Capitolo 5

Geodetiche

5.1 La mappa esponenziale

Il concetto chiave che ci permetterà di penetrare nella struttura geometrica delle varietà Riemanniane è quello di geodetica.

Definizione 5.1.1: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Una *geodetica* per ∇ è una curva $\sigma\colon I \to M$ tale che $D\dot\sigma \equiv 0$. In altre parole σ è una geodetica se e solo se il vettore tangente $\dot\sigma$ è parallelo lungo σ.

Osservazione 5.1.1. Il simbolo $\dot\sigma$ verrà usato per indicare il vettore tangente a σ anche quando σ non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. In altre parole, σ' e $\dot\sigma$ sono la stessa cosa.

Se (U, φ) è una carta locale e scriviamo $\sigma^j = \varphi^j \circ \sigma$, da (4.3.3) vediamo che la curva σ è una geodetica se e solo se soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot\sigma^k + (\Gamma^k_{ij} \circ \sigma)\, \dot\sigma^i \dot\sigma^j = 0. \tag{5.1.1}$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Possiamo trasformarlo in un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine introducendo delle variabili ausiliarie $v^1, \ldots, v^n$ per rappresentare le componenti di $\dot\sigma$ (vedi più oltre la dimostrazione della Proposizione 5.1.2 per il significato geometrico di questa operazione), in modo da ridurci al sistema equivalente del primo ordine

$$\begin{cases} \dot v^k + (\Gamma^k_{ij} \circ \sigma)\, v^i v^j = 0, \\ \dot\sigma^k = v^k. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

In particolare:

Proposizione 5.1.1: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ esistono un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in I$ e una geodetica $\sigma\colon I \to M$ tale che $\sigma(0) = p$ e $\dot\sigma(0) = v$. Inoltre, se $\tilde\sigma\colon \tilde I \to M$ è un'altra geodetica soddisfacente le stesse condizioni allora σ e $\tilde\sigma$ coincidono in $I \cap \tilde I$.*

Dimostrazione: Il Teorema 3.3.3 applicato a (5.1.2) ci dice che esistono $\varepsilon > 0$ e una curva $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset M$ che sia soluzione di (5.1.1) con condizioni iniziali $\sigma(0) = p$ e $\dot\sigma(0) = v$. Inoltre, se $\tilde\sigma$ è un'altra geodetica che soddisfa le stesse condizioni iniziali allora σ e $\tilde\sigma$ coincidono in un qualche intorno di 0. Sia I_0 il massimo intervallo contenuto in $I \cap \tilde I$ su cui σ e $\tilde\sigma$ coincidono. Se I_0 è strettamente contenuto in $I \cap \tilde I$, esiste un estremo t_0 di I_0 contenuto in $I \cap \tilde I$, e possiamo applicare il solito Teorema 3.3.3 con condizioni iniziali $\sigma(t_0)$ e $\dot\sigma(t_0)$. Ma allora σ e $\tilde\sigma$ coincidono anche in un intorno di t_0, contro la definizione di I_0. Quindi $I_0 = I \cap \tilde I$. □

Definizione 5.1.2: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, $p \in M$ e $v \in T_pM$. Indicheremo con $\sigma_v\colon I \to M$ l'unica geodetica *massimale* (che esiste per la proposizione precedente) tale che $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$.

Vogliamo ora studiare come dipendono le geodetiche dalle condizioni iniziali. Per far ciò, mostriamo come associare alle geodetiche delle traiettorie di un opportuno campo vettoriale definito sul fibrato tangente TM.

Ogni curva liscia $\sigma\colon I \to M$ definisce la curva dei vettori tangenti $\dot\sigma\colon I \to TM$. L'equazione (5.1.1) è in realtà un'affermazione su quest'ultima curva:

Proposizione 5.1.2: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora esiste un unico campo vettoriale $G \in \mathcal{T}(TM)$ le cui traiettorie siano tutte e sole le curve $\dot\sigma\colon I \to TM$ con $\sigma\colon I \to M$ geodetica in M.*

Dimostrazione: Cominciamo col riscrivere (5.1.1) in una forma più utile ai nostri scopi. Come visto nell'Esempio 3.2.2, una carta locale (U,φ) per M determina una carta locale $(TU,\tilde\varphi)$ di TM ponendo

$$\tilde\varphi(v) = (x^1,\dots,x^n;v^1,\dots,v^n) \in \varphi(U)\times\mathbb{R}^n$$

per ogni $p \in U$ e $v \in T_pM$, dove $(x^1,\dots,x^n)=\varphi(p)$ e $v = v^j\partial_j|_p$. Sia $\sigma\colon I \to M$ una curva con sostegno contenuto in U, in modo da poter scrivere $\varphi\circ\sigma = (\sigma^1,\dots,\sigma^n)$. Allora la curva $\dot\sigma$ è rappresentata in queste coordinate locali da $\tilde\varphi\circ\dot\sigma = (\sigma^1,\dots,\sigma^n;\dot\sigma^1,\dots,\dot\sigma^n)$, in quanto $\dot\sigma = \dot\sigma^j\partial_j$.

Sia ora $\gamma\colon I \to TM$ una qualsiasi curva con sostegno contenuto in TU, per cui possiamo scrivere

$$\tilde\varphi\circ\gamma(t) = \bigl(x^1(t),\dots,x^n(t);v^1(t),\dots,v^n(t)\bigr)$$

per opportune funzioni $x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n \in C^\infty(I)$. Allora γ è una curva della forma $\dot\sigma$ per una qualche curva $\sigma\colon I \to U$ se e solo se $v^j \equiv \dot x^j$ per $j=1,\dots,n$; quindi γ è una curva della forma $\dot\sigma$ con σ geodetica se e solo se $\tilde\varphi\circ\gamma$ soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{dx^k}{dt} = v^k, \\ \dfrac{dv^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij}(x)v^iv^j. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Nell'Esempio 3.2.2 abbiamo visto che un riferimento locale per $T(TM)$ sopra TU è ovviamente definito da $\{\partial/\partial x^1,\dots,\partial/\partial x^n;\partial/\partial v^1,\dots,\partial/\partial v^n\}$; la (5.1.3) suggerisce allora di introdurre il campo vettoriale (per il momento definito solo sopra TU e dipendente dalle coordinate locali scelte)

$$G = v^k\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ij}v^iv^j\frac{\partial}{\partial v^k}. \tag{5.1.4}$$

La (5.1.3) dice esattamente che $\gamma\colon I \to TU$ è una traiettoria di G in TU se e solo se $\sigma = \pi\circ\gamma$ è una geodetica per ∇ in U e $\gamma = \dot\sigma$ (dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica).

Quindi per concludere la dimostrazione rimane solo da verificare che G non dipende dalle coordinate scelte, per cui si estende a un campo vettoriale globale su TM. Per far ciò basta far vedere che per ogni $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\mathbf{f} \in C^\infty_{TM}(v)$ il numero $G(v)(\mathbf{f})$ è indipendente dalle coordinate. Basta quindi dimostrare, per esempio, che

$$G(v)(\mathbf{f}) = \frac{d(f\circ\dot\sigma_v)}{dt}(0),$$

dove f è un qualsiasi rappresentante di $\mathbf{f}$. Ma infatti

$$\begin{aligned} \frac{d(f\circ\dot\sigma_v)}{dt}(0) &= \frac{\partial f}{\partial x^k}(v)\dot\sigma_v^k(0) + \frac{\partial f}{\partial v^k}(v)\ddot\sigma_v^k(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^k}(v)v^k - \frac{\partial f}{\partial v^k}(v)\Gamma^k_{ij}(p)v^iv^j = G(v)(\mathbf{f}), \end{aligned}$$

e ci siamo. □

Definizione 5.1.3: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Il campo $G \in \mathcal{T}(TM)$ definito localmente da (5.1.4) è detto *campo geodetico*, e il suo flusso *flusso geodetico.*

La conseguenza principale di questo risultato è che ci permette di applicare il Teorema 3.3.4 allo studio delle geodetiche, e quindi di controllare simultaneamente il comportamento di tutte le geodetiche uscenti da un unico punto. Per enunciare al meglio questo risultato, ci servono un lemma e una definizione.

Lemma 5.1.3: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, $p \in M$, $v \in T_pM$ e $c, t \in \mathbb{R}$. Allora si ha*

$$\sigma_{cv}(t) = \sigma_v(ct) \tag{5.1.5}$$

non appena uno dei due membri è definito.

Dimostrazione: Se $c = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Se $c \neq 0$, cominciamo col dimostrare che (5.1.5) vale non appena $\sigma_v(ct)$ esiste. Poniamo $\tilde{\sigma}(t) = \sigma_v(ct)$; chiaramente $\tilde{\sigma}(0) = p$ e $\dot{\tilde{\sigma}}(0) = cv$, per cui basta dimostrare che $\tilde{\sigma}$ è una geodetica. Ma infatti se indichiamo con $\tilde{D}$ la derivata covariante lungo $\tilde{\sigma}$ abbiamo

$$\tilde{D}_t\dot{\tilde{\sigma}} = \left[\frac{d}{dt}\dot{\tilde{\sigma}}^k(t) + \Gamma^k_{ij}\big(\tilde{\sigma}(t)\big)\dot{\tilde{\sigma}}^i(t)\dot{\tilde{\sigma}}^j(t)\right]\partial_k = \left[c^2\ddot{\sigma}^k_v(ct) + c^2\Gamma^k_{ij}\big(\sigma_v(ct)\big)\dot{\sigma}^i_v(ct)\dot{\sigma}^j_v(ct)\right]\partial_k = c^2D_{ct}\dot{\sigma}_v = O,$$

e ci siamo.

Infine, supponiamo che $\sigma_{cv}(t)$ esista, e poniamo $v' = cv$ e $s = ct$. Allora $\sigma_{cv}(t) = \sigma_{v'}(c^{-1}s)$ esiste, per cui è uguale a $\sigma_{c^{-1}v'}(s) = \sigma_v(ct)$, e ci siamo. □

Definizione 5.1.4: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Il *dominio della mappa esponenziale* è l'insieme

$$\mathcal{E} = \{v \in TM \mid \sigma_v \text{ è definita in un intervallo contenente } [0,1]\} \subset TM.$$

La *mappa esponenziale* $\exp\colon \mathcal{E} \to M$ di ∇ è allora definita da $\exp(v) = \sigma_v(1)$. Inoltre, se $p \in M$ scriveremo $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$ e $\exp_p = \exp|_{\mathcal{E}_p}$.

Il motivo per cui quest'applicazione si chiama "esponenziale" si può far risalire al seguente esercizio (ma vedi anche il Teorema 5.4.7 più oltre):

Esercizio 5.1.1. Consideriamo $\mathbb{R}^+$ con la metrica $\|t\|_h = h^{-1}|t|$ per ogni $h \in \mathbb{R}^+$ e $t \in T_h\mathbb{R}^+$, dove abbiamo identificato $T_h\mathbb{R}^+$ con $\mathbb{R}$ come al solito. Dimostra che $\exp_h\colon T_h\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è data dalla formula $\exp_h(t) = he^t$.

