 5.4.6, allora, $e^{\mathrm{ad}(tX)}$ è un'isometria per ogni $X\in\mathfrak{g}$ e $t\in\mathbb{R}$. Derivando

$$\langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e=\langle Y,Z\rangle_e$$

rispetto a t e calcolando in $t=0$ otteniamo

$$\langle \mathrm{ad}(X)(Y),Z\rangle_e+\langle Y,\mathrm{ad}(X)(Z)\rangle_e=0$$

per ogni X, Y, $Z\in\mathfrak{g}$, e quindi (iii) vale.

Viceversa, supponiamo che (iii) valga. Siccome si verifica subito che

$$\frac{d}{dt}e^{\mathrm{ad}(tX)}=\mathrm{ad}(X)\circ e^{\mathrm{ad}(tX)},$$

troviamo

$$\frac{d}{dt}\langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e=\langle \mathrm{ad}(X)\circ e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e+\langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y),\mathrm{ad}(X)\circ e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e\equiv 0.$$

Dunque $\langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e$ è una funzione costante, e calcolando per $t=0$ e per $t=1$ vediamo che $e^{\mathrm{ad}(X)}$ è un'isometria per ogni $X\in\mathfrak{g}$. Ma allora $\mathrm{Ad}(\exp X)$ è un'isometria per ogni $X\in\mathfrak{g}$. Ora, dalla definizione si ricava subito che $d\exp_O=\mathrm{id}$; quindi l'immagine dell'esponenziale contiene un intorno U dell'elemento neutro e, e $\mathrm{Ad}(g)$ è un'isometria per ogni $g\in U$. Siccome la composizione di isometrie è un'isometria, la Proposizione 5.4.5 ci assicura allora che $\mathrm{Ad}(g)$ è un'isometria per ogni $g\in G$, e abbiamo dimostrato (ii).

Infine, l'equivalenza fra (iii) e (iv) è già stata dimostrata nella Proposizione 5.4.3. □

Esempio 5.4.5. Non è difficile verificare che la metrica euclidea su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, cioè quella dell'Esempio 4.4.6, si può esprimere scrivendo

$$\forall A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\qquad\qquad \langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA).$$

Ora, se $X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ abbiamo

$$\begin{aligned}\langle [X,A],B\rangle&=\mathrm{tr}(B^TXA)-\mathrm{tr}(B^TAX),\\ \langle A,[X,B]\rangle&=\mathrm{tr}(B^TX^TA)-\mathrm{tr}(X^TB^TA)=\mathrm{tr}(B^TX^TA)-\mathrm{tr}(B^TAX^T),\end{aligned}\tag{5.4.7}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathrm{tr}(CD)=\mathrm{tr}(DC)$ per ogni C, $D\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Quindi in generale $\mathrm{ad}(X)$ non è antisimmetrico rispetto alla metrica euclidea, per cui i sottogruppi a un parametro visti nell'Esempio 5.4.4 non sono geodetiche per la connessione di Levi-Civita su $GL(n,\mathbb{R})$ calcolata nell'Esempio 4.4.6.

Esempio 5.4.6. Nell'Esercizio 3.3.9 abbiamo visto che l'algebra di Lie del gruppo $SO(n)$ è l'algebra $\mathfrak{so}(n)$ delle matrici antisimmetriche. Ma allora (5.4.7) ci dice che $\mathrm{ad}(X)$ è antisimmetrica rispetto al prodotto scalare dell'esempio precedente per ogni $X\in\mathfrak{so}(n)$. Quindi la metrica dell'Esempio 4.4.6 ristretta a $SO(n)$ è bi-invariante, e i sottogruppi a un parametro sono geodetiche per la corrispondente connessione di Levi-Civita.

Capitolo 6

Curvatura

6.1 Gli operatori di curvatura

Obiettivo di questo capitolo è lo studio della curvatura di una varietà Riemanniana, e delle relazioni fra la curvatura e la topologia della varietà.

Per vedere come potremmo definire la curvatura di una varietà Riemanniana, ricordiamo che la curvatura Gaussiana K di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ può essere calcolata con la seguente formula:

$$K = -\frac{1}{E}\left[\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \left(\Gamma_{12}^s \Gamma_{s1}^2 - \Gamma_{11}^s \Gamma_{s2}^2\right)\right], \tag{6.1.1}$$

dove i Γ_{hk}^i sono i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita della metrica indotta su S dalla metrica piatta di $\mathbb{R}^3$, calcolati rispetto a una carta locale $\varphi(p) = \bigl(x^1(p), x^2(p)\bigr)$, ed $E = \|\partial_1\|$.

Siccome la formula (6.1.1) dipende solo dalla metrica su S, potremmo tentare di definire un concetto di curvatura su una varietà Riemanniana qualsiasi nel modo seguente:

Definizione 6.1.1: Sia M una varietà Riemanniana, $p \in M$ e $\pi \subset T_pM$ un 2-piano. Diremo *curvatura sezionale* di M in p lungo π la curvatura Gaussiana in p della superficie $\exp_p(\pi \cap \mathcal{E}_p) \subset M$ calcolata usando (6.1.1) applicata a un sistema di coordinate normali centrate in p ottenute estendendo a T_pM una base ortonormale di π.

Questa definizione, benché geometricamente chiara, ha però due problemi evidenti. Il primo è che bisogna verificare che sia una definizione ben posta, cioè che non dipenda dal sistema di coordinate normali scelto. La seconda è che non è chiaro che struttura abbia (ammesso che ne abbia una) l'insieme delle curvature sezionali in un punto.

Per ovviare a questi problemi procederemo per via analitica invece che geometrica. L'idea cruciale è che siccome (6.1.1) contiene i simboli di Christoffel, la curvatura dev'essere legata alla connessione di Levi-Civita. Allora cominciamo con la seguente

Definizione 6.1.2: Sia M una varietà Riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇. Per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ l'*endomorfismo di curvatura* $R_{XY}\colon \mathcal{T}_k^h(M) \to \mathcal{T}_k^h(M)$ è dato da

$$R_{XY} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

In realtà, R_{XY} è molto di più di un semplice endomorfismo: è $C^\infty(M)$-lineare in tutte le variabili. Infatti,

$$R_{XY}(fK) = \nabla_X\bigl(f\nabla_Y K + Y(f)K\bigr) - \nabla_Y\bigl(f\nabla_X K + X(f)K\bigr) - f\nabla_{[X,Y]}K - [X,Y](f)K = fR_{XY}K$$

per ogni $K \in \mathcal{T}_k^h(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Inoltre $R_{YX} = -R_{XY}$ e

$$R_{X(fY)} = f\nabla_X\nabla_Y + X(f)\nabla_Y - f\nabla_Y\nabla_X - f\nabla_{[X,Y]} - X(f)\nabla_Y = fR_{XY}.$$

Quindi $R\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}_k^h(M) \to \mathcal{T}_k^h(M)$ determina un campo tensoriale $R \in \mathcal{T}_{h+k+2}^{h+k}(M)$. Il caso per noi più interessante è il seguente:

Definizione 6.1.3: Il *tensore di curvatura* $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$ è il campo tensoriale $R\colon \mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ dato da $R(X,Y,Z) = R_{XY}Z$. A questo associamo anche un altro campo tensoriale $R \in \mathcal{T}_4^0(M)$ definito da

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R_{XY}Z, W\rangle.$$

Esercizio 6.1.1. Dimostra che se $H\colon M \to N$ è un'isometria fra varietà Riemanniane allora $H^*R^N = R^M$, nel senso che

$$R^N\bigl(dH(X), dH(Y), dH(Z)\bigr) = R^M(X,Y,Z)$$

per ogni X, Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$, dove R^M (rispettivamente, R^N) è il tensore di curvatura di M (rispettivamente, N).

Come vedremo, le proprietà di simmetria del tensore di curvatura saranno utilissime:

Proposizione 6.1.1: *Il tensore di curvatura R di una varietà Riemanniana ha le seguenti proprietà:*

(i) $R_{XY} = -R_{YX}$;
(ii) $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = O$ *(prima identità di Bianchi);*
(iii) $\langle R_{XY}Z, W\rangle = -\langle Z, R_{XY}W\rangle$;
(iv) $\langle R_{XY}Z, W\rangle = \langle R_{ZW}X, Y\rangle$.

Dimostrazione: (i) Ovvia.

(ii) Usando la simmetria della connessione e l'identità di Jacobi si ottiene

$$\begin{aligned} R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y &= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &\quad + (\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X) \\ &\quad + (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = O. \end{aligned}$$

(iii) Basta dimostrare che $\langle R_{XY}Z, Z\rangle = 0$. La compatibilità con la metrica dà

$$\begin{aligned} XY\|Z\|^2 &= 2X\langle\nabla_Y Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle, \\ YX\|Z\|^2 &= 2Y\langle\nabla_X Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle, \\ [X,Y]\|Z\|^2 &= 2\langle\nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle. \end{aligned}$$

Sottraendo le ultime due dalla prima, il membro sinistro si annulla e otteniamo

$$0 = 2\langle R_{XY}Z, Z\rangle,$$

come voluto.

(iv) Scriviamo la prima identità di Bianchi quattro volte, permutando ciclicamente gli argomenti:

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}Z, W\rangle + \langle R_{YZ}X, W\rangle + \langle R_{ZX}Y, W\rangle &= 0, \\ \langle R_{YZ}W, X\rangle + \langle R_{ZW}Y, X\rangle + \langle R_{WY}Z, X\rangle &= 0, \\ \langle R_{ZW}X, Y\rangle + \langle R_{WX}Z, Y\rangle + \langle R_{XZ}W, Y\rangle &= 0, \\ \langle R_{WX}Y, Z\rangle + \langle R_{XY}W, Z\rangle + \langle R_{YW}X, Z\rangle &= 0, \end{aligned}$$

e sommiamo. Grazie a (iii) le prime due colonne si cancellano. Applicando (i) e (iii) all'ultima colonna otteniamo $2\langle R_{XZ}W, Y\rangle - 2\langle R_{WY}X, Z\rangle = 0$, che è equivalente alla tesi. $\square$

Esercizio 6.1.2. Dimostra la *seconda identità di Bianchi:*

$$\nabla R(X,Y,Z,V,W) + \nabla R(X,Y,V,W,Z) + \nabla R(X,Y,W,Z,V) = O$$

per ogni X, Y, Z, V, $W \in \mathcal{T}(M)$.

Esercizio 6.1.3. Dimostra l'*identità di Ricci:* se $K \in \mathcal{T}_2^0(M)$ allora

$$\nabla^2 K(Z,W,X,Y) - \nabla^2 K(Z,W,Y,X) = (R_{XY}K)(Z,W)$$

per ogni X, Y, Z, $W \in \mathcal{T}(M)$.

In coordinate locali, se poniamo $R_{\partial_i\partial_j}\partial_k = R^h_{ijk}\partial_h$, si trova

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^h_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^h_{jr}, \tag{6.1.2}$$

formula che ci fa sospettare di essere nella direzione giusta. In particolare, se poniamo $R_{ijhk} = \langle R_{\partial_i\partial_j}\partial_h, \partial_k\rangle$ otteniamo $R_{ijhk} = g_{rk}R^r_{ijh}$, e la Proposizione 6.1.1.(i)–(iv) è equivalente alle seguenti simmetrie dei coefficienti di R:

$$R_{ijhk} + R_{jhik} + R_{hijk} = 0, \quad R_{ijhk} = -R_{jihk}, \quad R_{ijhk} = -R_{ijkh}, \quad R_{ijhk} = R_{hkij}.$$

Osservazione 6.1.1. Se avessimo una carta locale tale che i vettori $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ formino un riferimento locale ortonormale di TM, i simboli di Christoffel sarebbero identicamente nulli, e quindi la curvatura sarebbe identicamente nulla. Questo conferma quanto anticipato nell'Osservazione 4.1.4.

Le proprietà di simmetria fanno sospettare che per conoscere l'intero tensore di curvatura sia sufficiente sapere come si comporta su alcune particolari quadruple di vettori. Le quadruple giuste sono quelle indicate nella prossima

Definizione 6.1.4: Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. Definiamo per ogni $p \in M$ la forma quadratica $Q_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ data da

$$Q_p(v,w) = R_p(v,w,w,v) = \langle R_{vw}w, v\rangle_p$$

per ogni v, $w \in T_pM$.

La forma $Q_p(v_1,v_2)$ in realtà dipende più dal piano generato dai vettori v_1 e v_2 che dai vettori in sé. Prima di tutto, se v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti (cioè generano una retta in T_pM) allora le proprietà di simmetria di R implicano subito (verificare, prego) che $Q_p(v_1,v_2) = 0$. Supponiamo invece che v_1 e v_2 siano linearmente indipendenti, e siano $w_j = a^i_j v_i$ (per $j = 1$, 2) altri due vettori generanti lo stesso piano, dove $(a^i_j) \in GL(2,\mathbb{R})$ è la matrice di cambiamento di base. Allora la multilinearità e le proprietà di simmetria di R danno

$$Q_p(w_1,w_2) = \bigl(\det(a^i_j)\bigr)^2 Q_p(v_1,v_2).$$

Ora, l'Esercizio 1.3.17 ci dice che la norma dell'elemento $v_1 \wedge v_2 \in \bigwedge^2 T_pM$ rispetto al prodotto scalare indotto dalla metrica Riemanniana è data da

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|v_1 \wedge v_2\|_p = \sqrt{\|v_1\|_p^2\|v_2\|_p^2 - |\langle v_1,v_2\rangle_p|^2};$$

nota che il secondo membro è l'area del parallelogrammo generato da v_1 e v_2 in T_pM. In particolare, otteniamo anche

$$\|w_1 \wedge w_2\|_p^2 = \bigl(\det(a^i_j)\bigr)^2 \|v_1 \wedge v_2\|_p^2.$$

Quindi il numero

$$\frac{2Q_p(v_1,v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|_p^2}$$

dipende solo dal piano generato dai vettori v_1 e v_2. Abbiamo recuperato la curvatura sezionale:

Proposizione 6.1.2: *Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. Allora per ogni $p \in M$ e 2-piano $\pi \subset T_pM$ si ha*
$$K(\pi) = \frac{2Q_p(v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|_p^2},$$
dove $\{v_1, v_2\}$ è una qualunque base di π.

