Capitolo 4

Metriche Riemanniane

4.1 Definizioni

Introduciamo ora la vera protagonista di questo corso.

Definizione 4.1.1: Una *metrica Riemanniana* su una varietà M è un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ *simmetrico* (cioè tale che $g_p(w,v) = g_p(v,w)$ per ogni v, $w \in T_pM$ e $p \in M$) e *definito positivo* (cioè $g(v,v) > 0$ per ogni $v \neq O$). La coppia (M,g) è detta *varietà Riemanniana*. Spesso useremo anche la notazione $\langle v,w \rangle_p$ al posto di $g_p(v,w)$, e indicheremo con $\| \cdot \|_p$ la norma su T_pM indotta dal prodotto scalare g_p.

In altre parole, una metrica Riemanniana associa a ogni punto $p \in M$ un prodotto scalare definito positivo $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ che dipende in modo C^∞ dal punto p.

Osservazione 4.1.1. Ci sono alcune situazioni (per esempio in relatività) in cui è utile studiare varietà equipaggiate con un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simmetrico *non degenere* (cioè tale che $g_p(v,w) = 0$ per ogni $w \in T_pM$ se e solo se $v = O_p$); un tale tensore g è spesso detto *metrica pseudo-Riemanniana*. Diversi dei risultati di questo capitolo (per esempio la costruzione della connessione di Levi-Civita nel paragrafo 4) sono validi anche in questa situazione più generale; indicheremo esplicitamente i casi più significativi.

Esercizio 4.1.1. Sia M una varietà, e supponiamo di avere per ogni $p \in M$ un prodotto scalare definito positivo $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Dimostra che g è una metrica Riemanniana se e solo se $p \mapsto g_p\big(X(p), Y(p)\big)$ è di classe C^∞ per ogni X, $Y \in \mathcal{T}(M)$.

Vediamo come si esprime una metrica Riemanniana (o, più in generale, un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ simmetrico) in coordinate locali. Fissata una carta locale (U,φ), indichiamo con $(x^1,\ldots,x^n)$ le corrispondenti coordinate locali, e con $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ il corrispondente riferimento locale di TM. Allora possiamo definire delle funzioni $g_{hk} \in C^\infty(U)$ ponendo $g_{hk} = g(\partial_h,\partial_k)$; e chiaramente abbiamo

$$g = \sum_{h,k=1}^n g_{hk}\, dx^h \otimes dx^k. \tag{4.1.1}$$

Inoltre, la matrice simmetrica (g_{hk}) è non degenere se e solo se g è non degenere, ed è definita positiva se e solo se g è definita positiva.

Osservazione 4.1.2. D'ora in poi useremo la *convenzione di Einstein* sugli indici ripetuti: se lo stesso indice appare due volte in una formula, una volta in basso e una volta in alto, supporremo sottintesa una sommatoria su tutti i possibili valori di quell'indice. Per esempio, la (4.1.1) verrà scritta

$$g = g_{hk}\, dx^h \otimes dx^k,$$

sottintendendo la sommatoria su h e k che variano da 1 a n. Vale la pena avvertire che in alcuni testi si trova scritto $dx^h\, dx^k$ invece di $dx^h \otimes dx^k$, e in particolare $(dx^j)^2$ invece di $dx^j \otimes dx^j$. Infine, la matrice inversa della matrice (g_{hk}) sarà indicata con (g^{hk}), in modo da avere

$$g_{hj}g^{jk} = g^{kj}g_{jh} = \delta_h^k,$$

dove δ_h^k è, come sempre, il delta di Kronecker.

Esempio 4.1.1. $\mathbb{R}^n$ *con la metrica euclidea.* Identificando come al solito $T_p\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, possiamo mettere su ciascuno spazio tangente il prodotto scalare canonico. In questo modo otteniamo una metrica Riemanniana su $\mathbb{R}^n$, detta *metrica euclidea* o *metrica piatta* su $\mathbb{R}^n$, data da

$$g_0 = \delta_{hk}\, dx^h \otimes dx^k = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n.$$