Il Teorema 3.3.4 ci fornisce allora le seguenti proprietà della mappa esponenziale:

Teorema 5.1.4: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora:*

(i) *L'insieme $\mathcal{E}$ è un intorno aperto della sezione nulla di TM, e ciascun $\mathcal{E}_p$ è stellato rispetto all'origine.*
(ii) *Per ogni $v \in TM$ la geodetica massimale σ_v è data da*

$$\sigma_v(t) = \exp(tv)$$

per tutti i $t \in \mathbb{R}$ per cui uno dei due membri è definito.
(iii) *La mappa esponenziale è di classe C^∞.*

Dimostrazione: Il Lemma 5.1.3 applicato con $t = 1$ dice esattamente che $\exp(cv) = \sigma_{cv}(1) = \sigma_v(c)$ non appena uno dei due membri è definito, per cui (ii) è soddisfatta. In particolare, se $0 \le t \le 1$ e $v \in \mathcal{E}$ abbiamo che $\exp(tv) = \sigma_{tv}(1) = \sigma_v(t)$ è definito, per cui ciascun $\mathcal{E}_p$ è stellato rispetto all'origine.

Ora, per la Proposizione 5.1.2 le geodetiche di ∇ sono la proiezione delle traiettorie del campo geodetico G. Indichiamo con $\Gamma\colon \mathcal{U} \to TM$ il flusso del campo geodetico che, grazie al Teorema 3.3.4, è definito in un intorno aperto $\mathcal{U}$ di $\{0\} \times TM$ in $\mathbb{R} \times TM$. In particolare, $v \in \mathcal{E}$ se e solo se $(1, v) \in \mathcal{U}$; ma allora si ha $\mathcal{E} = \pi_2\big(\mathcal{U} \cap (\{1\} \times TM)\big)$, dove $\pi_2\colon \mathbb{R} \times TM \to TM$ è la proiezione sulla seconda coordinata, per cui $\mathcal{E}$ è aperto. Infine, sempre per il Teorema 3.3.4 il flusso di G è di classe C^∞, per cui la mappa esponenziale, essendo data dalla formula $\exp(v) = \pi_2\big(\Gamma(1, v)\big)$, è anch'essa di classe C^∞. □

Essendo la mappa esponenziale differenziabile, possiamo calcolarne il differenziale. In particolare, è interessante considerare $d(\exp_p)_O\colon T_O(T_pM) \to T_pM$; infatti, essendo T_pM uno spazio vettoriale, possiamo identificare canonicamente $T_O(T_pM)$ con T_pM, per cui $d(\exp_p)_O$ risulta essere un endomorfismo di T_pM. Ed è un endomorfismo molto particolare:

Proposizione 5.1.5: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, e $p \in M$. Allora $d(\exp_p)_O = \mathrm{id}$. In particolare, esistono un intorno U di O in T_pM e un intorno V di p in M tali che $\exp_p|_U\colon U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

Dimostrazione: Dato $v \in T_O(T_pM) = T_pM$, una curva in T_pM che parte da O tangente a v è $\gamma(t) = tv$. Allora

$$d(\exp_p)_O(v) = \frac{d}{dt}\exp_p\bigl(\gamma(t)\bigr)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp_p(tv)\Big|_{t=0} = \dot\sigma_v(0) = v.$$

La seconda affermazione segue dal teorema della funzione inversa. □

Definizione 5.1.5: Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, e $p \in M$. Un intorno aperto V di p in M diffeomorfo tramite $\exp_p$ a un intorno stellato U di O in T_pM è detto *intorno normale* di p.

Tutto quanto visto finora chiaramente si applica anche alla connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana. Inoltre, in questo caso possiamo introdurre le definizioni seguenti:

Definizione 5.1.6: Sia ∇ la connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana (M, g), e $p \in M$. Indichiamo con $B_\varepsilon(O_p) \subset T_pM$ la palla aperta rispetto alla metrica g di centro l'origine e raggio $\varepsilon > 0$ in T_pM. Il *raggio d'iniettività* $\operatorname{inj\,rad}(p) \in \mathbb{R}^+$ di M in p è definito da

$$\operatorname{inj\,rad}(p) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exp_p \text{ ristretto a } B_\varepsilon(O_p) \text{ è un diffeomorfismo con l'immagine}\}.$$

La *palla geodetica* $B_\varepsilon(p)$ di centro p e raggio $0 < \varepsilon \le \operatorname{inj\,rad}(p)$ in M è l'intorno normale di p della forma $\exp_p\bigl(B_\varepsilon(O_p)\bigr)$. Il suo bordo $\partial B_\varepsilon(p) = \exp_p\bigl(\partial B_\varepsilon(O_p)\bigr)$ è detto *sfera geodetica*. Le geodetiche in $B_\varepsilon(p)$ uscenti da p sono dette *geodetiche radiali*. Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ è una base ortonormale di T_pM, e $\chi\colon T_pM \to \mathbb{R}^n$ è l'isomorfismo dato dalle coordinate rispetto a questa base, allora le coordinate $\varphi = \chi \circ \exp_p^{-1}\colon B_\varepsilon(p) \to \mathbb{R}^n$ sono dette *coordinate normali* centrate in p.

Il raggio d'iniettività chiaramente dipende dal punto. Non è necessariamente continuo, ma ha estremo inferiore strettamente positivo sui compatti. Per dimostrarlo, introduciamo la seguente

Definizione 5.1.7: Il *raggio d'iniettività* di un sottoinsieme $C \subseteq M$ è il numero

$$\operatorname{inj\,rad}(C) = \inf\{\operatorname{inj\,rad}(q) \mid q \in C\}.$$

Diremo che un aperto $W \subseteq M$ è *uniformemente normale* se ha raggio d'iniettività positivo. In altre parole, esiste $\delta > 0$ tale che $\exp_q$ è un diffeomorfismo in $B_\delta(O_q)$ per ogni $q \in W$.

Allora

Proposizione 5.1.6: *Sia ∇ la connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana (M, g). Allora ogni $p \in M$ ha un intorno uniformemente normale W.*

Dimostrazione: Dati un intorno V di p e $\delta > 0$, gli insiemi

$$V_\delta = \{v \in TM \mid q = \pi(v) \in V, \|v\|_q < \delta\},$$

dove, come al solito, $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica, formano un sistema fondamentale d'intorni di O_p. Siccome $O_p \in \mathcal{E}$, possiamo trovare V e $\delta_1 > 0$ tali che $V_{\delta_1} \subset \mathcal{E}$.

Sia $E\colon V_{\delta_1} \to M \times M$ data da $E(v) = \bigl(\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v)\bigr)$; cominciamo col dimostrare che E è invertibile in un intorno di O_p.

A meno di restringere V, possiamo supporre che sia il dominio di una carta locale $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ centrata in p. Come già visto nel corso della dimostrazione della Proposizione 5.1.2, φ induce coordinate locali $\tilde\varphi = (x^1, \ldots, x^n; v^1, \ldots, v^n)$ in V_{δ_1}. Una base di $T_{O_p}V_{\delta_1}$ è quindi $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n, \partial/\partial v^1, \ldots, \partial/\partial v^n\}$. Una curva γ in V_{δ_1} con $\gamma(0) = O_p$ e $\dot\gamma(0) = \partial/\partial v^j|_{O_p}$ è $\gamma(t) = t\,\partial/\partial x^j|_p$. Quindi

$$dE_{O_p}\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) = \frac{d}{dt}E\bigl(\gamma(t)\bigr)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\bigl(p, \exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)\bigr)\Big|_{t=0} = \left(O_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right).$$

D'altra parte, una curva τ in V_{δ_1} con $\tau(0) = O_p$ e $\dot\tau(0) = \partial/\partial x^j|_{O_p}$ è $\tau(t) = O_{\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)}$; quindi

$$dE_{O_p}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{d}{dt}\bigl(\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p), \exp_{\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)}(O)\bigr)\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\bigl(\exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p), \exp_p(t\,\partial/\partial x^j|_p)\bigr)\Big|_{t=0} = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right).$$

Quindi dE_{O_p}, mandando una base di $T_{O_p}V_{\delta_1}$ in una base di $T_pM \times T_pM$, è non singolare, per cui esistono un intorno $W \subseteq V$ di p e un $0 < \delta \le \delta_1$ tali che $E|_{W_\delta}$ sia un diffeomorfismo. Ma questo implica in particolare che per ogni $q \in W$ la mappa esponenziale $\exp_q\colon B_\delta(O_q) \to B_\delta(q)$ è un diffeomorfismo, e ci siamo. □

Corollario 5.1.7: *Sia M una varietà Riemanniana. Allora ogni $K \subseteq M$ compatto ha raggio d'iniettività positivo.*

Dimostrazione: La proposizione precedente ci fornisce per ogni $p \in K$ un $\delta_p > 0$ e un intorno W_p di p tali che $\operatorname{inj rad}(q) \ge \delta_p$ per ogni $q \in W_p$. Sia $\{W_{p_1}, \dots, W_{p_k}\}$ un sottoricoprimento finito di K; allora

$$\operatorname{inj rad}(K) \ge \min\{\delta_{p_1}, \dots, \delta_{p_k}\} > 0.$$

□

Esercizio 5.1.2. Dimostra che un'isometria locale fra varietà Riemanniana manda geodetiche in geodetiche, nel senso che se $H\colon M \to N$ è un'isometria locale allora $\sigma\colon I \to M$ è una geodetica in M se e solo se $H \circ \sigma$ è una geodetica in N.

Esercizio 5.1.3. Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e sia $E\colon \mathcal{E} \to M \times M$ data da $E(v) = \bigl(\pi(v), \exp(v)\bigr)$, dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica. Dimostra che dE_v è invertibile se e solo se $d(\exp_p)_v$ è invertibile, dove $p = \pi(v)$.

Esercizio 5.1.4. Date due connessioni lineari ∇ e $\tilde\nabla$ su una varietà M, siano B, S, $A\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ definite da $B(X, Y) = \tilde\nabla_X Y - \nabla_X Y$,

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}\bigl(B(X, Y) + B(Y, X)\bigr) \qquad \text{e} \qquad A(X, Y) = \frac{1}{2}\bigl(B(X, Y) - B(Y, X)\bigr).$$

Indichiamo inoltre con τ la torsione di ∇, e con $\tilde\tau$ la torsione di $\tilde\nabla$.

(i) Dimostra che B, S, $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$.
(ii) Dimostra che $2A = \tilde\tau - \tau$.
(iii) Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) ∇ e $\tilde\nabla$ hanno le stesse geodetiche (cioè ogni geodetica di ∇ è anche geodetica di $\tilde\nabla$, e viceversa);
  (b) $B(v, v) = O$ per ogni $v \in TM$;
  (c) $S \equiv O$;
  (d) $B \equiv A$.
(iv) Dimostra che ∇ e $\tilde\nabla$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione se e solo se $\nabla \equiv \tilde\nabla$.
(v) Dimostra che esiste un'unica connessione simmetrica ∇^* che ha le stesse geodetiche di ∇.