Dimostrazione: Sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di π; completiamola a una base ortonormale di T_pM, e usiamo quest'ultima base per definire coordinate normali centrate in p. Allora le simmetrie del tensore di curvatura danno
$$\frac{2Q_p(v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|_p^2} = Q_p(v_1, v_2) = R_{1221} = R_{2112},$$
che è esattamente uguale a $K(\pi)$, grazie a (6.1.1), (6.1.2), e alla simmetria dei simboli di Christoffel. □

Dunque il tensore di curvatura definito tramite la connessione di Levi-Civita ci permette di recuperare la curvatura sezionale definita geometricamente. Viceversa, la curvatura sezionale determina completamente il tensore di curvatura:

Proposizione 6.1.3: *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \ge 2$ dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, e R, $R'\colon V \times V \times V \to V$ due applicazioni multilineari soddisfacenti le proprietà* (i)–(iv) *della Proposizione 6.1.1. Per ogni x, y, v, $w \in V$ e ogni 2-piano $\pi \subset V$ definiamo*
$$Q(v, w) = \langle R_{vw} w, v \rangle, \qquad e \qquad K(\pi) = \frac{2Q(v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|^2},$$
dove $\{v_1, v_2\}$ è una base qualunque del 2-piano π. Definiamo analogamente Q' e K'. Allora $R = R'$ se e solo se $K = K'$.

Dimostrazione: Una direzione è ovvia. Supponiamo allora $K = K'$, e quindi $Q = Q'$. Allora
$$R(x + v, y, y, x + v) = R'(x + v, y, y, x + v)$$
per ogni x, y, $v \in V$ (dove per semplicità di scrittura abbiamo posto $\langle R_{xy} v, w \rangle = R(x, y, v, w)$, e analogamente per R'), per cui
$$R(x, y, y, x) + 2R(x, y, y, v) + R(v, y, y, v) = R'(x, y, y, x) + 2R'(x, y, y, v) + R'(v, y, y, v),$$
e perciò
$$R(x, y, y, v) = R'(x, y, y, v).$$
Dunque
$$R(x, y + w, y + w, v) = R'(x, y + w, y + w, v),$$
per ogni x, y, v, $w \in V$, per cui
$$R(x, y, w, v) + R(x, w, y, v) = R'(x, y, w, v) + R'(x, w, y, v),$$
o meglio
$$R(x, y, v, w) - R'(x, y, v, w) = R(y, v, x, w) - R'(y, v, x, w).$$
Dunque la quantità $R(x, y, v, w) - R'(x, y, v, w)$ è invariante per permutazioni cicliche dei primi tre elementi. Usando la prima identità di Bianchi, cioè la Proposizione 6.1.1.(ii), otteniamo allora
$$3[R(x, y, v, w) - R'(x, y, v, w)] = 0,$$
e ci siamo. □

Esercizio 6.1.4. Dimostra che

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{6}\big\{&Q(Y+Z,X+W) - Q(X+Z,Y+W)\\
&+ Q(X,Y+W) + Q(Y,X+Z) + Q(Z,Y+W) + Q(W,X+Z)\\
&- Q(X,Y+Z) - Q(Y,X+W) - Q(Z,X+W) - Q(W,Y+Z)\\
&+ Q(X,Z) + Q(X,W) - Q(Y,Z) - Q(Y,W)\big\}.
\end{aligned}
$$

Uno degli obiettivi tipici dei geometri è classificare tutti gli oggetti che hanno determinate proprietà. Nel caso della geometria Riemanniana, viene naturale cercare di classificare le varietà in base alla loro curvatura. Il caso più semplice, ma comunque molto importante (e che discuteremo nel paragrafo 6.4) è quello delle varietà a curvatura sezionale costante:

Definizione 6.1.5: Una varietà Riemanniana M ha *curvatura sezionale costante* $k \in \mathbb{R}$ se $K(\pi) = k$ per ogni $p \in M$ e ogni 2-piano $\pi \subset T_pM$.

Osservazione 6.1.2. Usando la seconda identità di Bianchi è possibile dimostrare che una varietà Riemanniana M connessa di dimensione $n \geq 3$ per cui esista una funzione $k\colon M \to \mathbb{R}$ tale che $K(\pi) = k(p)$ per ogni $p \in M$ e ogni 2-piano $\pi \subset T_pM$ è necessariamente a curvatura sezionale costante (cioè la funzione k è costante).

Il tensore di curvatura di una varietà Riemanniana a curvatura sezionale costante è completamente determinato:

Corollario 6.1.4: *Una varietà Riemanniana M ha curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$ se e solo se il suo tensore di curvatura è dato da*

$$R_{XY}Z = k\big[\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\big]. \tag{6.1.3}$$

Dimostrazione: Una direzione è immediata. Viceversa, supponiamo che M abbia curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$. Definiamo un campo tensoriale $R' \in \mathcal{T}_3^1(M)$ tramite il membro destro della (6.1.3). Si vede subito che R' soddisfa le proprietà (i)–(iv) della Proposizione 6.1.1, e che $Q'(X,Y) = k\big[\|X\|^2\|Y\|^2 - |\langle X,Y\rangle|^2\big]$; quindi $K' = K \equiv k$, e la Proposizione 6.1.3 ci assicura che $R = R'$. □

Ci sono altri tipi di curvature che meritano di essere ricordati.

Definizione 6.1.6: Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. Se indichiamo con $\mathrm{Ric}(X,Y)$ la traccia dell'operatore lineare $Z \mapsto R_{ZX}Y$ otteniamo il *tensore di Ricci* $\mathrm{Ric} \in \mathcal{T}_2^0(M)$.

Osservazione 6.1.3. Un veloce richiamo di algebra lineare: se $L\colon V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita, e $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ è una base di V, allora scrivendo $L(v_i) = a_i^j v_j$ (cioè se (a_j^i) è la matrice che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$) troviamo che $\mathrm{tr}(L) = a_i^i$. Se poi $\mathcal{B}$ è una base ortonormale rispetto a un prodotto scalare $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ su V, allora $a_i^j = \langle L(v_i), v_j\rangle$, e quindi

$$\mathrm{tr}(L) = \sum_{i=1}^n \langle L(v_i), v_i\rangle.$$

Il tensore di Ricci è simmetrico: se $\{Z_1,\ldots,Z_n\}$ è una base ortonormale di T_pM l'osservazione precedente e le simmetrie del tensore di curvatura implicano

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{j=1}^n \langle R_{Z_jX}Y, Z_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle R_{Z_jY}X, Z_j\rangle = \mathrm{Ric}(Y,X).$$

Definizione 6.1.7: Sia M una varietà Riemanniana con tensore di curvatura R. La *curvatura di Ricci* del vettore $X \in T_pM$ è la forma quadratica associata al tensore di Ricci: $\mathrm{Ric}(X) = \mathrm{Ric}(X,X)$. L'*operatore di Ricci* è l'unico operatore lineare simmetrico $\mathrm{R} \in \mathcal{T}_1^1(M)$ tale che $\mathrm{Ric}(X,Y) = \langle \mathrm{R}(X), Y\rangle$. La *curvatura scalare* $S \in C^\infty(M)$ è la traccia dell'operatore di Ricci.

Se $\{Z_1,\ldots,Z_n\}$ è di nuovo una base ortonormale di T_pM otteniamo

$$\mathrm{Ric}(X)=\sum_{j=1}^n\langle R_{Z_jX}X,Z_j\rangle=\sum_{j=1}^n Q(Z_j,X),\qquad \mathrm{R}(X)=\sum_{j=1}^n R_{XZ_j}Z_j,$$

e quindi

$$S(p)=\sum_{j=1}^n\langle \mathrm{R}(Z_j),Z_j\rangle=\sum_{j=1}^n\mathrm{Ric}(Z_j,Z_j)=\sum_{i,j=1}^n\langle R_{Z_iZ_j}Z_j,Z_i\rangle=\sum_{i,j=1}^n Q(Z_i,Z_j).$$

In coordinate locali, se poniamo $\mathrm{Ric}(\partial_i,\partial_j)=R_{ij}$ e $\mathrm{R}(\partial_i)=R_i^j\partial_j$ troviamo

$$R_{ij}=R^k_{kij},\qquad R_i^j=g^{jh}R_{ih}=g^{jh}R^k_{kih},\qquad S=R_i^i=g^{ih}R_{ih}=g^{ih}R^k_{kih}.$$

Per completezza, concludiamo questo paragrafo richiamando una definizione che si trova spesso in letteratura.

Definizione 6.1.8: Una metrica Riemanniana g su una varietà M è detta *di Einstein* se esiste $\lambda\in C^\infty(M)$ tale che $\mathrm{Ric}=\lambda g$.

Se (M,g) è di Einstein, allora l'operatore di Ricci è $\lambda\,\mathrm{id}$; calcolando la traccia troviamo $\lambda=\frac{1}{n}S$, dove n è la dimensione di M. Quindi g è di Einstein se e solo se

$$\mathrm{Ric}=\frac{1}{n}\,Sg.$$

Osservazione 6.1.4. In realtà, usando la seconda identità di Bianchi si può dimostrare che la curvatura scalare di una varietà di Einstein di dimensione $n\ge 3$ è costante, per cui Ric risulta essere un multiplo costante della metrica.

Osservazione 6.1.5. Molto di quanto fatto in questo paragrafo si può ripetere per varietà fornite di un tensore simmetrico non degenere $g\in\mathcal{T}_2^0(M)$, per le quali, come già notato nell'Osservazione 4.4.1, la connessione di Levi-Civita è definita. L'unica differenza è che in questo caso si definisce la curvatura scalare come la traccia (nel senso della Definizione 4.4.4) del tensore di Ricci, senza passare attraverso l'operatore di Ricci (dove con "base ortonormale" di T_pM s'intende una base $\{Z_1,\ldots,Z_n\}$ tale che $g(Z_i,Z_j)=0$ se $i\ne j$, e $g(Z_i,Z_i)=\pm1$ per $i=1,\ldots,n$). In particolare, una metrica di Einstein in questo senso più generale soddisfa l'equazione $\mathrm{Ric}=\frac{1}{\mathrm{tr}(g)}\,Sg$.

Concludiamo il paragrafo con alcune definizioni e alcuni esercizi.

Esercizio 6.1.5. Se (M,g) è una varietà Riemanniana e $k>0$, è evidente che anche (M,kg) è una varietà Riemanniana. Trova che relazione esiste fra la connessione di Levi-Civita e il tensore di curvatura di (M,g) e i corrispondenti oggetti per (M,kg).

Definizione 6.1.9: Siano (M_1,g_1) e (M_2,g_2) due varietà Riemanniane. La *metrica prodotto* sul prodotto cartesiano $M_1\times M_2$ è la metrica Riemanniana definita da

$$\langle(v_1,v_2),(w_1,w_2)\rangle_{(p_1,p_2)}=\langle v_1,w_1\rangle_{p_1}+\langle v_2,w_2\rangle_{p_2}$$

per ogni $(p_1,p_2)\in M_1\times M_2$ e ogni (v_1,v_2), $(w_1,w_2)\in T_{(p_1,p_2)}(M_1\times M_2)=T_{p_1}M_1\oplus T_{p_2}M_2$.

Esercizio 6.1.6. Trova come si esprimono la connessione di Levi-Civita e il tensore di curvatura della metrica prodotto in funzione delle connessioni di Levi-Civita e dei tensori di curvatura dei due fattori.

Definizione 6.1.10: Una sottovarietà $N\subset M$ di una varietà Riemanniana è *totalmente geodetica* se per ogni $p\in N$ e $v\in T_pN$ la geodetica di M uscente da p in direzione v è completamente contenuta in N. Diremo invece che N è *piatta* se il tensore di curvatura in N della metrica indotta è identicamente nullo.

Esercizio 6.1.7. Sia $S^2\subset\mathbb{R}^3$ la sfera unitaria con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$, e sia $M=S^2\times S^2$ considerata con la metrica prodotto.

(i) Dimostra che la curvatura sezionale di M è non-negativa.
(ii) Trova una sottovarietà N di M totalmente geodetica, piatta e diffeomorfa a un 2-toro $T^2=S^1\times S^1$.