Esempio 4.1.2. *La metrica prodotto.* Siano (M_1, g_1) e (M_2, g_2) due varietà Riemanniane. Allora sulla varietà $M_1 \times M_2$ possiamo mettere la *metrica prodotto* $g_1 + g_2$ definita in questo modo: siccome per ogni $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ lo spazio tangente $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$ è isomorfo a $T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$, ogni elemento di $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$ è della forma $v = (v_1, v_2)$, con $v_j \in T_{p_j}M_j$, per cui poniamo

$$\forall v, w \in T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \qquad (g_1 + g_2)_{(p_1,p_2)}(v, w) = (g_1)_{p_1}(v_1, w_1) + (g_2)_{p_2}(v_2, w_2).$$

Si verifica subito (esercizio) che $g_1 + g_2$ è una metrica Riemanniana.

Usando le partizioni dell'unità e la metrica piatta è facile dimostrare l'esistenza di metriche Riemanniane su qualsiasi varietà:

Proposizione 4.1.1: *Ogni varietà M (di Hausdorff a base numerabile) ammette una metrica Riemanniana.*

Dimostrazione: Sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M. Su ciascun aperto U_α introduciamo la metrica piatta g^α indotta dal sistema di coordinate: se $p \in U_\alpha$, e $v = v^j \partial_{j,\alpha}$ e $w = w^j \partial_{j,\alpha}$ è la scrittura in coordinate locali di due vettori $v, w \in T_pM$, allora poniamo $g^\alpha_p(v, w) = \sum_j v^j w^j$ (in altre parole, la matrice (g^α_{hk}) è la matrice identica). Definiamo allora un campo tensoriale $g \in \mathcal{T}_2(M)$ con

$$\forall p \in M \qquad g_p = \sum_\alpha \rho_\alpha(p) g^\alpha_p,$$

dove in ciascun punto $p \in M$ solo un numero finito di addendi sono diversi da zero. È facile verificare (esercizio) che questa formula definisce una metrica Riemanniana su M, in quanto la somma di tensori simmetrici definiti positivi è ancora un campo tensoriale simmetrico definito positivo. □

Osservazione 4.1.3. Sia (g_{hk}) la matrice che rappresenta una metrica Riemanniana g rispetto alla carta locale (U, φ), e $(\tilde{g}_{ij})$ la matrice che rappresenta g rispetto a un'altra carta locale $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$. Ricordando la (2.4.2) e la formula che mostra come cambia la matrice che rappresenta un prodotto scalare cambiando base otteniamo

$$(\tilde{g}_{ij}) = \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)^T \cdot (g_{hk}) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)$$

in $U \cap \tilde{U}$, dove il $\cdot$ indica il prodotto di matrici. In altre parole abbiamo

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^h}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}\, g_{hk}.$$

In particolare,

$$\det(\tilde{g}_{ij}) = \left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)\right]^2 \det(g_{hk}). \tag{4.1.2}$$

Osservazione 4.1.4. Sia (U, φ) una carta locale in una varietà Riemanniana (M, g). Se applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt al riferimento locale $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ otteniamo un riferimento locale ortonormale $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Attenzione: di solito però *non* è possibile trovare una carta locale (U, φ) tale che il riferimento $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ sia ortonormale in U. Infatti, come vedremo nel paragrafo 6.1, questo è equivalente a richiedere che la varietà Riemanniana sia piatta in U.

Descriviamo ora alcune costruzioni standard che si possono effettuare usando una metrica Riemanniana. Cominciamo con la

Proposizione 4.1.2: *Sia (M,g) una varietà Riemanniana orientabile, e fissiamo un'orientazione. Allora esiste un'unica n-forma $\nu_g \in A^n(M)$ mai nulla tale che $\nu_g(E_1,\ldots,E_n) = 1$ per ogni $p \in M$ e ogni base ortonormale positiva $\{E_1,\ldots,E_n\}$ di T_pM.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato, e indichiamo con (g^α_{ij}) la matrice che rappresenta g nelle coordinate di φ_α. Sia poi $\mathcal{B} = \{E_1,\ldots,E_n\}$ un riferimento locale ortonormale positivo di TM sopra U; se poniamo $dx^h_\alpha(E_k) = e^h_k$ allora abbiamo $E_k = e^h_k\partial_h$, e quindi $\det(e^h_k) > 0$ (perché $\mathcal{B}$ è positivo), e $g^\alpha_{ij}e^i_h e^j_k = \delta_{hk}$ (perché $\mathcal{B}$ è ortonormale), per cui

$$\sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}\,\det(e^h_k) = 1. \tag{4.1.3}$$