Definizione 5.1.8: Diremo che due connessioni ∇ e $\tilde\nabla$ su una varietà M sono *riferite proiettivamente* se per ogni geodetica $\sigma\colon I \to M$ di ∇ esiste un diffeomorfismo $h\colon J \to I$ tale che $\sigma \circ h$ sia una geodetica di $\tilde\nabla$.

Esercizio 5.1.5. Dimostra che due connessioni simmetriche ∇ e $\tilde\nabla$ su una varietà M sono riferite proiettivamente se e solo se esiste una 1-forma $\varphi \in A^1(M)$ tale che $\tilde\nabla - \nabla = \varphi \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \varphi$.

5.2 La distanza Riemanniana

In questo paragrafo dimostreremo che una varietà Riemanniana è in maniera canonica uno spazio metrico; vedremo poi che le relazioni fra le proprietà topologiche della distanza canonica e le proprietà geometriche della varietà sono estremamente interessanti. Cominciamo con delle definizioni che ci serviranno per introdurre la distanza.

Definizione 5.2.1: Una curva continua $\sigma\colon[a,b]\to M$ in una varietà M è detta *regolare a tratti* se esiste una suddivisione $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ di $[a,b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ sia di classe C^∞ e regolare (cioè con vettore tangente mai nullo) o costante per $j=1,\ldots,k$.

Definizione 5.2.2: Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti in una varietà Riemanniana (M,g). La *lunghezza d'arco* di σ è la funzione

$$s(t)=\int_a^t \|\dot\sigma(u)\|_{\sigma(u)}\,du,$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma di T_pM indotta da g. La *lunghezza* di σ è

$$L(\sigma)=\int_a^b \|\dot\sigma(u)\|_{\sigma(u)}\,du.$$

Diremo che σ è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* se $\|\dot\sigma(u)\|_{\sigma(u)}=1$ quando $\dot\sigma(u)$ è definito; in particolare, σ non ha tratti costanti, e $s(t)=t-a$.

Esercizio 5.2.1. Se $\sigma\colon[a,b]\to M$ è una curva regolare a tratti con $\dot\sigma\ne O$ dove definito, di lunghezza ℓ, dimostra che esiste un omeomorfismo C^∞ a tratti $h\colon[0,\ell]\to[a,b]$ tale che $\sigma\circ h$ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. (*Suggerimento:* h^{-1} è la lunghezza d'arco di σ.)

Esercizio 5.2.2. Sia $H\colon M\to N$ una isometria locale fra varietà Riemanniane, e $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti. Dimostra che la lunghezza di σ in M è uguale alla lunghezza di $H\circ\sigma$ in N.

Definizione 5.2.3: Sia (M,g) una varietà Riemanniana (connessa). La funzione $d\colon M\times M\to\mathbb{R}^+$ data da

$$d(p,q)=\inf\{L(\sigma)\mid \sigma\colon[a,b]\to M \text{ è una curva regolare a tratti con } \sigma(a)=p \text{ e } \sigma(b)=q\}$$

è detta *distanza Riemanniana* su M indotta da g.

Proposizione 5.2.1: *Sia (M,g) una varietà Riemanniana connessa. Allora la funzione $d\colon M\times M\to\mathbb{R}^+$ appena definita è una distanza che induce la topologia della varietà.*

Dimostrazione: Dalla definizione è chiaro che $d(p,q)=d(q,p)\ge 0$ e che $d(p,p)=0$. La disuguaglianza triangolare segue (esercizio) dal fatto che possiamo combinare una curva regolare a tratti da p_1 a p_2 con una da p_2 a p_3 ottenendo una curva regolare a tratti la cui lunghezza è la somma delle lunghezze delle prime due curve.

Rimane da dimostrare che se $p\ne q$ allora $d(p,q)\ne 0$, e che la topologia indotta da d è quella della varietà. Scegliamo $p\in M$, e sia $\varphi\colon B_{2\varepsilon}(p)\to B_{2\varepsilon}(O)\subseteq\mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate normali centrato in p, dove $B_{2\varepsilon}(O)$ è la palla di centro l'origine e raggio $0<2\varepsilon\le \operatorname{inj\,rad}(p)$ in $\mathbb{R}^n$ rispetto alla norma euclidea $\|\cdot\|_0$. Indichiamo con g_0 la metrica Riemanniana su $B_{2\varepsilon}(p)$ indotta tramite φ dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$: in altre parole, se $q\in B_{2\varepsilon}(p)$ e $v\in T_qM$ la norma di v rispetto a g_0 è data da

$$\|v\|_{0,q}=\|d\varphi_q(v)\|_0.$$

In particolare, se $L_0(\sigma)$ è la lunghezza rispetto a g_0 di una curva regolare a tratti $\sigma\colon[a,b]\to B_{2\varepsilon}(p)$, abbiamo

$$L_0(\sigma)=L_0(\varphi\circ\sigma)\ge\big\|\varphi\big(\sigma(b)\big)-\varphi\big(\sigma(a)\big)\big\|, \tag{5.2.1}$$

dove $L_0(\varphi\circ\sigma)$ è la lunghezza euclidea della curva $\varphi\circ\sigma$.

Ora, l'insieme

$$K=\{v\in T_qM\mid q\in\overline{B_\varepsilon(p)},\ \|v\|_{0,q}=1\}\subset TM$$

è chiaramente compatto; quindi se poniamo

$$c_p = \inf_{v \in K} \|v\|_{\pi(v)} \le \sup_{v \in K} \|v\|_{\pi(v)} = C_p,$$

dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica, e $\|\cdot\|_p$ è la norma su T_pM indotta dalla metrica Riemanniana g, abbiamo $0 < c_p \le C_p < +\infty$ e

$$c_p\|v\|_{0,q} \le \|v\|_q \le C_p\|v\|_{0,q}$$

per ogni $q \in \overline{B_\varepsilon(p)}$ e $v \in T_qM$. Dunque se σ è una curva regolare a tratti la cui immagine è contenuta in $\overline{B_\varepsilon(p)}$ otteniamo

$$c_pL_0(\sigma) \le L(\sigma) \le C_pL_0(\sigma). \tag{5.2.2}$$

Se $q \ne p$ possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che $q \notin \overline{B_\varepsilon(p)}$. Quindi ogni curva regolare a tratti $\sigma\colon [a,b] \to M$ da p a q deve intersecare la sfera geodetica $\partial B_\varepsilon(p)$ in un primo punto $\sigma(t_0)$, per cui (5.2.1) e (5.2.2) danno

$$L(\sigma) \ge L(\sigma|_{[a,t_0]}) \ge c_p\, L_0(\sigma|_{[a,t_0]}) \ge c_p\, \big\|\varphi\big(\sigma(t_0)\big)\big\| = c_p\varepsilon > 0. \tag{5.2.3}$$

Siccome questo vale per ogni curva regolare a tratti σ otteniamo $d(p,q) \ge c_p\varepsilon > 0$, come voluto.

Rimane da far vedere che la topologia di M e quella indotta dalla distanza d coincidono. Siccome le palle geodetiche $B_\varepsilon(p)$ formano un sistema fondamentale di intorni di p per la topologia di M, e le palle metriche $B(p,\delta)$ formano un sistema fondamentale di intorni per la topologia metrica, è sufficiente far vedere che

$$B(p, c_p\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq B(p, C_p\varepsilon)$$

per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo.

Prendiamo $q \in B_\varepsilon(p)$, e sia $\sigma\colon [0,l] \to B_\varepsilon(p)$ la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco misurata con g_0. In altre parole, $\sigma(t) = \varphi^{-1}(tv)$ per un opportuno $v \in \mathbb{R}^n$ di lunghezza unitaria, per cui $l < \varepsilon$ e quindi

$$d(p,q) \le L(\sigma) \le C_pL_0(\sigma) = C_pl < C_p\varepsilon,$$

da cui segue $B_\varepsilon(p) \subseteq B(p, C_p\varepsilon)$.

Viceversa, sia $q \in B(p, c_p\varepsilon)$, per cui esiste una curva regolare a tratti σ da p a q di lunghezza strettamente minore di $c_p\varepsilon$. Se fosse $q \notin B_p(\varepsilon)$, la (5.2.3) darebbe $L(\sigma) \ge c_p\varepsilon$, contraddizione. Quindi $B(p, c_p\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon(p)$, e abbiamo finito. □

Osservazione 5.2.1. Faremo vedere fra poco che in realtà $B_\varepsilon(p) = B(p,\varepsilon)$ per ogni $0 < \varepsilon < \operatorname{inj\,rad}(p)$.

Le curve che realizzano la distanza meritano chiaramente un nome particolare.

Definizione 5.2.4: Una curva regolare a tratti $\sigma\colon [a,b] \to M$ è detta *minimizzante* se ha lunghezza minore o uguale a quella di qualsiasi altra curva regolare a tratti con gli stessi estremi, ovvero se e solo se $d\big(\sigma(a),\sigma(b)\big) = L(\sigma)$. La curva σ è *localmente minimizzante* se per ogni $t \in [a,b]$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\sigma|_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]}$ è minimizzante (con le ovvie convenzioni se $t = a$ o $t = b$).

Ovviamente, ogni curva minimizzante è anche localmente minimizzante (perché?); il viceversa è falso (un esempio è dato dai cerchi massimi sulla sfera: vedi l'Esempio 5.4.2).

Il nostro obiettivo ora è dimostrare che una curva è localmente minimizzante se e solo se è una geodetica, che è il risultato che fornirà il legame fra la distanza Riemanniana e la geometria della varietà.

Cominciamo con l'osservare che tutte le geodetiche non costanti sono parametrizzate rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, e quindi sono in particolare curve regolari:

Lemma 5.2.2: *Se $\sigma\colon I \to M$ è una geodetica di una varietà Riemanniana M allora $\|\dot\sigma\|$ è costante. In particolare, σ è sempre (costante oppure) regolare.*

Dimostrazione: Infatti, indicata con D la derivata covariante lungo σ, abbiamo

$$\frac{d}{dt}\langle\dot\sigma,\dot\sigma\rangle = 2\langle D\dot\sigma,\dot\sigma\rangle \equiv 0.$$

□

Abbiamo introdotto in precedenza il concetto di campo vettoriale lungo una curva liscia. Nel seguito ci servirà l'analogo concetto per curve regolari a tratti:

Definizione 5.2.5: Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti. Un *campo vettoriale X lungo σ* è dato da:

(a) una suddivisione $a=t_0<t_1<\cdots<t_h=b$ di $[a,b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ sia di classe C^∞ per $j=1,\ldots,h$;
(b) campi vettoriali $X|_{[t_{j-1},t_j]}\in\mathcal{T}(\sigma|_{[t_{j-1},t_j]})$ per $j=1,\ldots,h$.

Se i vari campi vettoriali si raccordano con continuità nei punti interni $t_1,\ldots,t_{k-1}$ della suddivisione, diremo che X è un campo *continuo*. Lo spazio dei campi vettoriali lungo σ è ancora indicato con $\mathcal{T}(\sigma)$. Infine, un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(\sigma)$ lungo σ è detto *proprio* se $X(a)=X(b)=O$.