Esercizio 6.1.8. Sia M una sottovarietà di una varietà Riemanniana $\tilde{M}$, considerata con la metrica indotta. In questo esercizio indicheremo con la tilde tutti gli oggetti (connessione di Levi-Civita $\tilde{\nabla}$, curvatura $\tilde{R}$, eccetera) relativi a $\tilde{M}$, e senza tilde i corrispondenti oggetti relativi a M. Indicheremo poi con $T\colon T\tilde{M} \to TM$ e con $\perp\colon T\tilde{M} \to (TM)^\perp$ le proiezioni ortogonali. Infine, $\mathcal{N}(M)$ sarà lo spazio delle sezioni di $T\tilde{M}|_M$ ovunque ortogonali a TM. In altre parole, una sezione $N\colon M \to T\tilde{M}|_M$ appartiene a $\mathcal{N}(M)$ se e solo se $N(p) \in (T_pM)^\perp$ per ogni $p \in M$.

(i) Dimostra che l'applicazione $I\!I\colon \mathcal{N}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, detta *seconda forma fondamentale* di M in $\tilde{M}$, data da
$$I\!I(N, X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle$$
è $C^\infty(M)$-trilineare, ed è inoltre simmetrica negli ultimi due argomenti.

(ii) Sia $S\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{N}(M)$ l'*operatore di forma* definito da
$$S(X, Y) = - \perp (\tilde{\nabla}_X Y)$$
per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$. Dimostra che $\langle S(X, Y), N \rangle = I\!I(N, X, Y)$ per ogni $N \in \mathcal{N}(M)$ e $X, Y \in \mathcal{T}(M)$.

(iii) Dimostra l'*equazione di Gauss*
$$\langle \tilde{R}_{XY} Z, W \rangle = \langle R_{XY} Z, W \rangle + \langle S(Y, Z), S(X, W) \rangle - \langle S(X, Z), S(Y, W) \rangle$$
per ogni X, Y, Z, $W \in \mathcal{T}(M)$.

(iv) Dimostra l'*equazione di Codazzi-Mainardi*
$$\perp \tilde{R}_{XY} Z = S\big(Y, S(X, Z)\big) + S(\nabla_Y X, Z) + S(X, \nabla_Y Z) - S\big(X, S(Y, Z)\big) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z)$$
per ogni X, Y, $Z \in T(M)$.

(v) Trova che relazione c'è fra la seconda forma fondamentale, le equazioni di Gauss e le equazioni di Codazzi-Mainardi viste per le superfici in $\mathbb{R}^3$ e quelle definite qui.

(vi) Dimostra il *lemma di Synge:* sia $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una geodetica per $\tilde{M}$ il cui sostegno sia contenuto in M, e $\pi \subset T_{\sigma(0)}M$ un 2-piano contenente $\dot{\sigma}(0)$. Allora $K(\pi) \le \tilde{K}(\pi)$.

6.2 Campi di Jacobi

Vogliamo ora introdurre quello che risulterà essere lo strumento essenziale per collegare il comportamento delle geodetiche con la curvatura.

Per cominciare ci servono una definizione, un esempio e un lemma.

Definizione 6.2.1: Sia $\Sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma\colon [a, b] \to M$. Un *campo vettoriale X lungo Σ* è dato da una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ di $[a, b]$ associata a Σ e da applicazioni $X\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j] \to TM$ di classe C^∞ tali che $X(s, t) \in T_{\Sigma(s,t)}M$ per ogni $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j]$ e $j = 1, \ldots, k$. Se i vari campi vettoriali si raccordano con continuità nei punti interni $t_1, \ldots, t_{k-1}$ della suddivisione, diremo che X è un campo *continuo.*

Esempio 6.2.1. Sia $\Sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma\colon [a, b] \to M$. Allora i campi S e T introdotti nella Definizione 5.2.7 sono esempi di campi vettoriali lungo Σ. Inoltre, S è un campo continuo, mentre T potrebbe non esserlo.

Il prossimo risultato è analogo al Lemma 5.2.4.

Lemma 6.2.1: *Sia $\Sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variazione di una curva $\sigma\colon [a, b] \to M$ regolare a tratti in una varietà Riemanniana M. Allora per ogni campo vettoriale V lungo Σ e su ogni rettangolo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j]$ su cui Σ e V sono di classe C^∞ abbiamo*
$$D_s D_t V - D_t D_s V = R_{ST} V,$$

dove D_t è la derivata covariante lungo le curve principali, e D_s quella lungo le curve trasverse.

Dimostrazione: Calcoliamo in coordinate locali. Posto $V = V^i\partial_i$ abbiamo

$$D_t V = \frac{\partial V^i}{\partial t}\partial_i + V^i D_t\partial_i$$

e

$$D_s D_t V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial s\partial t}\partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial t}D_s\partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial s}D_t\partial_i + V^i D_s D_t\partial_i.$$

Analogamente,

$$D_t D_s V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial t\partial s}\partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial s}D_t\partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial t}D_s\partial_i + V^i D_t D_s\partial_i,$$

per cui

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i(D_s D_t\partial_i - D_t D_s\partial_i).$$

Ora, se indichiamo con Σ^h le coordinate di Σ abbiamo

$$T = \frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\partial_h \qquad \text{e} \qquad S = \frac{\partial\Sigma^h}{\partial s}\partial_h.$$

Quindi

$$D_t\partial_i = \nabla_T\partial_i = \frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i$$

e

$$D_s D_t\partial_i = D_s\left(\frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i\right) = \frac{\partial^2\Sigma^h}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i + \frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\nabla_S\nabla_{\partial_h}\partial_i = \frac{\partial^2\Sigma^h}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_h}\partial_i + \frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\frac{\partial\Sigma^k}{\partial s}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_h}\partial_i.$$

In maniera analoga si calcola $D_t D_s\partial_i$. Ricordando che $[\partial_h, \partial_k] = O$ otteniamo infine

$$D_s D_t\partial_i - D_t D_s\partial_i = \frac{\partial\Sigma^h}{\partial t}\frac{\partial\Sigma^k}{\partial s}R_{\partial_k\partial_h}\partial_i = R_{ST}\partial_i$$

e ci siamo. □

Usando questo lemma possiamo caratterizzare i campi variazione di variazioni in cui tutte le curve principali sono geodetiche.

Definizione 6.2.2: Una *variazione geodetica* di una geodetica $\sigma\colon [a,b] \to M$ in una varietà Riemanniana M è una variazione liscia $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ tale che ogni curva principale $\sigma_s = \Sigma(s,\cdot)$ sia una geodetica.

L'esempio principale di variazione geodetica è descritto nel prossimo

Lemma 6.2.2: *Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una geodetica, e v, $w \in T_{\sigma(a)}M$. Allora esiste una variazione geodetica $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ di σ il cui campo variazione V soddisfa $V(a) = v$ e $D_a V = w$. La variazione Σ è data da*

$$\Sigma(s,t) = \exp_{\tau(s)}\bigl((t-a)(u(s) + sw(s))\bigr),$$

dove $\tau\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ è una curva uscente da $\sigma(a)$ tangente a v, mentre u, $w \in \mathcal{T}(\tau)$ sono le estensioni parallele lungo τ di $\dot\sigma(a)$ e w rispettivamente.

Dimostrazione: Se $\tau\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ è una curva e $\psi \in \mathcal{T}(\tau)$, allora la $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ data da

$$\Sigma(s,t) = \exp_{\tau(s)}\bigl((t-a)\psi(s)\bigr)$$

è sempre una variazione geodetica della geodetica $\sigma_0(t) = \exp_{\tau(0)}\bigl((t-a)\psi(0)\bigr)$, non appena $(b-a)\psi(0) \in \mathcal{E}_{\tau(0)}$ ed ε è abbastanza piccolo. Quindi vogliamo trovare τ e ψ in modo che $\sigma_0 \equiv \sigma$ e il campo variazione V di Σ soddisfi $V(a) = v$ e $D_a V = w$.

Ora, $\sigma(t) = \exp_p\bigl((t-a)\dot\sigma(a)\bigr)$; quindi per avere $\sigma_0 \equiv \sigma$ basta scegliere τ e ψ in modo che $\tau(0) = \sigma(a)$ e $\psi(0) = \dot\sigma(a)$. Poi $\Sigma(s,a) = \tau(s)$, per cui $V(a) = S(0,a) = \dot\tau(a)$ e quindi $V(a) = v$ non appena τ è scelta in modo che $\dot\tau(a) = v$.

Infine, $T(s,t) = d(\exp_{\tau(s)})_{(t-a)\psi(s)}\bigl(\psi(s)\bigr)$, per cui il Lemma 5.2.4 dà

$$D_t S|_{t=a} = D_s T(s,a) = D_s\psi,$$

per cui $D_a V = D_t S|_{t=a,s=0} = D_0\psi$, e quindi $D_a V = w$ non appena ψ è scelto in modo che $D_0\psi = w$. Ma il modo più semplice per scegliere un campo lungo τ fissando il suo valore iniziale e il valore iniziale della sua derivata covariante lungo τ è prendendolo lineare rispetto alla derivata covariante, cioè della forma $\psi(s) = u(s) + sw(s)$, con u e w paralleli lungo τ e con $u(0) = \dot\sigma(a)$ e $w(0) = w$. In questo modo si ha $\psi(0) = \dot\sigma(a)$ e $D_s\psi = w(s)$, come voluto, e ci siamo. □

Siamo allora in grado di caratterizzare completamente i campi variazione di variazioni geodetiche:

Proposizione 6.2.3: *Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una geodetica. Allora un campo $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ è il campo variazione di una variazione geodetica di σ se e solo se*

$$D^2 J + R_{J\dot\sigma}\dot\sigma = O. \tag{6.2.1}$$

Inoltre, dati v, $w \in T_{\sigma(a)}M$ esiste un unico campo $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ soddisfacente (6.2.1) *e tale che $J(a) = v$ e $D_a J = w$.*

Dimostrazione: Sia Σ una variazione geodetica di σ, di campo variazione J, e indichiamo come al solito con D_t la derivata covariante lungo le curve principali di Σ, e con D_s quella lungo le curve trasverse. Per ipotesi abbiamo $D_t T \equiv O$; quindi

$$O \equiv D_s D_t T = D_t D_s T + R_{ST}T = D_t D_t S + R_{ST}T,$$

dove abbiamo usato i Lemmi 6.2.1 e 5.2.4. Siccome per $s = 0$ si ha $S = J$ e $T = \dot\sigma$, abbiamo ricavato (6.2.1).

Ora, sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormale di $T_{\sigma(a)}M$, con $E_1 = \dot\sigma(a)/\|\dot\sigma(a)\|_{\sigma(a)}$, e indichiamo con $E_j(t)$ l'estensione parallela di E_j lungo σ, in modo che $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ sia una base ortonormale di $T_{\sigma(t)}M$ per ogni $t \in [a,b]$. Definiamo inoltre funzioni $\hat R^i_{jhk}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$R_{E_j(t)E_h(t)}E_k(t) = \hat R^i_{jhk}(t)E_i(t).$$

Ogni $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ si può scrivere come $J(t) = J^i(t)E_i(t)$ per opportune funzioni $J^1, \ldots, J^n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$; in particolare, $J(a) = J^i(a)E_i$. Inoltre, essendo gli $E_j(t)$ paralleli otteniamo $D_t J = \dot J^i(t)E_i(t)$, per cui $D_a J = \dot J^i(a)E_i$. Quindi J soddisfa (6.2.1) se e solo se si ha

$$\ddot J^i + \|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)}\hat R^i_{j11}J^j \equiv 0$$

per $i = 1, \ldots, n$. Dunque (6.2.1) è un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, per cui (Teorema 4.3.4, adattato al caso dei sistemi del second'ordine come nella dimostrazione della Proposizione 5.1.2) per ogni v, $w \in T_{\sigma(a)}M$ esiste un'unica soluzione $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ di (6.2.1) tale che $J(a) = v$ e $D_a J = w$.

Infine, supponiamo che J soddisfi (6.2.1), e sia $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ una variazione geodetica di σ il cui campo variazione V soddisfi $V(a) = J(a)$ e $D_a V = D_a J$, costruita per esempio come nel Lemma 6.2.2. Allora anche V soddisfa (6.2.1), con le stesse condizioni iniziali di J; quindi $V \equiv J$, e ci siamo. □

Definizione 6.2.3: Sia $\sigma\colon [a,b] \to M$ una geodetica. Un *campo di Jacobi* lungo σ è una soluzione $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ di (6.2.1), che è detta *equazione di Jacobi*. Lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi lungo σ verrà indicato con $\mathcal{J}(\sigma)$. Un campo di Jacobi $J \in \mathcal{J}(\sigma)$ sarà detto *proprio* se $J(t) \perp \dot\sigma(t)$ per ogni $t \in [a,b]$. Il sottospazio dei campi di Jacobi propri sarà indicato con $\mathcal{J}_0(\sigma)$.

Alcune proprietà elementari dei campi di Jacobi sono contenute nella seguente

Proposizione 6.2.4: *Sia $\sigma:[a,b]\to M$ una geodetica. Allora:*

(i) *gli zeri di un campo di Jacobi $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ non identicamente nullo sono isolati;*
(ii) *per ogni $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ abbiamo*

$$\langle J(t),\dot\sigma(t)\rangle_{\sigma(t)}=\langle J(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}+\langle D_aJ,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}(t-a); \tag{6.2.2}$$

(iii) *un campo di Jacobi $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ è proprio se e solo se $J(a)\perp\dot\sigma(a)$ e $D_aJ\perp\dot\sigma(a)$ se e solo se è ortogonale a $\dot\sigma$ in due punti;*
(iv) *ogni campo di Jacobi J lungo σ si può scrivere in modo unico nella forma $J=J_0+[c_0+c_1(t-a)]\dot\sigma$, dove $J_0\in\mathcal{J}_0(\sigma)$ e c_0, $c_1\in\mathbb{R}$;*
(v) $\dim\mathcal{J}(\sigma)=2\dim M$ *e* $\dim\mathcal{J}_0(\sigma)=2\dim M-2$.

Dimostrazione: (i) Se $t_0\in[a,b]$ è uno zero non isolato di J, possiamo trovare una successione $\{t_\nu\}\subset[a,b]$ convergente a t_0 di zeri di J. Ma allora

$$D_{t_0}J=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\tilde\sigma_{t_0,t_\nu}^{-1}\big(J(t_\nu)\big)-J(t_0)}{t_\nu-t_0}=O,$$

grazie alla Proposizione 4.3.6, dove $\tilde\sigma_{t_0,t_\nu}:T_{\sigma(t_0)}M\to T_{\sigma(t_\nu)}M$ è il trasporto parallelo lungo σ. Ma allora $J\equiv O$ per la Proposizione 6.2.3, in quanto J ha derivata covariante nulla in un punto in cui si annulla.

(ii) Siccome $D\dot\sigma\equiv O$ abbiamo $\frac{d}{dt}\langle J,\dot\sigma\rangle_\sigma=\langle DJ,\dot\sigma\rangle_\sigma$ e

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle J,\dot\sigma\rangle_\sigma=\langle D^2J,\dot\sigma\rangle_\sigma=-\langle R_{J\dot\sigma}\dot\sigma,\dot\sigma\rangle_\sigma=0,$$

dove l'ultima eguaglianza segue dalle simmetrie del tensore di curvatura. In particolare, $\langle J,\dot\sigma\rangle_\sigma$ dev'essere lineare affine in t, e otteniamo (6.2.2).

(iii) Segue subito da (ii).

(iv) Prima di tutto, si verifica subito che $[c_0+c_1(t-a)]\dot\sigma$ è un campo di Jacobi lungo σ quali che sianno c_0, $c_1\in\mathbb{R}$. Ora, dato $J\in\mathcal{J}(\sigma)$, vogliamo diomostrare che esistono unici c_0, $c_1\in\mathbb{R}$ tali che $J_0=J-[c_0+c_1(t-a)]\dot\sigma$ sia un campo di Jacobi proprio lungo σ. Per il punto (iii), J_0 è proprio se e solo se $J_0(a)$ e D_aJ_0 sono ortogonali a $\dot\sigma(a)$. Ma

$$\langle J_0(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}=\langle J(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}-c_0\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)}\quad\text{e}\quad\langle D_aJ_0,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}=\langle D_aJ,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}-c_1\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)};$$

quindi J_0 è proprio se e solo se

$$c_0=\frac{\langle J(a),\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}}{\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)}}\qquad\text{e}\qquad c_1=\frac{\langle D_aJ,\dot\sigma(a)\rangle_{\sigma(a)}}{\|\dot\sigma(a)\|^2_{\sigma(a)}},$$

e ci siamo.

(v) Che la dimensione di $\mathcal{J}(\sigma)$ sia uguale a $2\dim M$ segue dall'esistenza e unicità della soluzione dell'equazione di Jacobi date le condizioni iniziali. Infine, (iv) implica che $\dim\mathcal{J}_0(\sigma)=2\dim M-2$. □

Uno dei motivi per cui i campi di Jacobi sono importanti è che ci permettono di stabilire quando $\exp_p$ smette di essere un diffeomorfismo locale.

Definizione 6.2.4: Sia $\sigma:[a,b]\to M$ una geodetica con $\sigma(a)=p$ e $\sigma(b)=q$. Diremo che q è *coniugato* a p lungo σ se esiste un campo di Jacobi $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ non identicamente nullo tale che $J(a)=J(b)=O$. L'*ordine* di q come punto coniugato di p è la dimensione del sottospazio dei campi di Jacobi lungo σ (necessariamente propri) che si annullano in a e b. Chiaramente, l'ordine è al massimo $n-1=\dim\{J\in\mathcal{J}_0(\sigma)\mid J(a)=O\}$.

Allora abbiamo la

Proposizione 6.2.5: *Data una varietà Riemanniana M, scegliamo $p \in M$, un vettore $v \in \mathcal{E}_p \subseteq T_pM$, e poniamo $q = \exp_p(v)$. Allora $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale nell'intorno di v se e solo se q non è coniugato a p lungo la geodetica $\sigma\colon [0,1] \to M$ data da $\sigma(t) = \exp_p(tv)$. Inoltre, l'ordine di q come punto coniugato di p lungo σ è esattamente la dimensione del nucleo di $d(\exp_p)_v$.*

Dimostrazione: Grazie al teorema della funzione inversa (Corollario 2.4.5), $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale nell'intorno di v se e solo se v non è un punto critico di $\exp_p$, cioè se e solo se $d(\exp_p)_v$ è iniettivo; quindi per avere la tesi ci basta costruire un isomorfismo χ fra il nucleo di $d(\exp_p)_v$ e il sottospazio dei campi di Jacobi lungo σ che si annullano in 0 e 1.

In realtà, faremo di più: costruiremo un isomorfismo χ fra T_pM e $\{J \in \mathcal{J}(\sigma) \mid J(0) = O\}$ che manderà $\operatorname{Ker} d(\exp_p)_v$ esattamente in $\{J \in \mathcal{J}(\sigma) \mid J(0) = J(1) = O\} \subseteq \mathcal{J}_0(\sigma)$. Dato $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$, definiamo una variazione geodetica $\Sigma_w\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$ di σ ponendo

$$\Sigma_w(s,t) = \exp_p\bigl(t(v + sw)\bigr).$$

Il campo variazione J_w di questa variazione geodetica è dato da

$$J_w(t) = t\, d(\exp_p)_{tv}(w);$$

in particolare, $J_w(0) = O$ e $D_0 J_w = w$. Dunque l'applicazione $\chi\colon T_pM \to \mathcal{J}(\sigma)$ data da $\chi(w) = J_w$ è lineare e iniettiva; siccome $\dim T_pM = n = \dim\{J \in \mathcal{J}(\sigma) \mid J(0) = O\}$, l'immagine di χ è esattamente il sottospazio di tutti i campi di Jacobi che si annullano in 0. Ma $J_w(1) = d(\exp_p)_v(w)$; quindi χ manda il nucleo di $d(\exp_p)_v$ sul sottospazio dei campi di Jacobi lungo σ che si annullano in 0 e 1, e ci siamo. □

6.3 Il Teorema di Cartan-Hadamard

In questo paragrafo dimostreremo il primo risultato fondamentale sulle relazioni fra la curvatura e la topologia di una varietà Riemanniana: il Teorema di Cartan-Hadamard sulle varietà con curvatura sezionale non positiva. Ci servirà il

Lemma 6.3.1: *Sia $H\colon M \to N$ un'isometria locale fra varietà Riemanniane connesse, e supponiamo che M sia completa. Allora anche N è completa, e H è un rivestimento.*

Dimostrazione: Cominciamo col dimostrare un fatto prelimare. Sia $q \in H(M)$, e $p \in H^{-1}(q)$. Allora per ogni geodetica σ uscente da q esiste un'unica geodetica $\tilde\sigma$ uscente da p tale che $\sigma = H \circ \tilde\sigma$. Infatti, prima di tutto ricordiamo che (Esercizio 5.1.2) $\tilde\sigma$ è una geodetica in M se e solo se σ è una geodetica in N. Poi, se vale $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ si deve avere $\dot\sigma(0) = dH_p\bigl(\dot{\tilde\sigma}(0)\bigr)$, per cui $\tilde\sigma$ è l'unica geodetica di M uscente da p e tale che $\dot{\tilde\sigma}(0) = (dH_p)^{-1}\bigl(\dot\sigma(0)\bigr)$. Viceversa, data σ indichiamo con $\tilde\sigma$ l'unica geodetica di M uscente da p e tale che $\dot{\tilde\sigma}(0) = (dH_p)^{-1}\bigl(\dot\sigma(0)\bigr)$; allora $H \circ \tilde\sigma$ dev'essere una geodetica di N uscente da q tangente a $\dot\sigma(0)$, per cui $H \circ \tilde\sigma = \sigma$, come voluto.

Dimostriamo che N è completa. Dato $q \in H(M)$, sia σ una geodetica radiale uscente da q, e prendiamo $p \in H^{-1}(q)$. Essendo M completa, la geodetica $\tilde\sigma$ uscente da p tale che $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Ma allora anche σ lo è, e, per il Teorema di Hopf-Rinow, N è completa.

Ora dimostriamo che H è surgettiva. Siano $q_0 = H(p) \in \varphi(M)$ e $q \in N$ qualsiasi. Essendo N completa, esiste una geodetica minimizzante σ da q_0 a q; poniamo $w = \dot\sigma(0)$. Ma allora $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ per un'opportuna geodetica $\tilde\sigma$ in M uscente da p, per cui q risulta essere nell'immagine di H.

Rimane da far vedere che H è un rivestimento. Prendiamo $q_0 \in N$, e sia $U = B_\varepsilon(q_0)$ una palla geodetica di centro q_0; vogliamo dimostrare che U è un intorno ben rivestito di q_0. Scriviamo $H^{-1}(q_0) = \{p_\alpha\}$, e indichiamo con U_α la palla di centro p_α e raggio ε per la distanza Riemanniana d^M di M. Cominciamo a far vedere che $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ se $\alpha \neq \beta$. Infatti, essendo M completa possiamo trovare una geodetica minimizzante $\tilde\sigma$ da p_α a p_β. La sua proiezione $\sigma = H \circ \tilde\sigma$ è una geodetica in N da q_0 a q_0. Siccome le geodetiche che partono da q_0 in $B_\varepsilon(q_0)$ sono solo quelle radiali, σ deve uscire da U e rientrarvi; quindi ha lunghezza maggiore di 2ε. Dunque $d^M(p_\alpha, p_\beta) = L(\tilde\sigma) = L(\sigma) > 2\varepsilon$ (dove abbiamo usato l'Esercizio 5.2.2), e per la disuguaglianza triangolare $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$.

Adesso mostriamo che $H^{-1}(U) = \bigcup U_\alpha$. Siccome H è un'isometria locale, sempre l'Esercizio 5.2.2 implica che

$$d^N\bigl(H(p_1), H(p_2)\bigr) \le d^M(p_1, p_2)$$

per ogni p_1, $p_2 \in M$, dove d^N è la distanza Riemanniana di N. In particolare, essendo U la palla per d^N di centro q_0 e raggio ε (Teorema 5.2.10), otteniamo $H(U_\alpha) \subseteq U$ per ogni α. Viceversa, sia $p \in H^{-1}(U)$. Questo significa che $q = H(p) \in U$, per cui esiste una geodetica minimizzante σ da q a q_0, e $r = d^N(q_0, q) < \varepsilon$. Sia $\tilde\sigma$ la geodetica uscente da p tale che $\sigma = H \circ \tilde\sigma$; allora $H\bigl(\tilde\sigma(r)\bigr) = \sigma(r) = q_0$, per cui $\tilde\sigma(r) = p_\alpha$ per qualche α, e $p \in U_\alpha$ come voluto.

Infine, dobbiamo dimostrare che $H|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to U$ è un diffeomorfismo per ogni α. Sappiamo che H manda la geodetica radiale in U_α uscente da p_α tangente a $w \in T_{p_\alpha}M$ nella geodetica radiale in U uscente da q_0 tangente a $dH_{p_\alpha}(w) \in T_{q_0}N$. Ma questo vuol dire esattamente che

$$H|_{U_\alpha} = \exp_{q_0} \circ dH_{p_\alpha} \circ (\exp_{p_\alpha}|_{B_\varepsilon(O_{p_\alpha})})^{-1},$$

e quindi è un diffeomorfismo. □

Esercizio 6.3.1. Sia $H\colon M \to N$ un'isometria locale fra varietà Riemanniane connesse, e supponiamo che N sia completa. Dimostra che se H è un rivestimento allora anche M è completa, e trova un esempio di un'isometria locale fra una varietà M non completa e una varietà N completa.

E allora abbiamo il

Teorema 6.3.2: (Cartan-Hadamard) *Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa. Allora:*
- (i) *se M ha curvatura sezionale $K \le 0$ allora ogni $p \in M$ non ha punti coniugati;*
- (ii) *se esiste $p \in M$ senza punti coniugati allora $\exp_p\colon T_pM \to M$ è un rivestimento.*

In particolare, ogni varietà Riemanniana completa semplicemente connessa di dimensione n con curvatura sezionale non positiva è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione: (i) Dato $p \in M$, sia σ una geodetica uscente da p. Dobbiamo dimostrare che se $J \in \mathcal{J}(\sigma)$ è un campo di Jacobi lungo σ non identicamente nullo che si annulla in 0 allora $J(t) \ne O$ per ogni $t \ne 0$. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(t) = \|J(t)\|^2_{\sigma(t)}$. Allora $f' = 2\langle DJ, J\rangle_\sigma$, per cui $f(0) = f'(0) = 0$, e

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 2\bigl[\|DJ\|^2_\sigma + \langle D^2 J, J\rangle_\sigma\bigr] = 2\bigl[\|DJ\|^2_\sigma - \langle R_{J\dot\sigma}\dot\sigma, J\rangle_\sigma\bigr] = 2\bigl[\|DJ\|^2_\sigma - Q_\sigma(J, \dot\sigma)\bigr] \ge 0,$$

grazie all'ipotesi sul segno della curvatura sezionale. Quindi f è una funzione convessa non negativa con zeri isolati che si annulla in 0, per cui può annullarsi in un altro punto soltanto se è identicamente nulla, e ci siamo.