Osservazione 5.2.2. Notiamo esplicitamente che non tutti i campi vettoriali $X\in\mathcal{T}(\sigma)$ sono continui; per esempio, il vettore tangente di una curva regolare a tratti non liscia è un campo vettoriale non continuo lungo la curva.

Per stabilire se una curva è minimizzante o meno, dovremo confrontare la sua lunghezza con quella di curve vicine. Il concetto di "curve vicine" è formalizzato nella seguente

Definizione 5.2.6: Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti. Una *variazione* di σ è un'applicazione continua $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ tale che, posto $\sigma_s=\Sigma(s,\cdot)$, si ha

(i) $\sigma_0=\sigma$;
(ii) ciascuna *curva principale* σ_s è una curva regolare a tratti;
(iii) esiste una suddivisione $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ di $[a,b]$ (detta *suddivisione associata* a Σ) tale che $\Sigma_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{j-1},t_j]}$ è di classe C^∞ per $j=1,\ldots,k$.

Le curve *trasverse* alla variazione sono le curve $\sigma^t=\Sigma(\cdot,t)$, e sono tutte curve di classe C^∞. Infine, una variazione Σ è detta *propria* se $\sigma_s(a)=\sigma(a)$ e $\sigma_s(b)=\sigma(b)$ per ogni $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

I vettori tangenti ci forniscono due campi vettoriali lungo le curve principali e trasverse di una variazione:

Definizione 5.2.7: Sia $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma\colon[a,b]\to M$. Allora poniamo

$$S(s,t)=\dot\sigma^t(s)=d\Sigma_{(s,t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(s,t)$$

per ogni $(s,t)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$, e

$$T(s,t)=\dot\sigma_s(t)=d\Sigma_{(s,t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(s,t)$$

per ogni $(s,t)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{j-1},t_j]$ e $j=1,\ldots,k-1$, dove $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ è una suddivisione associata a Σ. In particolare, i campi $t\mapsto S(s,t)$ e $t\mapsto T(s,t)$ sono campi vettoriali lungo σ_s, e i campi $s\mapsto S(s,t)$ e $s\mapsto T(s,t)$ sono campi vettoriali lungo σ^t. Infine, il *campo variazione* di Σ è $V=S(0,\cdot)\in\mathcal{T}(\sigma)$.

Il campo variazione è un campo continuo lungo σ. Viceversa, dato un campo vettoriale continuo lungo una curva regolare a tratti possiamo trovare una variazione che abbia quel campo come campo variazione:

Lemma 5.2.3: *Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti, e $V\in\mathcal{T}(\sigma)$ un campo continuo. Allora esiste una variazione Σ di σ con V come campo variazione. Inoltre, se V è proprio si può trovare Σ propria.*

Dimostrazione: Essendo $[a,b]$ compatto, il raggio d'iniettività δ del sostegno di σ è strettamente positivo, e il massimo M di $\|V(t)\|_{\sigma(t)}$ è finito. Se $\varepsilon=\delta/M>0$, allora l'applicazione $\Sigma(s,t)=\exp\bigl(sV(t)\bigr)$ è definita su $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$, e quindi è una variazione di σ. Siccome

$$S(0,t)=\frac{\partial}{\partial s}\exp\bigl(sV(t)\bigr)\bigg|_{s=0}=d(\exp)_{O_{\sigma(t)}}\bigl(V(t)\bigr)=V(t),$$

il campo variazione coincide con V. Infine, se $V(a)=V(b)=O$ è evidente che Σ è propria. □

Nel seguito ci servirà il seguente lemma elementare ma fondamentale:

Lemma 5.2.4: *Sia $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ una variazione di una curva regolare a tratti $\sigma\colon[a,b]\to M$ in una varietà Riemanniana M. Allora su ogni rettangolo $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{j-1},t_j]$ su cui Σ è di classe C^∞ si ha*

$$D_sT = D_tS,$$

dove D_s è la derivata covariante lungo le curve trasverse, e D_t quella lungo le curve principali.

Dimostrazione: Basta fare il conto in coordinate locali. Scrivendo

$$S(s,t)=\frac{\partial\Sigma^i}{\partial s}(s,t)\,\partial_i|_{\Sigma(s,t)},\qquad T(s,t)=\frac{\partial\Sigma^j}{\partial t}(s,t)\,\partial_j|_{\Sigma(s,t)},$$

la formula (4.3.2) dà

$$\begin{aligned}D_sT&=\left[\frac{\partial^2\Sigma^k}{\partial s\partial t}+(\Gamma^k_{ij}\circ\Sigma)\frac{\partial\Sigma^i}{\partial s}\frac{\partial\Sigma^j}{\partial t}\right]\partial_k|_\Sigma\\&=\left[\frac{\partial^2\Sigma^k}{\partial t\partial s}+(\Gamma^k_{ji}\circ\Sigma)\frac{\partial\Sigma^i}{\partial s}\frac{\partial\Sigma^j}{\partial t}\right]\partial_k|_\Sigma=D_tS,\end{aligned}$$

grazie alla simmetria della connessione di Levi-Civita. □

Definizione 5.2.8: Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti, e $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che σ sia di classe C^∞ in ciascun intervallo $[t_{j-1},t_j]$. Allora per $j=0,\ldots,k$ definiamo $\Delta_j\dot\sigma\in T_{\sigma(t_j)}M$ ponendo $\Delta_0\dot\sigma=\dot\sigma(a)$, $\Delta_k\dot\sigma=-\dot\sigma(b)$ e

$$\Delta_j\dot\sigma=\dot\sigma(t_j^+)-\dot\sigma(t_j^-)$$

per $j=1,\ldots,k-1$, dove $\dot\sigma(t_j^+)=\lim_{t\to t_j^+}\dot\sigma(t)$, e $\dot\sigma(t_j^-)=\lim_{t\to t_j^-}\dot\sigma(t)$.

E ora siamo in grado di dimostrare una formula importante:

Teorema 5.2.5: (Prima variazione della lunghezza d'arco) *Sia $\sigma\colon[a,b]\to M$ una curva regolare a tratti parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana M, e $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ una sua variazione con suddivisione associata $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$. Indichiamo con $V\in\mathcal{T}(\sigma)$ il campo variazione di Σ, e definiamo la funzione $L\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ ponendo $L(s)=L(\sigma_s)$. Allora*

$$\frac{dL}{ds}(0)=-\int_a^b\langle V(t),D_t\dot\sigma\rangle\,dt-\sum_{j=0}^k\langle V(t_j),\Delta_j\dot\sigma\rangle. \tag{5.2.4}$$

Dimostrazione: In un intervallo $[t_{j-1},t_j]$ dove tutto è di classe C^∞ abbiamo

$$\frac{d}{ds}L(\sigma_s|_{[t_{j-1},t_j]})=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial}{\partial s}\langle T,T\rangle^{1/2}\,dt=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\|T\|}\langle D_sT,T\rangle\,dt=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\|T\|}\langle D_tS,T\rangle\,dt,$$

dove abbiamo usato il Lemma 5.2.4. Ponendo $s=0$ e ricordando che $S(0,t)=V(t)$, $T(0,t)=\dot\sigma(t)$ e $\|\dot\sigma\|\equiv1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}L(\sigma_s|_{[t_{j-1},t_j]})\bigg|_{s=0}&=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle D_tV,\dot\sigma(t)\rangle\,dt=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[\frac{d}{dt}\langle V,\dot\sigma\rangle-\langle V(t),D_t\dot\sigma\rangle\right]dt\\&=\langle V(t_j),\dot\sigma(t_j^-)\rangle-\langle V(t_{j-1}),\dot\sigma(t_{j-1}^+)\rangle-\int_{t_{j-1}}^{t_j}\langle V(t),D_t\dot\sigma\rangle\,dt.\end{aligned}$$

Sommando su j otteniamo la tesi. □

Siamo ora in grado di dimostrare che ogni curva localmente minimizzante è una geodetica:

Teorema 5.2.6: *Ogni curva localmente minimizzante parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana è una geodetica — e quindi in particolare è di classe C^∞.*

Dimostrazione: Siccome l'enunciato è locale, possiamo supporre che $\sigma\colon [a,b] \to M$ sia una curva regolare a tratti minimizzante parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco; dobbiamo dimostrare che è una geodetica. Essendo una curva minimizzante, $dL(\sigma_s)/ds(0) = 0$ per ogni variazione propria Σ di σ; quindi il Lemma 5.2.3 ci assicura che il secondo membro di (5.2.4) è nullo per ogni campo vettoriale V proprio lungo σ.

Sia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che σ sia di classe C^∞ in ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$, e sia $\chi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione tale che $\chi_j > 0$ in (t_{j-1}, t_j) e $\chi_j \equiv 0$ altrove. Allora (5.2.4) con $V = \chi_j D\dot\sigma$ diventa

$$0 = -\int_{t_{j-1}}^{t_j} \chi_j(t) \|D_t\dot\sigma\|^2\, dt,$$

per cui $D\dot\sigma \equiv 0$ in ciascun intervallo $[t_{j-1}, t_j]$, e quindi σ è una geodetica all'interno di ciascuno di questi intervalli.

Ora vogliamo dimostrare che $\Delta_j\dot\sigma = O$ per $j = 1, \ldots, k-1$. Ma infatti basta prendere un campo vettoriale $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ tale che $V(t_j) = \Delta_j\dot\sigma$ e $V(t_i) = O$ per $i \neq j$; in tal caso (5.2.4) si riduce a $0 = -\|\Delta_j\dot\sigma\|^2$, e ci siamo.

Dunque $\dot\sigma$ è continuo; per l'unicità delle geodetiche tangenti a una data direzione otteniamo che $\sigma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ è la continuazione di $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ per $j - 1, \ldots, k-1$, e quindi σ è liscia e una geodetica dappertutto. □

In realtà abbiamo dimostrato qualcosina di più.

Definizione 5.2.9: Diremo che una curva regolare a tratti $\sigma\colon [a,b] \to M$ in una varietà Riemanniana M è un *punto critico del funzionale lunghezza* se

$$\frac{dL(\sigma_s)}{ds}(0) = 0$$

per ogni variazione propria Σ di σ.

Allora la dimostrazione del teorema precedente implica chiaramente il

Corollario 5.2.7: *Una curva regolare a tratti parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una varietà Riemanniana è un punto critico del funzionale lunghezza se e solo se è una geodetica.*

Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare il viceversa del Teorema 5.2.6, cioè dimostrare che ogni geodetica è localmente minimizzante. Per far ciò ci serve il seguente

Lemma 5.2.8: (Gauss) *Sia M una varietà Riemanniana, $p \in M$ e $v \in \mathcal{E}_p$. Allora si ha*

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle_{\exp_p(v)} = \langle v, w\rangle_p \tag{5.2.5}$$

per ogni $w \in T_pM$, dove abbiamo identificato come al solito $T_v(T_pM)$ con T_pM.