(ii) Poniamo su T_pM la metrica Riemanniana $g_0 = (\exp_p)^* g$; siccome p è privo di punti coniugati, $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale grazie alla Proposizione 6.2.5, e quindi g_0 è ben definita. Per costruzione, $\exp_p\colon (T_pM, g_0) \to (M, g)$ è un'isometria locale; quindi le rette uscenti dall'origine sono geodetiche (in quanto le loro immagini sono geodetiche in M). Per il Teorema di Hopf-Rinow, (T_pM, g_0) è completa, e la tesi segue allora dal Lemma 6.3.1. □

Concludiamo questa sezione con alcune definizioni ed esercizi.

Definizione 6.3.1: Sia M una varietà Riemanniana. Diremo che una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ è *strettamente convessa* se l'Hessiano $\nabla^2 f$ è definito positivo in ogni punto di M (e scriveremo $\nabla^2 f > 0$). Diremo invece che un sottoinsieme $S \subseteq M$ è *strettamente convesso* se il supporto di ogni geodetica minimizzante collegante due punti di $\overline{S}$ è contenuto nell'interno di S (con la possibile eccezione dei punti estremi).

Esercizio 6.3.2. Sia M una varietà Riemanniana.
- (i) Dimostra che una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa se e solo se per ogni geodetica σ di M la funzione $f \circ \sigma$ è strettamente convessa nel senso usuale.
- (ii) Dato $p_0 \in M$ definiamo $r\colon M \to \mathbb{R}$ ponendo $r(p) = d(p, p_0)$. Dimostra che r^2 è di classe C^∞ in un intorno di p_0, e che $\nabla^2 r^2(p_0) > 0$.
- (iii) Dimostra che per ogni $p_0 \in M$ esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < \varepsilon < \delta$ la palla geodetica $B_\varepsilon(p_0)$ di centro p_0 e raggio ε è strettamente convessa.
- (iv) Dimostra che se M è completa, semplicemente connessa, e con curvatura sezionale $K \le 0$, allora per ogni $p_0 \in M$ la funzione r^2 definita in (ii) è strettamente convessa su tutta M.

Definizione 6.3.2: Sia M una varietà Riemanniana completa. Una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ è detta *esaustione* se l'insieme $\{p \in M \mid f(p) \le c\}$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.3.3. Sia M una varietà Riemanniana completa.

(i) Dimostra che un'esaustione strettamente convessa ha un unico punto di minimo e nessun altro punto critico.

(ii) Sia G un gruppo di Lie compatto di isometrie di M, μ una misura di Borel su G, e $f\colon M \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Dimostra che la funzione $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ data da

$$\tilde{f}(p) = \int_G f\bigl(g(p)\bigr)\, d\mu(g)$$

è strettamente convessa.

(iii) La *misura di Haar* di un gruppo topologico compatto G è l'unica misura di Borel μ su G tale che $\mu(G) = 1$ e

$$\int_G f(gh)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g)$$

per ogni $f \in C^0(G)$ e $h \in G$. Usando l'esistenza della misura di Haar su qualsiasi gruppo topologico compatto, dimostra che se M è semplicemente connessa con curvatura sezionale $K \le 0$, allora ogni gruppo di Lie compatto di isometrie di M ammette un punto fisso, cioè un punto $p_0 \in M$ tale che $g(p_0) = p_0$ per ogni $g \in G$.

6.4 Spazi di curvatura costante

Vogliamo ora trovare tutte le varietà semplicemente connesse a curvatura sezionale costante. Per arrivarci ci serviranno due interessanti risultati dovuti a É. Cartan.

Il primo dice che localmente il tensore di curvatura determina la metrica, una specie di viceversa locale dell'Esercizio 6.1.1.

Definizione 6.4.1: Siano M e $\tilde{M}$ due varietà Riemanniane di uguale dimensione, $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Un'isometria lineare $I\colon T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ determina una corrispondenza biunivoca fra le geodetiche uscenti da p e quelle uscenti da $\tilde{p}$: alla geodetica σ_v si associa la geodetica $\sigma_{I(v)}$. Diremo che I *preserva il trasporto parallelo della curvatura sezionale* se $K_M\bigl(\tilde{\sigma}_v(\pi)\bigr) = K_{\tilde{M}}\bigl(\tilde{\sigma}_{I(v)}\bigl(I(\pi)\bigr)\bigr)$ per ogni 2-piano $\pi \subset T_pM$ e ogni $v \in T_pM$, dove $\tilde{\sigma}_v$ (rispettivamente, $\tilde{\sigma}_{I(v)}$) indica il trasporto parallelo lungo σ_v (rispettivamente, lungo $\sigma_{I(v)}$).

Proposizione 6.4.1: (É. Cartan) *Siano M e $\tilde{M}$ due varietà Riemanniane, $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $I\colon T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ un'isometria lineare che preserva il trasporto parallelo della curvatura sezionale. Scegliamo un numero $0 < \delta \le \operatorname{inj\,rad}(p)$ tale che $B_\delta(O_{\tilde{p}})$ sia contenuto nel dominio $\tilde{\mathcal{E}}$ dell'esponenziale di $\tilde{M}$. Allora*

$$F = \exp_{\tilde{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}\colon B_\delta(p) \to B_\delta(\tilde{p})$$

è un'isometria locale. In particolare, se si ha anche $\delta \le \operatorname{inj\,rad}(\tilde{p})$ allora F è un'isometria.

Dimostrazione: Preso $v \in T_pM$, poniamo $\tilde{v} = I(v) \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$; allora ci basta dimostrare che per ogni $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$ si ha

$$\bigl\|d(\exp_{\tilde{p}})_{\tilde{v}}\bigl(I(w)\bigr)\bigr\| = \|d(\exp_p)_v(w)\|. \tag{6.4.1}$$

Siccome I è un'isometria, il Lemma 5.2.8 ci dice che basta dimostrare (6.4.1) per w versore ortogonale a v (e in tal caso $I(w)$ è un versore ortogonale a $\tilde{v}$). Sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormale di T_pM con $E_1 = v/\|v\|_p$ e $E_n = w$, e poniamo $\tilde{E}_j = I(E_j)$. Sia σ la geodetica uscente da p tangente a v, e $\tilde{\sigma}$ la geodetica uscente da $\tilde{p}$ tangente a $\tilde{v}$; indicheremo con $E_j(t)$ e $\tilde{E}_j(t)$ l'estensione parallela di E_j ed $\tilde{E}_j$ lungo σ e $\tilde{\sigma}$ rispettivamente. Definiamo ora le variazioni Σ e $\tilde{\Sigma}$ di σ e $\tilde{\sigma}$:

$$\Sigma(s,t) = \exp_p\bigl(t(v + sw)\bigr), \qquad \tilde{\Sigma}(s,t) = \exp_{\tilde{p}}\bigl(t\bigl(\tilde{v} + sI(w)\bigr)\bigr),$$

e siano J e $\tilde{J}$ i corrispondenti campi di Jacobi. Allora $J(0) = O = \tilde{J}(0)$, $D_0 J = w$ e $D_0\tilde{J} = I(w)$. Inoltre $J(1) = d(\exp_p)_v(w)$ e $\tilde{J}(1) = d(\exp_{\tilde{p}})_{\tilde{v}}\big(I(w)\big)$; quindi basta dimostrare che $\|J(1)\| = \|\tilde{J}(1)\|$. Ora, scriviamo $J(t) = J^i(t)E_i(t)$ e $R_{E_i(t)E_j(t)}E_k(t) = R^h_{ijk}(t)E_h(t)$, e analogamente per $\tilde{J}$ e $\tilde{R}$; quindi le funzioni J^i e $\tilde{J}^i$ soddisfano le

$$\begin{cases} \dfrac{d^2J^i}{dt^2} + \|v\|_p^2 R^i_{j11}J^j = 0, \\ J^i(0) = 0, \quad \dfrac{dJ^i}{dt}(0) = \delta^i_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{J}^i}{dt^2} + \|I(v)\|_{\tilde{p}}^2 \tilde{R}^i_{j11}\tilde{J}^j = 0, \\ \tilde{J}^i(0) = 0, \quad \dfrac{d\tilde{J}^i}{dt}(0) = \delta^i_n. \end{cases}$$

Ma

$$R^i_{j11}(t) = \langle R_{E_j(t)E_1(t)}E_1(t), E_i(t)\rangle_{\sigma(t)} = \langle \tilde{R}_{\tilde{E}_j(t)\tilde{E}_1(t)}\tilde{E}_1(t), \tilde{E}_i(t)\rangle_{\tilde{\sigma}(t)} = \tilde{R}^i_{j11}(t),$$

in quanto la curvatura sezionale determina il tensore di curvatura, e la curvatura sezionale è preservata per trasporto parallelo. Siccome $\|v\|_p = \|I(v)\|_{\tilde{p}}$, ne segue che $(J^1,\ldots,J^n)$ e $(\tilde{J}^1,\ldots,\tilde{J}^n)$ soddisfano lo stesso sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie con le stesse condizioni iniziali; quindi coincidono, e

$$\|J(1)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |J^i(1)|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\tilde{J}^i(1)|^2} = \|\tilde{J}(1)\|,$$

come volevasi dimostrare. □

Ci servirà anche un altro risultato di É. Cartan:

Teorema 6.4.2: (É. Cartan) *Siano φ, $\psi\colon M \to \tilde{M}$ due isometrie locali fra due varietà Riemanniane connesse. Supponiamo che esista $p_0 \in M$ tale che $\varphi(p_0) = \psi(p_0)$ e $d\varphi_{p_0} = d\psi_{p_0}$. Allora $\varphi \equiv \psi$.*

Dimostrazione: L'insieme $C = \{p \in M \mid \varphi(p) = \psi(p), d\varphi_p = d\psi_p\}$ è un chiuso non vuoto di M; ci basterà dimostrare che è aperto. Prendiamo $p \in C$, e sia $0 < \delta < \min\{\operatorname{inj\,rad}(p), \operatorname{inj\,rad}\varphi(p)\}$, per cui $B_p(\delta) \subset M$ e $B_{\varphi(p)}(\delta) \subset \tilde{M}$ sono palle geodetiche. Siccome φ e ψ sono isometrie locali, mandano geodetiche uscenti da p in geodetiche uscenti da $\varphi(p) = \psi(p)$. Ma allora

$$\exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p = \varphi \circ \exp_p \qquad \text{e} \qquad \exp_{\psi(p)} \circ d\psi_p = \psi \circ \exp_p$$

su $B_{O_p}(\delta)$, per cui

$$\varphi|_{B_p(\delta)} = \exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p \circ (\exp_p)^{-1}|_{B_p(\delta)} = \exp_{\psi(p)} \circ d\psi_p \circ (\exp_p)^{-1}|_{B_p(\delta)} = \psi|_{B_p(\delta)},$$

per cui $B_p(\delta) \subset C$, ed è fatta. □

Corollario 6.4.3: *Sia $F\colon M \to M$ un'isometria di una varietà Riemanniana in sé. Supponiamo che esista $p \in M$ tale che $F(p) = p$ e $dF_p = \mathrm{id}$. Allora $F \equiv \mathrm{id}_M$.*

Dimostrazione: Basta applicare il Teorema precedente con $\tilde{M} = M$, $\varphi = F$ e $\psi = \mathrm{id}_M$. □

Possiamo ora dimostrare un'affermazione fatta nell'Esempio 4.2.4:

Corollario 6.4.4: $\mathrm{Iso}(S^n_R) = O(n+1)$.

Dimostrazione: Sia $F \in \mathrm{Iso}(S^n_R)$ un'isometria qualunque di S^n_R, $N \in S^n_R$ il polo nord, $p = F(N)$ e poniamo $E_j = dF_N(e_j)$ per $j = 1,\ldots,n$, dove $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Essendo F un'isometria, $\{E_1,\ldots,E_n\}$ è una base ortonormale di $T_pS^n_R$; scegliamo $A \in O(n+1)$ tale che $A(N) = p$ e $A(e_j) = E_j$ per $j = 1,\ldots,n$. Allora $G = A^{-1} \circ F$ è un'isometria di S^n_R tale che $G(N) = N$ e $dG_N(e_j) = e_j$ per $j = 1,\ldots,n$; quindi $dG_N = \mathrm{id}$, e il Corollario 6.4.3 implica $G = \mathrm{id}$, cioè $F = A \in O(n+1)$. □

Esercizio 6.4.1. Dimostra che il gruppo delle isometrie dello spazio iperbolico U^n_R è il gruppo $O_+(1,n)$ introdotto nell'Esercizio 4.2.1.

Come già detto, il nostro obiettivo è classificare le varietà Riemanniane semplicemente connesse a curvatura sezionale costante. Vediamo quali esempi conosciamo già.

Esempio 6.4.1. Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea ha chiaramente curvatura sezionale costante nulla.