Dimostrazione: Cominciamo a dimostrare (5.2.5) per $w = v$. Una curva in T_pM passante per v e tangente a v è $\tau(t) = v + tv$; quindi

$$d(\exp_p)_v(v) = \left.\frac{d}{dt}\exp_p\bigl((1+t)v\bigr)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\sigma_v(1+t)\right|_{t=0} = \dot\sigma_v(1), \tag{5.2.6}$$

dove come sempre σ_v denota la geodetica massimale con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot\sigma_v(0) = v$. Quindi

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(v)\rangle_{\exp_p(v)} = \|\dot\sigma_v(1)\|^2_{\sigma_v(1)} = \langle v, v\rangle_p,$$

perché, grazie al Lemma 5.2.2, $\|\dot\sigma_v(1)\|_{\sigma_v(1)} = \|\dot\sigma_v(0)\|_{\sigma_v(0)} = \|v\|_p$.

Per la linearità di $d(\exp_p)_v$ ci basta allora dimostrare che se w è perpendicolare a v allora

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle_{\exp_p(v)} = 0.$$

Siccome $\langle w, v\rangle_p = 0$, il vettore w, considerato come vettore in $T_v(T_pM)$, è tangente in v alla sfera $\partial B_{\|v\|_p}(O_p)$ di centro l'origine e raggio $\|v\|_p$. Quindi possiamo trovare una curva $\tau\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to T_pM$ con $\tau(0)=v$, $\dot\tau(0)=w$ e $\|\tau(s)\|_p\equiv\|v\|_p$. Siccome $v\in\mathcal{E}_p$, possiamo supporre che $\tau(s)\in\mathcal{E}_p$ per ogni s, e definire una variazione $\Sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\to T_pM$ di σ_v ponendo

$$\Sigma(s,t)=\exp_p\bigl(t\tau(s)\bigr).$$

Notiamo esplicitamente che le curve principali di Σ sono geodetiche, che $\Sigma(0,1)=\exp_p(v)$, e che

$$T(0,1)=d(\exp_p)_v(v)=\dot\sigma_v(1),\qquad S(0,1)=\left.\frac{\partial}{\partial s}\exp_p\bigl(\tau(s)\bigr)\right|_{s=0}=d(\exp_p)_v(w),$$

per cui ci basta dimostrare che $\langle T(0,1),S(0,1)\rangle_{\exp_p(v)}=0$. Ora,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle T,S\rangle_\Sigma=\langle D_tT,S\rangle_\Sigma+\langle T,D_tS\rangle_\Sigma=\langle T,D_sT\rangle_\Sigma=\frac12\frac{\partial}{\partial s}\|T\|^2_\Sigma=0,$$

dove abbiamo usato: $D_tT\equiv O$, in quanto ciascuna σ_s è una geodetica; il Lemma 5.2.4; e

$$\|T(s,t)\|_{\Sigma(s,t)}=\|\dot\sigma_s(t)\|_{\sigma_s(t)}\equiv\|\dot\sigma_s(0)\|_p=\|\tau(s)\|_p\equiv\|v\|_p.$$

Dunque $\langle T,S\rangle_\Sigma$ non dipende da t; e quindi

$$\langle T(0,1),S(0,1)\rangle_{\exp_p(v)}=\langle T(0,0),S(0,0)\rangle_p=0,$$

in quanto $\sigma^0\equiv p$ implica $S(0,0)=\dot\sigma^0(0)=O_p$. □

Vogliamo dare un'interpretazione più geometrica di questo risultato.

Definizione 5.2.10: Sia $B_\varepsilon(p)\subset M$ una palla geodetica di centro p in una varietà Riemanniana M, dove ε è tale che $0<\varepsilon\le\operatorname{inj\,rad}(p)$, e poniamo $B^*_\varepsilon(p)=B_\varepsilon(p)\setminus\{p\}$. Indichiamo con $r\colon B_\varepsilon(p)\to\mathbb{R}^+$ la funzione data da $r(q)=\|\exp_p^{-1}(q)\|_p$ per ogni $q\in B_\varepsilon(p)$. Chiaramente, $r\in C^\infty\bigl(B^*_\varepsilon(p)\bigr)$. Il *campo radiale* $\partial/\partial r\in\mathcal{T}\bigl(B^*_\varepsilon(p)\bigr)$ è il gradiente di r:

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_q=(\operatorname{grad} r)(q)$$

per ogni $q\in B^*_\varepsilon(p)$.

Osservazione 5.2.3. Dimostreremo fra poco che $r\colon B_\varepsilon(p)\to\mathbb{R}^+$ è la distanza Riemanniana dal punto p; nota nel frattempo che $B_\delta(p)=r^{-1}([0,\delta))$ per ogni $0\le\delta\le\varepsilon$.

Proposizione 5.2.9: *Sia $B_\varepsilon(p)$ una palla geodetica in una varietà Riemanniana M. Allora:*

(i) *per ogni $q=\exp_p(v)\in B^*_\varepsilon(p)$ si ha*

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_q=d(\exp_p)_v\left(\frac{v}{\|v\|_p}\right)=\frac{\dot\sigma_v(1)}{\|v\|_p}=\dot\sigma_{v/\|v\|_p}(\|v\|_p),$$

e in particolare, $\|\partial/\partial r\|\equiv1$;

(ii) *le geodetiche radiali uscenti da p parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco sono le traiettorie di $\partial/\partial r$;*

(iii) *il campo radiale è ortogonale alle sfere geodetiche $\partial B_\delta(p)$ contenute in $B_\varepsilon(p)$.*

Dimostrazione: (i) Prima di tutto, derivando l'uguaglianza $\sigma_{v/\|v\|_p}(t)=\sigma_v(t/\|v\|_p)$ otteniamo

$$\dot\sigma_{v/\|v\|_p}(\|v\|_p)=\frac{\dot\sigma_v(1)}{\|v\|_p};$$

quindi, ricordando la (5.2.6), rimane da dimostrare solo che

$$dr_{\exp_p(v)}(\tilde{w}) = \frac{1}{\|v\|_p}\langle d(\exp_p)_v(v), \tilde{w}\rangle_{\exp_p(v)} \tag{5.2.7}$$

per ogni $v \in B_\varepsilon(O_p)$, $v \neq O_p$, e ogni $\tilde{w} \in T_{\exp_p(v)}M$.

Ora, ogni $\tilde{w} \in T_{\exp_p(v)}M$ è della forma $\tilde{w} = d(\exp_p)_v(w)$ per un unico $w \in T_pM$, in quanto $\exp_p$ è un diffeomorfismo fra $B_\varepsilon(O_p)$ e $B_\varepsilon(p)$ — e stiamo identificando $T_v(T_pM)$ con T_pM come al solito. Dunque

$$dr_{\exp_p(v)}(\tilde{w}) = dr_{\exp_p(v)}\bigl(d(\exp_p)_v(w)\bigr) = d(r \circ \exp_p)_v(w) = \frac{\langle v, w\rangle_p}{\|v\|_p},$$

dove l'ultima eguaglianza segue da $r \circ \exp_p = \|\cdot\|_p$, e quindi (5.2.7) è esattamente equivalente al Lemma 5.2.8.

(ii) Se $q = \exp_p(v) \in B^*_\varepsilon(p)$, la geodetica radiale parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco uscente da p passante per q è esattamente $t \mapsto \sigma_{v/\|v\|_p}(t)$, e raggiunge q per $t = \|v\|_p$. La tesi segue allora da (i).

(iii) Siccome $\partial B_\delta(p) = \exp_p\bigl(\partial B_\delta(O_p)\bigr)$, i vettori tangenti a $\partial B_\delta(p)$ in $q = \exp_p(v)$ sono esattamente l'immagine tramite $d\exp_p$ dei vettori tangenti a $\partial B_\delta(O_p)$ in v, i quali sono proprio i vettori ortogonali a v. La tesi segue allora dal Lemma 5.2.8. □

E ora siamo arrivati al cruciale

Teorema 5.2.10: *Sia (M, g) una varietà Riemanniana, $p \in M$ e $0 < \varepsilon \leq \operatorname{inj\,rad}(p)$. Allora:*

(i) *Se q appartiene a una palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ di centro p, allora la geodetica radiale da p a q è l'unica (a meno di riparametrizzazioni) curva minimizzante da p a q.*

(ii) *La funzione r introdotta nella Definizione 5.2.10 coincide con la distanza Riemanniana dal punto p, per cui ogni palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ è la palla di centro p e raggio ε per la distanza Riemanniana di M.*

(iii) *Ogni geodetica di M è localmente minimizzante.*

Dimostrazione: (i) Sia $\sigma\colon [0, \ell] \to M$ la geodetica radiale da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, per cui $\sigma(t) = \exp_p(tv)$ per un opportuno vettore $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria. Siccome si ha $L(\sigma) = \ell = r(q)$, dobbiamo dimostrare che ogni altra curva regolare a tratti da p a q ha lunghezza maggiore o uguale a ℓ, e uguale a ℓ se e solo se è una riparametrizzazione di σ.

Sia $\tau\colon [a, b] \to M$ una curva regolare a tratti da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e supponiamo per il momento che l'immagine di τ sia tutta contenuta in $B_\varepsilon(p)$. Chiaramente, possiamo anche supporre che $\tau(t) \neq p$ per $t > a$. Per la proposizione precedente possiamo scrivere $\dot{\tau}$ in tutti i punti in cui esiste come

$$\dot{\tau}(t) = \alpha(t)\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{\tau(t)} + w(t),$$

per un'opportuna funzione α e un'opportuno campo $w \in \mathcal{T}(\tau)$, con la proprietà che $w(t)$ è tangente alla sfera geodetica passante per $\tau(t)$. Siccome questa è una decomposizione ortogonale abbiamo

$$\|\dot{\tau}(t)\|^2 = |\alpha(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \geq |\alpha(t)|^2.$$

Inoltre, siccome le sfere geodetiche sono le ipersuperfici di livello della funzione r, abbiamo $dr(w) \equiv 0$, e quindi

$$\alpha(t) = dr\bigl(\dot{\tau}(t)\bigr).$$

Di conseguenza

$$L(\tau) = \int_a^b \|\dot{\tau}(t)\|\,dt \geq \int_a^b |\alpha(t)|\,dt \geq \int_a^b dr\bigl(\dot{\tau}(t)\bigr)\,dt = \int_a^b \frac{d(r \circ \tau)}{dt}\,dt = r(q) - r(p) = \ell,$$

come voluto. Inoltre, si ha uguaglianza se e solo se $\dot{\tau}$ è un multiplo positivo di $\partial/\partial r$; essendo entrambi di lunghezza unitaria, dobbiamo avere $\dot{\tau} \equiv (\partial/\partial r) \circ \tau$. Quindi sia τ che σ sono traiettorie di $\partial/\partial r$ passanti per q al tempo $t = \ell$, e quindi $\tau = \sigma$.