Esempio 6.4.2. La sfera $S^n_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ha curvatura sezionale costante. Infatti, abbiamo visto nell'Esempio 4.2.4 che il gruppo $O(n+1)$ agisce isometricamente su S^n_R, e transitivamente sulle basi ortonormali in TS^n_R. Quindi se $p, \tilde{p} \in S^n_R$ sono due punti qualsiasi, e $\pi \subset T_pS^n_R$ e $\tilde{\pi} \subset T_{\tilde{p}}S^n_R$ sono due 2-piani qualsiasi, esiste (perché?) un'isometria $A \in O(n+1)$ tale che $A(p) = \tilde{p}$ e $dA_p(\pi) = A(\pi) = \tilde{\pi}$; essendo la curvatura sezionale invariante per isometrie, ne deduciamo che $K(\pi) = K(\tilde{\pi})$. Per conoscere la curvatura sezionale di S^n_R ci basta allora calcolarla su un 2-piano qualsiasi. Indichiamo con $\varphi = \psi_1^{-1} = (\theta^1, \dots, \theta^n)$ le coordinate sferiche introdotte nell'Esempio 2.1.11, e con cui abbiamo lavorato negli Esempi 4.2.1 e 4.4.3. Prendiamo $p = (1, 0, \dots, 0) = \varphi(\pi/2, \dots, \pi/2)$, per cui $\partial/\partial\theta^j|_p = -R\partial/\partial x^{j+1}$ per $j = 1, \dots, n$. Indichiamo con π il piano generato da $\partial/\partial\theta^1|_p$ e $\partial/\partial\theta^2|_p$. Allora

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\theta^1} \wedge \frac{\partial}{\partial\theta^2} \right\|_p^2 = R^4 \qquad \text{e} \qquad Q_p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}\right) = R_p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}, \frac{\partial}{\partial\theta^2}, \frac{\partial}{\partial\theta^1}\right) = R_{1221}(p) = g_{r1}R^r_{122}(p).$$

L'Esempio 4.2.1 ci dice che $g_{11}(p) = R^2$ e $g_{r1}(p) = 0$ se $r \neq 1$. Quindi usando i valori dei simboli di Christoffel calcolati nell'Esempio 4.4.3 e la formula (6.1.2) troviamo

$$g_{r1}R^r_{122} = R^2\left[\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial\theta^1} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial\theta^2} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}\right](p) = R^2,$$

e quindi la sfera S^n_R ha curvatura sezionale costante $1/R^2$.

Esempio 6.4.3. Anche sullo spazio iperbolico esiste un gruppo di isometrie che agisce transitivamente sui 2-piani (Esercizio 4.2.1), per cui è a curvatura sezionale costante. Per calcolare il valore della curvatura sezionale possiamo usare come modello B^n_R, prendere come punto p l'origine, e come piano quello generato da $\partial/\partial x^1$ e $\partial/\partial x^2$, per cui di nuovo dobbiamo calcolare $R_{1221}(p)$. Usando i simboli di Christoffel determinati nell'Esempio 4.4.4 otteniamo $R_{1221}(p) = -16/R^2$ e $\|\partial/\partial x^1 \wedge \partial/\partial x^2\|^2_p = 16$, per cui lo spazio iperbolico ha curvatura sezionale costante $-1/R^2$.

Dunque per ogni $k \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$ abbiamo trovato una varietà Riemanniana semplicemente connessa di dimensione n con curvatura sezionale costante uguale a k. Il fatto interessante è che non ce ne sono altre:

Teorema 6.4.5: *Due varietà Riemanniane $\tilde{M}$ e M semplicemente connesse complete della stessa dimensione e con uguale curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$ sono necessariamente isometriche.*

Dimostrazione: Consideriamo prima il caso $k \leq 0$. Scegliamo $p \in M$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$, e sia $I\colon T_{\tilde{p}}\tilde{M} \to T_pM$ un'isometria qualsiasi. Per il Teorema di Cartan-Hadamard la $\varphi = \exp_p \circ I \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}\colon \tilde{M} \to M$ è un diffeomorfismo. Inoltre, siccome la curvatura sezionale è costante ed è uguale per entrambe le varietà, I preserva banalmente il trasporto parallelo della curvatura sezionale. Quindi per la Proposizione 6.4.1 la φ è l'isometria cercata.

Supponiamo ora $k = 1/R^2 > 0$; ci basta dimostrare che M è isometrica a $\tilde{M} = S^n_R$, dove $n = \dim M$. Scegliamo $p_0 \in S^n_R$, $q_0 \in M$ e un'isometria lineare qualsiasi $I\colon T_{p_0}S^n_R \to T_{q_0}M$. Allora (Esempio 5.4.2) $\operatorname{inj\,rad}(p_0) = \pi R$, e $\exp_{p_0}^{-1}$ è definito su $S^n_R \setminus \{-p_0\}$, per cui otteniamo un'applicazione $\varphi = \exp_{q_0} \circ I \circ \exp_{p_0}^{-1}$ da $S^n_R \setminus \{-p_0\}$ in M. Siccome di nuovo I preserva banalmente il trasporto parallelo della curvatura sezionale, la Proposizione 6.4.1 ci dice che φ è un'isometria locale.

Ora prendiamo $p \in S^n_R \setminus \{p_0, -p_0\}$ e definiamo $\psi\colon S^n_R \setminus \{-p\} \to M$ ponendo $\psi = \exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p \circ \exp_p^{-1}$. Come prima, ψ è un'isometria locale; inoltre $\varphi(p) = \psi(p)$ e $d\varphi_p = d\psi_p$ per definizione. Quindi il Teorema 6.4.2 ci assicura che $\varphi \equiv \psi$ su $S^n_R \setminus \{-p_0, -p\}$. In altre parole, possiamo estendere φ a una isometria locale $\varphi\colon S^n_R \to M$. Ma S^n_R è completa (in quanto compatta); il Lemma 6.3.1 ci assicura allora che φ è un rivestimento. Ma M è semplicemente connessa, per cui φ è un'isometria, come voluto. □

Concludiamo questo paragrafo calcolando i campi di Jacobi e la metrica in coordinate normali per spazi a curvatura sezionale costante.

Lemma 6.4.6: *Sia M una varietà Riemanniana a curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$, e $\sigma\colon [0,r] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Allora i campi di Jacobi propri lungo σ che si annullano in 0 sono tutti e soli i campi della forma $J(t) = u(t)E(t)$, dove $E \in \mathcal{T}(\sigma)$ è un campo parallelo ortogonale a $\dot\sigma$, e $u\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ è la funzione*

$$u(t) = \begin{cases} t & \text{se } k = 0; \\ R \sin \dfrac{t}{R} & \text{se } k = \dfrac{1}{R^2} > 0; \\ R \sinh \dfrac{t}{R} & \text{se } k = -\dfrac{1}{R^2} < 0. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

Dimostrazione: Siccome M ha curvatura sezionale costante, il tensore di curvatura è dato da (6.1.3). Quindi un campo di Jacobi proprio J deve soddisfare

$$O = D^2 J + k\big[\|\dot\sigma\|_\sigma^2 J - \langle J, \dot\sigma\rangle_\sigma \dot\sigma\big] = D^2 J + kJ.$$

Sia allora $w \in T_{\sigma(0)}M$ un vettore ortogonale a $\dot\sigma(0)$, ed $E(t)$ l'estensione parallela di w lungo σ. Allora si vede subito che il campo $J(t) = u(t)E(t)$ con u data da (6.4.2) è effettivamente un campo di Jacobi proprio con $J(0) = O$ e $D_0 J = w$; siccome i campi di Jacobi propri che si annullano in 0 sono completamente determinati dalla loro derivata covariante in 0, li abbiamo trovati tutti. □

Proposizione 6.4.7: *Sia (M, g) una varietà Riemanniana con curvatura sezionale costante $k \in \mathbb{R}$. Dato $p \in M$, sia $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base ortonormale di T_pM, e indichiamo con $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ le corrispondenti coordinate normali centrate in p definite in una palla geodetica U. Infine, indichiamo con $\|\cdot\|_0$ la norma euclidea in queste coordinate (nel senso che se $v = v^i\partial_i$ allora $\|v\|_0 = \sqrt{(v^1)^2 + \cdots + (v^n)^2}$). Se $q = \exp_p(v_0) \in U \setminus \{p\}$ e $v \in T_qM$, scriviamo $v = a\,\partial/\partial r|_q + v^\perp$, dove $v^\perp \in T_qM$ è perpendicolare a $\partial/\partial r|_q$. Allora*

$$g_q(v,v) = \begin{cases} |a|^2 + \|v^\perp\|_0^2 & \text{se } k = 0; \\ |a|^2 + \dfrac{R^2}{r^2}\left(\sin^2 \dfrac{r}{R}\right)\|v^\perp\|_0^2 & \text{se } k = \dfrac{1}{R^2} > 0; \\ |a|^2 + \dfrac{R^2}{r^2}\left(\sinh^2 \dfrac{r}{R}\right)\|v^\perp\|_0^2 & \text{se } k = -\dfrac{1}{R^2} < 0, \end{cases}$$

dove $r = \|v_0\|_p = d(p,q)$.

Dimostrazione: Trattandosi di una decomposizione ortogonale, ed essendo il campo radiale $\partial/\partial r$ un campo di versori, dobbiamo solo calcolare $\|v^\perp\|_q^2$.

Indichiamo con $\sigma\colon [0,r] \to M$ la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, in modo che si abbia $q = \sigma(r)$. Scegliamo $w \in T_pM$ tale che $v^\perp = d(\exp_p)_{v_0}(rw)$, e consideriamo la solita variazione geodetica di σ data da

$$\Sigma(s,t) = \exp_p\left(t\left(\frac{v_0}{r} + sw\right)\right).$$

Il campo di Jacobi di Σ è dato da

$$J(t) = t\, d(\exp_p)_{tv_0/r}(w),$$

per cui $J(0) = O$, $D_0 J = w$ e $J(r) = v^\perp$. D'altra parte, il Lemma precedente ci dice che possiamo scrivere J nella forma $J(t) = u(t)E(t)$, dove u è data da (6.4.2) ed E è parallelo lungo σ. In particolare, essendo $\dot u(0) = 1$, abbiamo $w = D_0 J = E(0)$ e quindi

$$\|v^\perp\|_q^2 = \|J(r)\|_q^2 = |u(r)|^2 \|E(r)\|_q^2 = |u(r)|^2 \|E(0)\|_p^2 = |u(r)|^2 \|w\|_p^2.$$

Quindi ci rimane da calcolare la norma di w. Ora, per definizione le coordinate normali sono date da $\varphi^{-1}(x) = \exp_p(x^i E_i)$, e quindi

$$\partial_i|_q = d(\varphi^{-1})_{\varphi(q)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = d(\exp_p)_{v_0}(E_i).$$

In particolare, se scriviamo $v^\perp = v^i \partial_i|_q$ otteniamo $rw = v^i E_i$, per cui

$$\|w\|_p^2 = \frac{1}{r^2}\|v^\perp\|_0^2.$$

Mettendo tutto insieme otteniamo la tesi. □

Esercizio 6.4.2. Sia M una varietà Riemanniana di curvatura sezionale costante, e sia $J \in \mathcal{J}_0(\sigma)$ un campo di Jacobi proprio lungo una geodetica $\sigma: [a,b] \to M$. Dimostra che se $J(t_0) = O$ per qualche $t_0 \in [a,b]$ allora J è *quasi parallelo*, nel senso che esiste un campo di versori $W \in \mathcal{T}(\sigma)$ parallelo e una funzione $f \in C^\infty([a,b])$ tali che $J = fW$.

6.5 La seconda variazione della lunghezza d'arco

Abbiamo visto che le geodetiche di una varietà Riemanniana sono i punti critici del funzionale lunghezza. Dall'Analisi arriva allora il suggerimento che per avere ulteriori informazioni sulle geodetiche potrebbe essere utile studiare il comportamento della derivata seconda del funzionale lunghezza.

Teorema 6.5.1: (Seconda variazione della lunghezza d'arco) *Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M, e $\Sigma: (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ una sua variazione, con campo variazione $V \in \mathcal{T}(\sigma)$. Definiamo $L: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ ponendo $L(s) = L(\sigma_s)$. Allora*

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \langle \nabla_V S, \dot\sigma\rangle_\sigma \Big|_a^b + \int_a^b \left[\|DV\|_\sigma^2 - \langle R_{V\dot\sigma}\dot\sigma, V\rangle_\sigma - \left(\frac{d}{dt}\langle V, \dot\sigma\rangle_\sigma\right)^2 \right] dt. \tag{6.5.1}$$

In particolare, ponendo $V^\perp = V - \langle V, \dot\sigma\rangle_\sigma \dot\sigma$ otteniamo

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \langle \nabla_V S, \dot\sigma\rangle_\sigma \Big|_a^b + \int_a^b \left[\|DV^\perp\|_\sigma^2 - \langle R_{V^\perp\dot\sigma}\dot\sigma, V^\perp\rangle_\sigma \right] dt. \tag{6.5.2}$$

Dimostrazione: Nel corso della dimostrazione del Teorema 5.2.5 abbiamo visto che

$$\frac{dL}{ds}(s) = \int_a^b \frac{1}{\|T\|}\langle D_s T, T\rangle\, dt,$$

dove D_s denote la derivata covariante lungo le curve trasverse (e D_t denoterà la derivata covariante lungo le curve principali). Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{d^2L}{ds^2}(s) &= \int_a^b \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\|T\|}\langle D_s T, T\rangle\right) dt = \int_a^b \left[-\frac{1}{\|T\|^3}\langle D_s T, T\rangle^2 + \frac{1}{\|T\|}\left(\|D_s T\|^2 + \langle D_s D_s T, T\rangle\right)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[-\frac{1}{\|T\|^3}\langle D_t S, T\rangle^2 + \frac{1}{\|T\|}\left(\|D_t S\|^2 + \langle D_s D_t S, T\rangle\right)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[-\frac{1}{\|T\|^3}\left(\frac{d}{dt}\langle S, T\rangle - \langle S, D_t T\rangle\right)^2 + \frac{1}{\|T\|}\left(\|D_t S\|^2 + \frac{d}{dt}\langle D_s S, T\rangle - \langle D_s S, D_t T\rangle - \langle R_{ST}T, S\rangle\right)\right] dt,
\end{aligned}$$

dove come al solito abbiamo usato i Lemmi 6.2.1 e 5.2.4 e le simmetrie del tensore di curvatura. Ma σ è una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco; quindi ponendo $s = 0$ otteniamo (6.5.1).