Infine, se $\tau\colon [a, b] \to M$ è una qualsiasi curva regolare a tratti da p a q, sia $a_0 \in [a, b]$ l'ultimo valore t per cui $\tau(t) = p$, e $b_0 \in [a, b]$ il primo valore $t > a_0$ tale che $\tau(t) \in \partial B_\varepsilon(p)$, se esiste; altrimenti poniamo $b_0 = b$. Chiaramente, la curva $\tau|_{[a_0,b_0]}$ ha supporto contenuto in $B_\varepsilon(t)$ tranne eventualmente per il punto finale; siccome

$$L(\tau) \geq L(\tau|_{[a_0,b_0]}),$$

con eguaglianza se e solo se $a_0 = a$ e $b_0 = b$, la tesi segue allora da quanto già visto.

(ii) Se $q \in B_\varepsilon(p)$, esiste un unico $v \in B_\varepsilon(O_p)$ tale che $q = \exp_p(v)$, e la geodetica minimizzante da p a q parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è $\sigma_{v/\|v\|_p}$. Quindi $r(q) = \|v\|_p = L(\sigma_{v/\|v\|_p}|_{[0,\|v\|_p]}) = d(p, q)$, e r coincide con la distanza Riemanniana da p. In particolare, $B_\varepsilon(p)$ è contenuta nella palla $B(p, \varepsilon)$ di centro p e raggio ε per la distanza Riemanniana. Viceversa, se $q \in B(p, \varepsilon)$ deve esistere una curva σ da p a q di lunghezza minore di ε; ma abbiamo visto che ogni curva che esce da $B_\varepsilon(p)$ deve avere lunghezza almeno uguale a ε, per cui $q \in B_\varepsilon(p)$, e ci siamo.

(iii) Sia $\sigma\colon I \to M$ una geodetica massimale parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, $t_0 \in I$ e $p = \sigma(t_0)$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $B_\varepsilon(p)$ sia una palla geodetica. Allora per ogni $q \in B_\varepsilon(p) \cap \sigma(I)$ la geodetica σ è la geodetica radiale da p a q, e quindi è la curva minimizzante da p a q. In altre parole, σ è localmente minimizzante nell'intorno $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ di t_0. $\square$

5.3 Il teorema di Hopf-Rinow

Possiamo finalmente affrontare il problema di quando l'esponenziale è definito su tutto lo spazio tangente.

Teorema 5.3.1: (Hopf-Rinow) *Sia M una varietà Riemanniana. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *la distanza Riemanniana è completa;*
(ii) *per ogni $p \in M$ e ogni $v \in T_pM$ la geodetica σ_v è definita su tutto $\mathbb{R}$;*
(iii) *per ogni $p \in M$ la mappa esponenziale $\exp_p$ è definita su tutto T_pM;*
(iv) *esiste un punto $p \in M$ tale che la mappa esponenziale $\exp_p$ è definita su tutto T_pM;*
(v) *esiste un punto $p \in M$ tale che per ogni $v \in T_pM$ la geodetica σ_v è definita su tutto $\mathbb{R}$;*
(vi) *ogni insieme chiuso limitato di M è compatto.*

Inoltre, ciascuna di queste condizioni implica che

(vii) *ogni coppia di punti di M può essere collegata da una geodetica minimizzante.*

Dimostrazione: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Dobbiamo dimostrare che per ogni $p \in M$ e ogni $v \in T_pM$ la geodetica σ_v è definita su tutto $\mathbb{R}$. Sia $[0, t_0)$ il più grande intervallo aperto a destra su cui σ_v è definita, e supponiamo per assurdo che t_0 sia finito. Siccome

$$d\big(\sigma_v(s), \sigma_v(t)\big) \leq L(\sigma_v|_{[s,t]}) = \|v\|\,|s - t|$$

per ogni $0 \leq s \leq t < t_0$, se $\{t_k\} \subset [0, t_0)$ converge crescendo a t_0 la successione $\{\sigma_v(t_k)\}$ è di Cauchy in M per la distanza d, e quindi converge a un punto $q \in M$, chiaramente indipendente dalla successione scelta. Dunque ponendo $\sigma_v(t_0) = q$ otteniamo un'applicazione continua da $[0, t_0]$ in M. Sia U un intorno uniformemente normale di q, con raggio d'iniettività $\delta > 0$. Per ogni k abbastanza grande, abbiamo sia $|t_k - t_0| < \delta/\|v\|$ che $\sigma_v(t_k) \in U$. In particolare, le geodetiche radiali uscenti da $\sigma_v(t_k)$ si prolungano per una lunghezza almeno uguale a δ; siccome $L(\sigma_v|_{[t_k,t_0]}) = |t_0 - t_k|\|v\| < \delta$, la geodetica σ_v si prolunga oltre t_0, contraddizione. Quindi $t_0 = +\infty$, e σ_v è definita su $\mathbb{R}^+$. Siccome $\sigma_{-v}(t) = \sigma_v(-t)$, lo stesso ragionamento applicato a σ_{-v} dimostra che σ_v è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) e (v) $\Longrightarrow$ (iv): Ovvio.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Ovvio.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Per ipotesi $\exp_p(tv) = \sigma_{tv}(1)$ è definito per ogni $v \in T_pM$ e $t \in \mathbb{R}$; quindi $\sigma_v(t) = \sigma_{tv}(1)$ è definito per ogni $v \in T_pM$ e $t \in \mathbb{R}$.

Introduciamo ora la condizione

(vii′) *Esiste un punto $p \in M$ che può essere collegato a qualsiasi altro punto con una geodetica minimizzante.*

(v) $\Longrightarrow$ (vii′): Dato $q \in M$, poniamo $r = d(p,q)$, e sia $B_{2\varepsilon}(p)$ una palla geodetica di centro p tale che $q \notin \overline{B_\varepsilon(p)}$. Sia $x_0 \in \partial B_\varepsilon(p)$ un punto in cui la funzione continua $d(q,x)$ ammette minimo. Possiamo scrivere $x_0 = \exp_p(\varepsilon v)$ per un opportuno $v \in T_pM$ di norma uno; vogliamo dimostrare che $\sigma_v(r) = q$.

Poniamo

$$A = \{s \in [0,r] \mid d\big(\sigma_v(s), q\big) = r - s\}.$$

L'insieme A è non vuoto ($0 \in A$), ed è chiuso in $[0,r]$; se dimostriamo che $\sup A = r$ abbiamo finito. Sia $s_0 \in A$ minore di r; ci basta far vedere che $s_0 + \delta \in A$ per $\delta > 0$ abbastanza piccolo (inoltre, se $s_0 = 0$ l'argomento che stiamo per presentare dimostrerà che $\varepsilon \in A$). Prendiamo una palla geodetica $B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$; possiamo supporre che $q \notin B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$. Per costruzione,

$$d\big(p, \sigma_v(s_0)\big) \le s_0 = d(p,q) - d\big(\sigma_v(s_0), q\big),$$

che è possibile se e solo se $d\big(p, \sigma_v(s_0)\big) = s_0$. Sia $x_0' \in \partial B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$ un punto in cui $d(x,q)$ assume minimo. Allora

$$r - s_0 = d\big(\sigma_v(s_0), q\big) \le \delta + d(x_0', q);$$

d'altra parte, se τ è una curva regolare a tratti da $\sigma_v(s_0)$ a q, suddividendo τ nella parte fino all'ultima intersezione con $\partial B_\delta\big(\sigma_v(s_0)\big)$ e nel resto, si ha

$$L(\tau) \ge \delta + \min_{x \in \partial B_\delta(\sigma_v(s_0))} d(x,q) = \delta + d(x_0', q),$$

per cui abbiamo

$$r - s_0 = \delta + d(x_0', q),$$

e quindi

$$d(p, x_0') \ge d(p,q) - d(q, x_0') = r - (r - s_0 - \delta) = s_0 + \delta.$$

D'altra parte, la curva $\tilde\sigma$ ottenuta unendo $\sigma_v|_{[0,s_0]}$ con la geodetica radiale da $\sigma_v(s_0)$ a x_0' ha lunghezza esattamente $s_0 + \delta$; quindi $d(p, x_0') = s_0 + \delta$. In particolare, la curva $\tilde\sigma$ è minimizzante, per cui è una geodetica e dunque coincide con σ_v. Ma allora $\sigma_v(s_0 + \delta) = x_0'$ e quindi

$$d\big(\sigma_v(s_0 + \delta), q\big) = d(x_0', q) = r - (s_0 + \delta),$$

cioè $s_0 + \delta \in A$, come voluto.

(v)+(vii′) $\Longrightarrow$ (vi): basta far vedere che le palle chiuse di centro p per la distanza sono compatte. Ma infatti coincidono, grazie a (vii′) e (iv), con le immagini tramite $\exp_p$ delle palle $\overline{B_r(O_p)}$, che sono compatte.

(vi) $\Longrightarrow$ (i): è un risultato classico di topologia.

(ii) $\Longrightarrow$ (vii): si ragiona come in (v) $\Longrightarrow$ (vii′). □

Definizione 5.3.1: Una varietà Riemanniana la cui distanza Riemanniana è completa sarà detta *completa.*

Esercizio 5.3.1. Dimostra che ogni varietà Riemanniana omogenea è completa.

Come vedremo, le varietà Riemanniane complete sono l'ambiente giusto in cui studiare proprietà globali.

5.4 Esempi

Esempio 5.4.1. *Lo spazio euclideo.* Le geodetiche di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla metrica euclidea sono chiaramente le rette. In particolare, un aperto convesso limitato di $\mathbb{R}^n$ mostra che in generale non è vero che la condizione (v) del Teorema di Hopf-Rinow implichi le altre.

Esempio 5.4.2. *La sfera.* Un *cerchio massimo* su S^n_R è l'intersezione di S^n_R con un piano passante per l'origine. Vogliamo far vedere che le geodetiche di S^n_R sono proprio i cerchi massimi, parametrizzati rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco. Sia σ una geodetica uscente dal polo nord $N = (0, \dots, 0, 1)$ e tangente al vettore $\partial/\partial x^1$. Se l'immagine di σ non fosse contenuta nel piano π di equazione $x^2 = \cdots = x^n = 0$, la simmetria ρ rispetto a questo piano (che è un'isometria della metrica sferica) manderebbe σ in una geodetica $\rho \circ \sigma$ diversa ma sempre uscente da N e tangente a $\partial/\partial x^1$, impossibile. Quindi l'immagine di σ dev'essere contenuta in π, per cui è necessariamente una parametrizzazione a velocità costante del cerchio massimo $S^n_R \cap \pi$. Siccome, grazie all'Esempio 4.2.4, possiamo mandare con una rotazione il vettore $\partial/\partial x^1|_N$ in un qualunque vettore di TS^n_R di lunghezza unitaria, e le rotazioni mandano geodetiche in geodetiche e cerchi massimi in cerchi massimi, abbiamo finito. In particolare, abbiamo esempi di geodetiche non minimizzanti: i cerchi massimi smettono di essere minimizzanti non appena si supera il punto diametralmente opposto. Più precisamente, abbiamo $\operatorname{inj\,rad}(p) = \pi R$ ed $\exp_p\bigl(B_{\pi R}(O_p)\bigr) = S^n_R \setminus \{-p\}$ per ogni $p \in S^n_R$. Infine, la sfera è per forza completa, in quanto compatta.

Esercizio 5.4.1. Dimostra che le geodetiche dello spazio iperbolico sono: in U^n_R le "iperboli massime", cioè le intersezioni di U^n_R con piani passanti per l'origine; in B^n_R i diametri e gli archi di circonferenza che intersecano ∂B^n_R ortogonalmente; in H^n_R le semirette verticali e le semicirconferenze con centro in ∂H^n_R. Deduci che lo spazio iperbolico è completo, che il raggio d'iniettività di ogni punto è infinito, e che per ogni punto p dello spazio iperbolico la mappa esponenziale è un diffeomorfismo fra lo spazio tangente nel punto e l'intero spazio iperbolico.

Esempio 5.4.3. *Il cilindro piatto.* Consideriamo $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2 = 1\}$, con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$. Siccome M è omogeneo (esercizio), possiamo limitarci a studiare le geodetiche uscenti dal punto $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Lo spazio tangente a M in p_0 è l'iperpiano $T_{p_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v^1 = 0\}$, e un versore normale a M in $\mathbb{R}^n$ nel punto $p \in M$ è $N(p) = (p^1, \dots, p^{n-1}, 0)$. Sia $\sigma\colon I \to M$ la geodetica con $\sigma(0) = p_0$ e $\dot\sigma(0) = v \in T_{p_0}M$. Allora sappiamo che

$$|\sigma^1|^2 + \cdots + |\sigma^{n-1}|^2 \equiv 1, \qquad |\dot\sigma^1|^2 + \cdots + |\dot\sigma^n|^2 \equiv \|v\|^2; \tag{5.4.1}$$

inoltre, siccome la connessione di Levi-Civita di M è la proiezione della connessione piatta di $\mathbb{R}^n$, l'equazione delle geodetiche diventa

$$\ddot\sigma = \lambda N \circ \sigma \tag{5.4.2}$$

per un'opportuna funzione $\lambda \in C^\infty(I)$. In particolare, abbiamo subito $\sigma^n(t) = v^n t$, e se $\sigma_o = (\sigma^1, \dots, \sigma^{n-1})$ l'equazione (5.4.2) diventa

$$\ddot\sigma_o = \lambda\sigma_o.$$

Derivando due volte $\|\sigma_o\|^2 \equiv 1$ troviamo $(\ddot\sigma_o, \sigma_o) + \|\dot\sigma_o\|^2 \equiv 0$, per cui $\lambda = -\|v_o\|^2$, dove $v_o = (0, v^2, \dots, v^{n-1})$. Mettendo tutto insieme ricaviamo

$$\sigma(t) = \left(\cos(\|v_o\|t), \frac{v^2}{\|v_o\|}\sin(\|v_o\|t), \dots, \frac{v^{n-1}}{\|v_o\|}\sin(\|v_o\|t), v^n t\right).$$

Nel resto di questo paragrafo studieremo le geodetiche di un gruppo di Lie connesso G; fra l'altro, daremo un'ulteriore motivazione per il nome della mappa esponenziale.

Cominciamo con una definizione cruciale:

Definizione 5.4.1: Sia G un gruppo di Lie connesso. Un *sottogruppo a un parametro* di G è una $\theta\colon \mathbb{R} \to G$ di classe C^∞ che sia un omomorfismo di gruppi. In altre parole, richiediamo che $\theta(0) = e$ sia l'identità di G, e che $\theta(t + s) = \theta(t) \cdot \theta(s)$ per ogni s, $t \in \mathbb{R}$.

Come vedremo, i sottogruppi a un parametro sono geodetiche per opportune connessioni lineari. Iniziamo con il realizzarli come curve integrali:

Lemma 5.4.1: *Sia G un gruppo di Lie, $X \in \mathfrak{g}$ e $\tilde{X} \in \mathcal{T}(G)$ il campo vettoriale invariante a sinistra associato a X. Allora:*

(i) *la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e è un sottogruppo a un parametro di G;*
(ii) *viceversa, se $\theta: \mathbb{R} \to G$ è un semigruppo a un parametro con $\theta'(0) = X$, allora θ è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e.*

Dimostrazione: (i) Sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ la curva integrale massimale di $\tilde{X}$ uscente da e. Vogliamo dimostrare che per ogni $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ data da $\gamma(t) = \sigma(t_0)\sigma(t)$ è una curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da $\sigma(t_0)$. Infatti si ha

$$\gamma'(t) = d(L_{\sigma(t_0)})_{\sigma(t)}\bigl(\sigma'(t)\bigr) = d(L_{\sigma(t_0)})_{\sigma(t)}\bigl(\tilde{X}(\sigma(t))\bigr) = \tilde{X}\bigl(\gamma(t)\bigr),$$

come voluto. Ma l'unicità delle curve integrali ci dice che allora $\gamma(t) = \sigma(t_0 + t)$, cioè

$$\sigma(t_0 + t) = \sigma(t_0)\sigma(t)$$

per ogni t_0, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. In particolare questo implica che ε dev'essere necessariamente infinito (perché?), e che σ è un sottogruppo a un parametro.

(ii) Supponiamo che θ sia un sottogruppo a un parametro con $\theta'(0) = X$. Allora

$$\theta'(t_0) = \frac{d}{dt}(L_{\theta(t_0)} \circ \theta)\Big|_{t=0} = d(L_{\theta(t_0)})_e\bigl(\theta'(0)\bigr) = d(L_{\theta(t_0)})_e(X) = \tilde{X}\bigl(\theta(t_0)\bigr),$$

per cui θ è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e. □

In particolare, quindi, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ esiste un unico sottogruppo a un parametro $\theta_X: \mathbb{R} \to G$ tale che $\theta'_X(0) = X$: è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e.

Definizione 5.4.2: Sia G un gruppo di Lie. L'*applicazione esponenziale* di G è l'applicazione $\exp: \mathfrak{g} \to G$ data da $\exp(X) = \theta_X(1)$.

Osservazione 5.4.1. Se $s \in \mathbb{R}$, abbiamo che $t \mapsto \theta_X(st)$ è un semigruppo a un parametro tangente a sX in 0; quindi $\exp(sX) = \theta_X(s)$. In altre parole, tutti i sottogruppi a un parametro di G sono della forma $t \mapsto \exp(tX)$ per qualche $X \in \mathfrak{g}$.

Esempio 5.4.4. Sia $G = GL(n, \mathbb{R})$, per cui $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Allora per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n, R)$ possiamo definire l'applicazione $\theta_X: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ ponendo

$$\theta_X(t) = e^{tX},$$

dove e^{tX} è il solito esponenziale di matrici. Si verifica subito che θ_X è un sottogruppo a un parametro con $\theta'_X(0) = X$, per cui l'applicazione esponenziale di $GL(n, \mathbb{R})$ è l'usuale esponenziale di matrici. Lo stesso argomento lo si può applicare a $GL(V)$, dove V è un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita, usando come definizione di esponenziale di un endomorfismo $L \in \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ la

$$e^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k,$$

dove L^k indica la composizione di L con se stesso k volte.

Ora, se sul gruppo di Lie G mettiamo una connessione lineare, ci troviamo con due applicazioni esponenziali a disposizione: quella appena definita, e quella che viene dalle geodetiche. Vogliamo determinare delle condizioni per cui queste due applicazioni coincidano.

La prima richiesta naturale è che la connessione sia invariante a sinistra:

Definizione 5.4.3: Sia G un gruppo di Lie. Diremo che una connessione lineare ∇ su G è *invariante a sinistra* se
$$d(L_g)(\nabla_X Y) = \nabla_{d(L_g)(X)} d(L_g)(Y)$$
per ogni X, $Y \in \mathcal{T}(G)$ e $g \in G$.

Il seguente esercizio è elementare:

Esercizio 5.4.2. Dimostra che esiste una corrispondenza biunivoca fra le connessioni lineari invarianti a sinistra su un gruppo di Lie G e l'insieme delle applicazioni bilineari $\alpha\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, corrispondenza ottenuta associando alla connessione ∇ l'applicazione $\alpha_\nabla(X,Y) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}(e)$, dove per ogni $X \in \mathfrak{g}$ il campo $\tilde{X} \in \mathcal{T}(G)$ è l'unico campo invariante a sinistra tale che $\tilde{X}(e) = X$.

Corollario 5.4.2: *Sia ∇ una lineare connessione invariante a sinistra su un gruppo di Lie G, e $X \in \mathfrak{g}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\alpha_\nabla(X,X) = O$;
(ii) *la geodetica σ_X uscente da e tangente a X è un sottogruppo a un parametro di G.*

Dimostrazione: Essendo ∇ invariante a sinistra, da $\alpha_\nabla(X,X) = O$ otteniamo $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X} \equiv O$, dove $\tilde{X} \in \mathcal{T}(G)$ è il campo vettoriale invariante a sinistra associato a X. In particolare, quindi, la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e è una geodetica per ∇, e questa geodetica risulta essere un sottogruppo a un parametro grazie al Lemma 5.4.1.(i)

Viceversa, se $\sigma_X(t)$ è un sottogruppo a un parametro, il Lemma 5.4.1.(ii) ci dice che è la curva integrale di $\tilde{X}$ uscente da e; ma allora abbiamo $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X}(e) = O$, cioè $\alpha_\nabla(X,X) = O$. □

Di connessioni lineari che soddisfano le condizioni di questo corollario ce ne sono a bizzeffe; per esempio quelle ottenute prendendo $\alpha_\nabla(X,Y) = c[X,Y]$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Ma a noi interessa sapere quando la connessione di Levi-Civita (ottenuta partendo da una metrica invariante a sinistra) soddisfa questa condizione. Per enunciare in maniera pulita il risultato, introduciamo la seguente

Definizione 5.4.4: Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora l'applicazione *aggiunta* di $\mathfrak{g}$ è l'omomorfismo di algebre di Lie $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dato da $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$.

Proposizione 5.4.3: *Sia $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ una metrica invariante a sinistra su un gruppo di Lie G, e ∇ la connessione di Levi-Civita. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $\alpha_\nabla(X,Y) = \frac{1}{2}[X,Y]$;
(ii) $\mathrm{ad}(X)$ *è antisimmetrico per ogni* $X \in \mathfrak{g}$;
(iii) $\exp_e = \exp$, *cioè i semigruppi a un parametro sono tutte e sole le geodetiche di G uscenti da e.*

Dimostrazione: Il Teorema 4.4.4 ci dice che
$$\langle \alpha_\nabla(X,Y), Z \rangle = \frac{1}{2}\bigl[\langle [X,Y], Z\rangle + \langle \mathrm{ad}(Z)X, Y\rangle + \langle X, \mathrm{ad}(Z)(Y)\rangle\bigr], \tag{5.4.3}$$
per cui l'equivalenza fra (i) e (ii) è evidente.