Infine, si verifica subito che $\langle V^\perp, \dot\sigma\rangle \equiv 0$. Quindi $\langle DV^\perp, \dot\sigma\rangle \equiv 0$,

$$DV = DV^\perp - \left(\frac{d}{dt}\langle V, \dot\sigma\rangle\right)\dot\sigma,$$

e le simmetrie del tensore di curvatura ci permettono di dedurre (6.5.2) da (6.5.1). □

La formula (6.5.2) suggerisce la seguente

Definizione 6.5.1: Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Indichiamo con $\mathcal{N}_0(\sigma) \subset \mathcal{T}(\sigma)$ lo spazio dei campi vettoriali regolari a tratti continui propri (cioè che si annullano in a e b) e normali (cioè ortogonali a $\dot\sigma$) lungo σ. La *forma di Morse* lungo σ è la forma bilineare simmetrica $I: \mathcal{N}_0(\sigma) \times \mathcal{N}_0(\sigma) \to \mathbb{R}$ definita da

$$I(V, W) = \int_a^b \left[\langle DV, DW\rangle_\sigma - \langle R_{V\dot\sigma}\dot\sigma, W\rangle_\sigma\right] dt$$

per ogni V, $W \in \mathcal{N}_0(\sigma)$.

Dunque mettendo insieme il Teorema 6.5.1 e il Lemma 5.2.3 otteniamo il

Corollario 6.5.2: *Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Se Σ è una variazione propria di σ con campo di variazione proprio normale $V \in \mathcal{N}_0(\sigma)$, allora la derivata seconda di $L(s) = L(\sigma_s)$ in 0 è esattamente $I(V,V)$. In particolare, se σ è minimizzante allora $I(V,V) \geq 0$ per ogni $V \in \mathcal{N}_0(\sigma)$.*

La forma di Morse ha anche un'altra espressione che chiarisce il collegamento con i campi di Jacobi:

Lemma 6.5.3: *Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Allora per ogni V, $W \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ si ha*

$$I(V,W) = -\int_a^b \langle D^2V + R_{V\dot\sigma}\dot\sigma, W\rangle_\sigma \, dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \Delta_i DV, W(t_i)\rangle_{\sigma(t_i)},$$

dove $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ è una partizione di $[a,b]$ tale che $V|_{[t_{i-1},t_i]}$ sia di classe C^∞ per $i = 1, \ldots, k$, e

$$\Delta_i DV = \lim_{t \to t_i^+} D_t V - \lim_{t \to t_i^-} D_t V$$

è il salto di $D_t V$ in t_i, per $i = 1, \ldots, k-1$.

Dimostrazione: Sia $a = s_0 < \cdots < s_r = b$ una partizione di $[a,b]$ tale che sia V che W siano di classe C^∞ su ciascun intervallo $[s_{j-1}, s_j]$. In questi intervalli si ha

$$\frac{d}{dt}\langle DV, W\rangle_\sigma = \langle D^2V, W\rangle_\sigma + \langle DV, DW\rangle_\sigma,$$

per cui

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} \langle DV, DW\rangle_\sigma \, dt = -\int_{s_{j-1}}^{s_j} \langle D^2V, W\rangle_\sigma \, dt + \langle DV, W\rangle_\sigma \Big|_{s_{j-1}}^{s_j}.$$

Siccome W è continuo e $W(a) = W(b) = 0$, sommando su tutti gli intervalli otteniamo la tesi. □

Usando la forma di Morse possiamo descrivere un importante collegamento fra punti coniugati e proprietà di minimizzazione delle geodetiche:

Proposizione 6.5.4: *Sia $\sigma: [a,b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M. Supponiamo che esista $t_0 \in (a,b)$ tale che $\sigma(t_0)$ sia coniugato a $p = \sigma(a)$ lungo σ. Allora esiste $X \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ tale che $I(X,X) < 0$. In particolare, una geodetica σ non è mai minimizzante oltre il primo punto coniugato.*

Dimostrazione: L'ipotesi è che esista un campo di Jacobi non banale $J \in \mathcal{J}_0(\sigma|_{[a,t_0]})$ che si annulla in a e in t_0. Sia allora $V \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ dato da

$$V(t) = \begin{cases} J(t) & \text{se } t \in [a, t_0], \\ O & \text{se } t \in [t_0, b]. \end{cases}$$

L'unica discontinuità di DV è per $t = t_0$, dove il salto è $\Delta DV = -D_{t_0}J$. Notiamo che $D_{t_0}J \neq O$, perché altrimenti J sarebbe un campo di Jacobi con $J(t_0) = D_{t_0}J = O$, e quindi sarebbe identicamente nullo.

Scegliamo $W \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ di classe C^∞ tale che $W(t_0) = -D_{t_0}J$, e per $\varepsilon > 0$ poniamo $X_\varepsilon = V + \varepsilon W$. Allora $X_\varepsilon \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ e

$$I(X_\varepsilon, X_\varepsilon) = I(V,V) + 2\varepsilon I(V,W) + \varepsilon^2 I(W,W).$$

Siccome V è un campo di Jacobi sia su $[a,t_0]$ che su $[t_0,b]$ e $V(t_0) = O$, il Lemma 6.5.3 ci dice che

$$I(V,V) = -\langle \Delta DV, V(t_0)\rangle_{\sigma(t_0)} = 0, \qquad I(V,W) = -\langle \Delta DV, W(t_0)\rangle_{\sigma(t_0)} = -\|W(t_0)\|^2_{\sigma(t_0)}.$$

Quindi

$$I(X_\varepsilon, X_\varepsilon) = -2\varepsilon \|W(t_0)\|^2_{\sigma(t_0)} + \varepsilon^2 I(W,W),$$

e per ε abbastanza piccolo otteniamo $I(X_\varepsilon, X_\varepsilon) < 0$. □

Definizione 6.5.2: Sia M una varietà Riemanniana completa, $p \in M$, $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria, e $\sigma_v\colon [0,+\infty) \to M$ la geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$. Sia

$$t_0(v) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid d\bigl(p, \sigma_v(t)\bigr) = t\}.$$

Se $t_0(v) < +\infty$, diremo che $\sigma_v(t_0)$ è un *punto di taglio* di σ_v rispetto a p. Il *luogo di taglio* di M rispetto a p è l'insieme

$$C(p) = \{\sigma_v(t_0) \mid v \in T_pM, \|v\|_p = 1, \sigma_v(t_0) \text{ punto di taglio di } \sigma_v \text{ rispetto a } p\}.$$

Esercizio 6.5.1. Sia M una varietà Riemanniana completa, $p \in M$, $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria, e $\sigma_v\colon [0,+\infty) \to M$ la geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$.

(i) Dimostra che $\sigma_v(t_0)$ è un punto di taglio per p se e solo se una delle due condizioni seguenti si verifica per $t = t_0$ e nessuna delle due si verifica per valori di t minori di t_0:
  (a) $\sigma_v(t)$ è coniugato a p lungo σ_v;
  (b) esiste una geodetica $\tau \neq \sigma_v$ da p a $\sigma_v(t)$ tale che $L(\tau) = L(\sigma_v)$.

(ii) Sia $\mathcal{C} = \{v \in TM \mid \|v\| = 1, t_0(v) < +\infty\}$, e definiamo $\rho\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ ponendo $\rho(v) = d\bigl(\pi(v), \sigma_v\bigl(t_0(v)\bigr)\bigr)$, dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica e d è la distanza Riemanniana. Dimostra che ρ è una funzione continua, e deduci che $C(p)$ è un insieme chiuso.

(iii) Dimostra che $\operatorname{inj\,rad}(p) = d\bigl(p, C(p)\bigr)$.

(iv) Sia $q \in C(p)$ tale che $d(p,q) = d\bigl(p, C(p)\bigr)$. Dimostra che o esiste una geodetica minimizzante σ da p a q tale che q sia coniugato a p lungo σ, oppure esistono esattamente due geodetiche minimizzanti σ e τ parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco da p a q tali che $\dot\sigma\bigl(d(p,q)\bigr) = -\dot\tau\bigl(d(p,q)\bigr)$.

6.6 I teoremi di Bonnet-Myers e Synge-Weinstein

Vediamo che conseguenze possiamo trarre da quanto fatto finora per varietà con curvatura sezionale positiva.

Teorema 6.6.1: (Bonnet, Myers) *Sia M una varietà Riemanniana completa di dimensione $n \geq 2$. Supponiamo che esista $r > 0$ tale che la curvatura di Ricci di M soddisfi*

$$\operatorname{Ric}(v) \geq \frac{n-1}{r^2} > 0$$

per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria. Allora

(i) *M è compatto e di diametro minore o uguale a πr;*
(ii) *il rivestimento universale di M è compatto, e il gruppo fondamentale di M è finito.*

Dimostrazione: (i) Siano p e q due punti di M. Siccome M è completa, esiste una geodetica minimizzante $\sigma\colon [0,\ell] \to M$ da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco; ci basta dimostrare che $L(\sigma) \leq \pi r$. Infatti in tal caso $d(p,q) \leq \pi r$, per cui il diametro di M è minore o uguale a πr e dunque M, essendo limitata e completa, è anche compatta, per il teorema di Hopf-Rinow.

Supponiamo allora, per assurdo, che $L(\sigma) = \ell > \pi r$. Scegliamo una famiglia $\{E_1, \ldots, E_{n-1}\} \subset \mathcal{T}(\sigma)$ di campi paralleli tali che $\{E_1(t), \ldots, E_{n-1}(t), \dot\sigma(t)\}$ sia una base ortonormale di $T_{\sigma(t)}M$ per ogni $t \in [0,\ell]$. Poniamo poi

$$V_j(t) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) E_j(t)$$

per $j = 1, \ldots, n-1$. Il Lemma 6.4.6 ci dice che se M fosse una varietà con curvatura sezionale costante $(\pi/\ell)^2 < 1/r^2$ allora i V_j sarebbero campi di Jacobi; vediamo invece di che proprietà godono su M.

Chiaramente $V_j(0) = V_j(\ell) = O$, per cui $V_j \in \mathcal{N}_0(\sigma)$ per $j = 1, \ldots, n-1$. Inoltre

$$I(V_j, V_j) = -\int_0^\ell \langle D^2 V_j + R_{V_j\dot\sigma}\dot\sigma, V_j\rangle_\sigma \, dt = \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right)\left[\frac{\pi^2}{\ell^2} - Q_\sigma(E_j, \dot\sigma)\right] dt.$$

Sommando su j e ricordando che $Q_\sigma(\dot\sigma,\dot\sigma)\equiv 0$ otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n-1} I(V_j,V_j)=\int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right)\left[(n-1)\frac{\pi^2}{\ell^2}-\mathrm{Ric}(\dot\sigma)\right]dt.$$

Ma l'ipotesi ci dice che

$$(n-1)\frac{\pi^2}{\ell^2}-\mathrm{Ric}(\dot\sigma)\le (n-1)\left[\frac{\pi^2}{\ell^2}-\frac{1}{r^2}\right]<0;$$

quindi

$$\sum_{j=1}^{n-1} I(V_j,V_j)<0.$$

Dunque deve esistere almeno un j_0 tale che $I(V_{j_0},V_{j_0})<0$, per cui il Corollario 6.5.2 implica che σ non è minimizzante, contraddizione.

(ii) Sia $\pi\colon\tilde M\to M$ il rivestimento universale di M. Se g è la metrica Riemanniana su M, possiamo mettere su $\tilde M$ la metrica Riemanniana π^*g, in modo che il rivestimento π diventi un'isometria locale. In particolare, per ogni $p\in\tilde M$ e $v\in T_pM$ il sollevamento $\tilde\sigma$ uscente da p della geodetica σ in M uscente da $\pi(p)$ tangente a $d\pi_p(v)$ è una geodetica in $\tilde M$. Essendo M completa, σ è definita su tutto $\mathbb{R}$; quindi anche $\tilde\sigma$ lo è, e il teorema di Hopf-Rinow ci assicura che anche $(\tilde M,\pi^*g)$ è completa.

Siccome la curvatura si calcola localmente, anche la curvatura di Ricci di $\tilde M$ è limitata inferiormente da $(n-1)/r^2$. La parte (i) ci assicura allora che anche $\tilde M$ è compatta; in particolare, il numero dei fogli del rivestimento è finito — e da questo segue subito che il gruppo fondamentale di M è finito. □

Corollario 6.6.2: *Sia M una varietà Riemanniana completa con curvatura sezionale $K\ge 1/r^2>0$. Allora M è compatta, con diametro minore o uguale a πr, e $\pi_1(M)$ è finito.*

Dimostrazione: Infatti $K\ge 1/r^2$ implica $\mathrm{Ric}\ge (n-1)/r^2$, dove $n=\dim M$. □

Osservazione 6.6.1. L'ipotesi $K>0$ non basta: infatti il paraboloide $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=x^2+y^2\}$ ha curvatura sezionale positiva ma non è compatto.

Osservazione 6.6.2. La stima sul diametro è la migliore possibile: la sfera S^n ha diametro π e curvatura sezionale costante uguale a 1 (e quindi curvatura di Ricci costante uguale a $n-1$).

Il Teorema di Bonnet-Myers è solo il primo di una serie di teoremi profondi sulla topologia di varietà con curvatura sezionale positiva, di cui il più famoso è probabilmente il

Teorema 6.6.3: (della sfera di Berger e Klingenberg) *Sia M una varietà Riemanniana completa, semplicemente connessa di dimensione n. Supponiamo che esista $R>0$ tale che*

$$\frac{1}{4R^2}<K(\pi)\le\frac{1}{R^2}$$

per ogni 2-piano $\pi\subset TM$. Allora M è omeomorfa a S^n.

Concludiamo invece il capitolo con un risultato sulle varietà orientate, che ha come conseguenza il fatto che in certe situazioni curvatura sezionale positiva implica la semplice connessione.

Per dimostrarlo ci serviranno un lemma di algebra lineare e un'osservazione.

Lemma 6.6.4: *Sia $A\in O(n-1)$ tale che $\det A=(-1)^n$. Allora 1 è autovalore di A, cioè esiste $v\in\mathbb{R}^{n-1}$ non nullo tale che $Av=v$.*

Dimostrazione: Essendo A ortogonale, gli autovalori reali di A sono ±1, e quelli complessi sono in coppie complesse coniugate di modulo 1. Quindi $\det A=1$ se -1 è autovalore di A con molteplicità pari, e $\det A=-1$ se -1 è autovalore di A con molteplicità dispari.

Se n è pari, $\det A=1$, per cui -1 ha molteplicità pari; gli autovalori complessi coniugati sono anch'essi in numero pari, ma $n-1$, che è il numero di autovalori di A, è dispari, per cui 1 deve essere autovalore di A. Analogamente, se n è dispari -1 ha molteplicità dispari, ma $n-1$ è pari, per cui di nuovo 1 dev'essere autovalore. □

Osservazione 6.6.3. Sia M una varietà Riemanniana orientata da una forma di volume $\nu \in A^n(M)$. Allora il trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva conserva l'orientazione, nel senso che manda basi positive in basi positive. Infatti, se $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ è il trasporto parallelo di una base positiva $\{E_1, \ldots, E_n\}$ lungo una curva $\sigma\colon [a,b] \to M$, allora la funzione $t \mapsto \nu_{\sigma(t)}\big(E_1(t), \ldots, E_n(t)\big)$ è una funzione di classe C^∞, mai nulla e positiva per $t = a$, e quindi positiva per ogni valore di $t \in [a,b]$.

Teorema 6.6.5: (Weinstein) *Sia $F\colon M \to M$ un'isometria di una varietà Riemanniana compatta orientata M di dimensione n con curvatura sezionale positiva. Supponiamo inoltre che F conservi l'orientazione se n è pari, e che la inverta se n è dispari. Allora F ha un punto fisso.*

Dimostrazione: Supponiamo, per assurdo, che $F(q) \neq q$ per ogni $q \in M$. Essendo M compatta, la funzione $q \mapsto d\big(q, F(q)\big)$ assume minimo in un punto $p \in M$, e il minimo è strettamente positivo. Inoltre, essendo M completa, esiste una geodetica minimizzante $\sigma\colon [0,\ell] \to M$ da p a $F(p)$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Cominciamo col dimostrare che

$$dF_p\big(\dot\sigma(0)\big) = \dot\sigma(\ell). \tag{6.6.1}$$

Infatti, essendo F un'isometria e σ una geodetica minimizzante da p a $F(p)$, la scelta di p implica che per ogni $t \in (0,\ell)$ si ha

$$\begin{aligned} d\big(p, F(p)\big) &\le d\big(\sigma(t), F\big(\sigma(t)\big)\big) \le d\big(\sigma(t), F(p)\big) + d\big(F(p), F\big(\sigma(t)\big)\big) = d\big(\sigma(t), F(p)\big) + d\big(p, \sigma(t)\big) \\ &= d\big(p, F(p)\big). \end{aligned}$$

In particolare,

$$d\big(\sigma(t), F\big(\sigma(t)\big)\big) = d\big(\sigma(t), F(p)\big) + d\big(F(p), F\big(\sigma(t)\big)\big).$$

Siccome σ e $F \circ \sigma$ sono geodetiche minimizzanti, questo implica che la curva ottenuta unendo σ e $F \circ \sigma$ è ancora minimizzante, e quindi una geodetica. In particolare è liscia, per cui $\dot\sigma(\ell) = (F \circ \sigma)'(0) = dF_p\big(\dot\sigma(0)\big)$, come voluto.

Poniamo $\tilde A = \tilde\sigma_\ell^{-1} \circ dF_p\colon T_pM \to T_pM$, dove $\tilde\sigma_\ell$ è il trasporto parallelo da p a $F(p)$ lungo σ; chiaramente, $\tilde A$ è un'isometria. Inoltre, ricordando l'Osservazione 6.6.3 vediamo che $\tilde A$ manda basi positive in basi positive se n è pari, e basi positive in basi negative se n è dispari; in particolare,

$$\det \tilde A = (-1)^n. \tag{6.6.2}$$

Da (6.6.1) segue subito che

$$\tilde A\big(\dot\sigma(0)\big) = (\tilde\sigma_\ell^{-1} \circ dF_p)\big(\dot\sigma(0)\big) = \tilde\sigma_\ell^{-1}\big(\dot\sigma(\ell)\big) = \dot\sigma(0).$$

Dunque $\tilde A$ manda il sottospazio $W = \dot\sigma(0)^\perp \subset T_pM$ ortogonale a $\dot\sigma(0)$ in se stesso; indichiamo con $A\colon W \to W$ la restrizione di $\tilde A$ a W. L'applicazione lineare A è un'isometria con determinante uguale a quello di $\tilde A$; quindi per il Lemma 6.6.4 possiamo allora trovare un campo parallelo $E_1 \in \mathcal{T}(\sigma)$ ortogonale a $\dot\sigma$ di lunghezza unitaria e tale che $AE_1(0) = E_1(0)$.

Sia $\tau\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ una geodetica con $\tau(0) = p$ e $\dot\tau(0) = E_1(0)$. Siccome $AE_1(0) = E_1(0)$ otteniamo $dF_p\big(E_1(0)\big) = E_1(\ell)$, per cui la geodetica $F \circ \tau$ è tale che $F \circ \tau(0) = F(p)$ e $(F \circ \tau)'(0) = E_1(\ell)$.

Sia $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,\ell] \to M$ la variazione di σ data da

$$\Sigma(s,t) = \exp_{\sigma(t)}\big(sE_1(t)\big).$$

Allora $\Sigma(s,0) = \tau(s)$ e

$$\Sigma(s,\ell) = \exp_{F(p)}\big(sE_1(\ell)\big) = F \circ \tau(s).$$

In particolare, $S(s,0) = \dot\tau(s)$ e $S(s,\ell) = (F \circ \tau)'(s)$.

Il campo variazione V di Σ è chiaramente E_1, per cui $DV \equiv O$. Ma allora (6.5.2) ci dà

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \langle \nabla_{E_1} S, \dot\sigma \rangle_\sigma \Big|_0^\ell - \int_0^\ell Q_\sigma(E_1, \dot\sigma)\, dt = -\int_0^\ell Q_\sigma(E_1, \dot\sigma)\, dt,$$

in quanto le curve trasverse σ^0 e σ^ℓ sono geodetiche tangenti a $E_1(0)$ e $E_1(\ell)$ rispettivamente, per cui $\nabla_{E_1(t)}S = O$ per $t = 0$ e $t = \ell$. Ma la curvatura sezionale di M è strettamente positiva; quindi

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) < 0. \tag{6.6.3}$$

Se tutte le curve principali della variazione avessero lunghezza maggiore o uguale a σ, la funzione $L(s)$ assumerebbe minimo assoluto in $s = 0$, contro la (6.6.3); quindi deve esistere un s_0 tale che $L(\sigma_{s_0}) < L(\sigma)$. Ma σ_{s_0} è una curva da $\tau(s_0)$ a $F\bigl(\tau(s_0)\bigr)$; quindi dovremmo avere

$$d\bigl(\tau(s_0), F\bigl(\tau(s_0)\bigr)\bigr) \le L(\sigma_{s_0}) < L(\sigma) = d\bigl(p, F(p)\bigr),$$

contro la scelta di p. Abbiamo trovato una contraddizione, e la dimostrazione è conclusa. □

Questo risultato ha come consequenza relazioni inaspettate fra orientabilità e topologia delle varietà compatte con curvatura sezionale positiva:

Corollario 6.6.6: (Synge) *Sia M una varietà compatta di dimensione n con curvatura sezionale positiva. Allora:*

(i) *Se n è pari e M è orientabile allora M è semplicemente connessa.*
(ii) *Se n è pari e M non è orientabile allora $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.*
(ii) *Se n è dispari allora M è orientabile.*

Dimostrazione: (i) Sia $\pi\colon \tilde{M} \to M$ il rivestimento universale di M. Se g è la metrica Riemanniana di M, mettiamo su $\tilde{M}$ la metrica $\tilde{g} = \pi^* g$, e orientiamo $\tilde{M}$ in modo che π conservi l'orientazione. Siccome M è compatta con curvatura sezionale positiva, deve esistere $\delta > 0$ tale che $K \ge \delta$. Quindi possiamo applicare il Teorema 6.6.1, e anche $\tilde{M}$ è compatta, con curvatura sezionale positiva in quanto π è un'isometria locale.

Sia $F\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ un automorfismo del rivestimento, cioè $\pi \circ F = \pi$. Allora F è un'isometria di $\tilde{M}$ che conserva l'orientazione (in quanto π la conserva), per cui il Teorema 6.6.5 implica che F ha un punto fisso. Ma l'unico automorfismo di un rivestimento che può avere punti fissi è l'identità, per cui $F = \mathrm{id}_{\tilde{M}}$. Quindi il gruppo di automorfismi di π si riduce all'identità, e questo equivale a dire che π è un diffeomorfismo, cioè che M è semplicemente connessa.

(ii) Se M non è orientabile, sia $\pi\colon \tilde{M} \to M$ il rivestimento a 2 fogli dato dalla Proposizione 3.6.2. Mettendo su $\tilde{M}$ la metrica indotta dalla metrica di M possiamo applicare a $\tilde{M}$ il punto (i); quindi $\tilde{M}$ è semplicemente connessa, per cui è il rivestimento universale di M e $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.

(iii) Supponiamo per assurdo M non orientabile, e sia di nuovo $\pi\colon \tilde{M} \to M$ il rivestimento a 2 fogli dato dalla Proposizione 3.6.2. Mettiamo di nuovo su $\tilde{M}$ la metrica indotta, e sia $F\colon \tilde{M} \to M$ un automorfismo del rivestimento diverso dall'identità. Ma $\tilde{M}$ è compatta con curvatura sezionale positiva; siccome F inverte l'orientazione di $\tilde{M}$ e n è dispari, possiamo applicare il Teorema 6.6.5 e ottenere un punto fisso per F, contraddizione. Quindi M è orientabile. □

Concludiamo con un esempio che mostra come le differenze fra le dimensioni pari e le dimensioni dispari siano inevitabili, e alcuni esercizi finali:

Esempio 6.6.1. Sia $\pi\colon S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il rivestimento universale dello spazio proiettivo. Siccome la mappa antipodale $A(p) = -p$ è un'isometria di S^n, ed è l'unico automorfismo non banale del rivestimento π, otteniamo una metrica Riemanniana su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ rispetto a cui π diventa un'isometria locale. In particolare, quindi, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto con curvatura sezionale positiva e gruppo fondamentale $\pi_1\bigl(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\bigr) = \mathbb{Z}_2$. Inoltre,è orientabile se e solo se n è dispari (Esercizio 3.5.3). Quindi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un esempio di varietà compatta, non orientabile, di dimensione pari con curvatura sezionale costante positiva, mentre $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è un esempio di varietà compatta, orientabile, non semplicemente connessa, con curvatura sezionale positiva e di dimensione dispari.

Esercizio 6.6.1. Scegliamo un punto p_0 in una varietà Riemanniana compatta M, e sia $r\colon M \to \mathbb{R}^+$ data da $r(q) = d(p_0, q)$ per ogni $q \in M$, dove d è la distanza Riemanniana. Dimostra che r non è mai di classe C^1 su $M \setminus \{p_0\}$.

Esercizio 6.6.2. Dimostra la seguente generalizzazione del Teorema di Bonnet-Myers: sia M una varietà Riemanniana completa. Supponiamo che esistano $a > 0$ e $c \geq 0$ tali che per ogni coppia di punti di M e ogni geodetica minimizzante σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco che unisce questi due punti si abbia

$$\operatorname{Ric}\bigl(\dot{\sigma}(s)\bigr) \geq a + \frac{df}{ds}$$

lungo σ, per una qualche funzione f tale che $|f(s)| \leq c$ lungo σ. Dimostra che M è compatto, e trova una stima sul diametro.