Il Corollario 5.4.2 ci dice che (iii) vale se e solo se $\alpha_\nabla(X,X) = O$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Ora, (5.4.3) implica
$$\langle \alpha_\nabla(X,X), Z \rangle = \langle \mathrm{ad}(Z)X, X \rangle.$$
Quindi $\alpha_\nabla(X,X) = O$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ se e solo se $\langle \mathrm{ad}(Z)X, X\rangle = 0$ per ogni Z, $X \in \mathfrak{g}$, e questo accade se e solo se $\mathrm{ad}(Z)$ è antisimmetrico per ogni $Z \in \mathfrak{g}$. □

La cosa interessante è che tutto ciò è legato a quando una metrica invariante a sinistra è anche invariante a destra. Per dimostrarlo ci servono un paio di risultati generali sui gruppi di Lie, importanti anche indipendentemente.

Proposizione 5.4.4: *Sia $\psi: G \to H$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora $d\psi_e: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un omomorfismo delle corrispondenti algebre di Lie, e si ha*

$$\forall X \in \mathfrak{g} \qquad \psi\bigl(\exp(X)\bigr) = \exp\bigl(d\psi_e(X)\bigr). \tag{5.4.4}$$

Dimostrazione: Sia $\theta_X(t) = \exp(tX)$ il sottogruppo a un parametro in G tangente a $X \in \mathfrak{g}$. Allora $\psi \circ \theta_X$ è un sottogruppo a un parametro in H tangente a $d\psi_e(X)$, per cui $\psi\bigl(\theta_X(t)\bigr) = \exp\bigl(td\psi_e(X)\bigr)$, e (5.4.4) vale.

Inoltre, abbiamo $\psi \circ L_g = L_{\psi(g)} \circ \psi$ per ogni $g \in G$; quindi per ogni $X \in \mathfrak{g}$ abbiamo

$$d\psi_g\bigl(d(L_g)_e(X)\bigr) = d(L_{\psi(g)})_e\bigl(d\psi_e(X)\bigr).$$

Questo vuol dire che il campo $\tilde{X}$ invariante a sinistra che estende X è sempre ψ-correlato al campo invariante a sinistra che estende $d\psi_e(X)$. L'Esercizio 3.3.3 ci assicura allora che $d\psi_e$ è un omomorfismo di algebre di Lie. □

Proposizione 5.4.5: *Sia $U \subset G$ un intorno aperto dell'elemento neutro in un gruppo di Lie connesso G. Allora U genera tutto G, nel senso che ogni elemento di G si ottiene come prodotto di un numero finito di elementi di U.*

Dimostrazione: Notiamo prima di tutto che un sottogruppo aperto è anche chiuso. Infatti, se $H \subseteq G$ è un sottogruppo aperto, allora

$$G \setminus H = \bigcup_{g \notin H} gH$$

è aperto, per cui H è chiuso.

Ora, se U è un intorno aperto di e, allora il sottogruppo generato da U è

$$\langle U \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n,$$

dove U^n è l'insieme di tutti i possibili prodotti di n elementi di U. Quindi $\langle U \rangle$ è un sottogruppo aperto, e dunque chiuso, di G; essendo G connesso, dev'essere $\langle U \rangle = G$, come affermato. □

Definizione 5.4.5: Sia G un gruppo di Lie. Se $g \in G$, indichiamo con $C_g: G \to G$ il coniugio $C_g(x) = gxg^{-1}$, in modo che $C_g \circ C_h = C_{gh}$ per ogni g, $h \in G$. La *rappresentazione aggiunta* di G è l'omomorfismo $\mathrm{Ad}: G \to GL(\mathfrak{g})$ definito da $\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_e$.

Notiamo che la (5.4.4) implica che

$$C_g(\exp X) = \exp\bigl(\mathrm{Ad}(g)(X)\bigr). \tag{5.4.5}$$

Ci servirà il seguente

Esercizio 5.4.3. Dimostra che se $X \in \mathcal{T}(G)$ è un campo vettoriale invariante a sinistra su un gruppo di Lie G si ha $\theta_t \circ L_g = L_g \circ \theta_t$ per ogni $g \in G$, dove $\theta_t = \Theta(t, \cdot)$ è il flusso di X. (*Suggerimento:* ricorda l'Esercizio 3.3.4.)

Da questo otteniamo il

Lemma 5.4.6: *Sia G un gruppo di Lie, e $\mathrm{Ad}: G \to GL(\mathfrak{g})$ la rappresentazione aggiunta. Allora*

$$d(\mathrm{Ad})_e(X) = \mathrm{ad}(X)$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}$. In particolare, quindi,

$$\forall X \in \mathfrak{g} \qquad \mathrm{Ad}(\exp X) = e^{\mathrm{ad}(X)}. \tag{5.4.6}$$

Dimostrazione: Siccome $t \mapsto \exp(tX)$ è una curva in G tangente a X in e, abbiamo

$$d(\mathrm{Ad})_e(X)(Y) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp tX)(Y)\Big|_{t=0}$$

per ogni X, $Y \in \mathfrak{g}$. Indicando con $\tilde{Y} \in \mathcal{T}(G)$ l'estensione invariante a sinistra di Y, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp tX)(Y) &= d(C_{\exp(tX)})_e(Y) = d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)} \circ d(L_{\exp(tX)})_e(Y)\\ &= d(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)}\bigl(\tilde{Y}(\exp(tX))\bigr).\end{aligned}$$

Ora, per ogni $g \in G$ si ha

$$R_{\exp(tX)}(g) = g\exp(tX) = L_g\bigl(\exp(tX)\bigr) = L_g\bigl(\theta_t(e)\bigr) = \theta_t\bigl(L_g(e)\bigr) = \theta_t(g),$$

dove θ_t è il flusso di $\tilde{X}$, l'estensione invariante a sinistra di X, e abbiamo usato l'Esercizio 5.4.3. Ma allora questo vuol dire che $R_{\exp(-tX)} = \theta_{-t}$, per cui

$$\mathrm{Ad}(\exp tX)(Y) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(e)}(\tilde{Y}),$$

e la Proposizione 3.3.6 ci permette di concludere che

$$d(\mathrm{Ad})_e(X)(Y) = \frac{d}{dt} d(\theta_{-t})_{\theta_t(e)}(\tilde{Y})\Big|_{t=0} = \mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{Y}(e) = [X,Y] = \mathrm{ad}(X)(Y),$$

come voluto. Infine, (5.4.6) segue da (5.4.4) e dall'Esempio 5.4.4. □

Siamo ora in grado di dimostrare il

Teorema 5.4.7: *Sia G un gruppo di Lie connesso, e $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ una metrica Riemanniana invariante a sinistra su G. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *è anche invariante a destra;*
(ii) $\mathrm{Ad}(g)$ *è un'isometria di $\mathfrak{g}$ per ogni $g \in G$;*
(iii) $\mathrm{ad}(X)$ *è antisimmetrica per ogni $X \in \mathfrak{g}$;*
(iv) $\exp_e = \exp$, *cioè i semigruppi a un parametro sono tutte e sole le geodetiche di G uscenti da e.*

Dimostrazione: La metrica $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ è invariante a destra se e solo se $\langle d(R_g)_h(v), d(R_g)_h(w)\rangle_{hg} = \langle v,w\rangle_h$ per ogni g, $h \in G$ e v, $w \in T_gG$. Usando l'invarianza a sinistra della metrica, questo si riduce a dimostrare che

$$\langle d(L_{hg}^{-1} \circ R_g \circ L_h)_e(X), d(L_{hg}^{-1} \circ R_g \circ L_h)_e(Y)\rangle_e = \langle X,Y\rangle_e$$

per ogni h, $g \in G$ e X, $Y \in \mathfrak{g}$. Ma $L_{hg}^{-1} \circ R_g \circ L_h = C_{g^{-1}}$, e quindi $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ è invariante a destra se e solo se ogni $\mathrm{Ad}(g)$ è un'isometria di $\mathfrak{g}$.

Supponiamo ora che (ii) valga. Per il Lemma 5.4.6, allora, $e^{\mathrm{ad}(tX)}$ è un'isometria per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$. Derivando

$$\langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e = \langle Y,Z\rangle_e$$

rispetto a t e calcolando in $t = 0$ otteniamo

$$\langle \mathrm{ad}(X)(Y), Z\rangle_e + \langle Y, \mathrm{ad}(X)(Z)\rangle_e = 0$$

per ogni X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$, e quindi (iii) vale.

Viceversa, supponiamo che (iii) valga. Siccome si verifica subito che

$$\frac{d}{dt}e^{\mathrm{ad}(tX)} = \mathrm{ad}(X) \circ e^{\mathrm{ad}(tX)},$$

troviamo

$$\frac{d}{dt}\langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e = \langle \mathrm{ad}(X) \circ e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e + \langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), \mathrm{ad}(X) \circ e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e \equiv 0.$$

Dunque $\langle e^{\mathrm{ad}(tX)}(Y), e^{\mathrm{ad}(tX)}(Z)\rangle_e$ è una funzione costante, e calcolando per $t = 0$ e per $t = 1$ vediamo che $e^{\mathrm{ad}(X)}$ è un'isometria per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Ma allora $\mathrm{Ad}(\exp X)$ è un'isometria per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Ora, dalla definizione si ricava subito che $d\exp_O = \mathrm{id}$; quindi l'immagine dell'esponenziale contiene un intorno U dell'elemento neutro e, e $\mathrm{Ad}(g)$ è un'isometria per ogni $g \in U$. Siccome la composizione di isometrie è un'isometria, la Proposizione 5.4.5 ci assicura allora che $\mathrm{Ad}(g)$ è un'isometria per ogni $g \in G$, e abbiamo dimostrato (ii).

Infine, l'equivalenza fra (iii) e (iv) è già stata dimostrata nella Proposizione 5.4.3. □

Esempio 5.4.5. Non è difficile verificare che la metrica euclidea su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, cioè quella dell'Esempio 4.4.6, si può esprimere scrivendo

$$\forall A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \qquad \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A).$$

Ora, se $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle [X,A], B\rangle &= \mathrm{tr}(B^T XA) - \mathrm{tr}(B^T AX), \\ \langle A, [X,B]\rangle &= \mathrm{tr}(B^T X^T A) - \mathrm{tr}(X^T B^T A) = \mathrm{tr}(B^T X^T A) - \mathrm{tr}(B^T A X^T), \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$ per ogni C, $D \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Quindi in generale $\mathrm{ad}(X)$ non è antisimmetrico rispetto alla metrica euclidea, per cui i sottogruppi a un parametro visti nell'Esempio 5.4.4 non sono geodetiche per la connessione di Levi-Civita su $GL(n,\mathbb{R})$ calcolata nell'Esempio 4.4.6.

Esempio 5.4.6. Nell'Esercizio 3.3.9 abbiamo visto che l'algebra di Lie del gruppo $SO(n)$ è l'algebra $\mathfrak{so}(n)$ delle matrici antisimmetriche. Ma allora (5.4.7) ci dice che $\mathrm{ad}(X)$ è antisimmetrica rispetto al prodotto scalare dell'esempio precedente per ogni $X \in \mathfrak{so}(n)$. Quindi la metrica dell'Esempio 4.4.6 ristretta a $SO(n)$ è bi-invariante, e i sottogruppi a un parametro sono geodetiche per la corrispondente connessione di Levi-Civita. $\square$