Supponiamo che esista una $\nu \in A^n(M)$ che soddisfa le ipotesi. Per ogni indice α esiste una $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ tale che $\nu|_{U_\alpha} = f_\alpha\, dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha$. Ma allora

$$1 = \nu(E_1,\ldots,E_n) = f_\alpha \det(e^h_k) = \frac{f_\alpha}{\sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}},$$

per cui necessariamente $f_\alpha = \sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}$, e ν è unica.

Viceversa, poniamo

$$\nu_g|_{U_\alpha} = \sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}\, dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha.$$

Questa formula definisce una n-forma globale: infatti su $U_\alpha \cap U_\beta$ (4.1.2) dà

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(g^\beta_{ij})}\, dx^1_\beta \wedge \cdots \wedge dx^n_\beta &= \det\left(\frac{\partial x^h_\alpha}{\partial x^k_\beta}\right)\sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}\det\left(\frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^h_\alpha}\right) dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha \\ &= \sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}\, dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha.\end{aligned}$$

Chiaramente, ν_g non si annulla mai. Infine, ν_g è come richiesto: infatti, se $\mathcal{B} = \{E_1,\ldots,E_n\}$ è una base ortonormale positiva di T_pM con $p \in U_\alpha$, (4.1.3) implica

$$\nu_g(E_1,\ldots,E_n) = \sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}\det\bigl(dx^h(E_k)\bigr) = \sqrt{\det(g^\alpha_{ij})}\det(e^h_k) = 1.$$

□

Definizione 4.1.2: Sia (M,g) una varietà Riemanniana orientabile. La n-forma $\nu_g \in A^n(M)$ è detta *elemento di volume Riemanniano* di M.

Proseguiamo con altre costruzioni. Un prodotto scalare non degenere su uno spazio vettoriale V permette di identificare V col suo duale V^*. Analogamente, su una varietà Riemanniana abbiamo un isomorfismo naturale $^\flat\colon TM \to T^*M$ definito in questo modo

$$\forall v \in T_pM \qquad\qquad v^\flat = g_p(\cdot,v) \in T^*_pM.$$

In coordinate locali, se $v = v^i\partial_i$ e $g = (g_{ij})$ allora

$$v^\flat = g_{ij}v^i\, dx^j,$$

cioè $v^\flat = \omega_j\, dx^j$ con $\omega_j = g_{ij}v^i$.

La mappa inversa sarà denotata da $^\#\colon T^*M \to TM$; se $\omega = \omega_i\, dx^i$ allora

$$\omega^\# = g^{ij}\omega_i\,\partial_j,$$

cioè $\omega^\# = v^j\partial_j$ con $v^j = g^{ij}\omega_i$.

Osservazione 4.1.5. Il motivo della notazione musicale è che $\flat$ abbassa gli indici mentre $^\#$ li alza.

Definizione 4.1.3: Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e $f \in C^\infty(M)$. Allora il *gradiente* di f è il campo vettoriale $\operatorname{grad} f = (df)^\# \in \mathcal{T}(M)$.

In coordinate locali,

$$\operatorname{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \partial_i,$$

per cui su $\mathbb{R}^n$ con la metrica piatta recuperiamo il gradiente usuale.

Definizione 4.1.4: Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà Riemanniana (M, g). Allora il *rotore* di X è la 2-forma differenziale $\operatorname{rot} X = dX^\flat$.

In particolare abbiamo

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = d\big((df)^\#\big)^\flat = d(df) = O.$$

In coordinate locali, se $X = X^k \partial_k$ allora

$$\operatorname{rot} X = \frac{\partial(g_{ik} X^i)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^k = \sum_{1 \le j < k \le n} \left[\frac{\partial(g_{ik} X^i)}{\partial x^j} - \frac{\partial(g_{ij} X^j)}{\partial x^k} \right] dx^j \wedge dx^k.$$

Osservazione 4.1.6. Su $\mathbb{R}^3$, il fibrato $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ è un fibrato banale di rango 3, per cui è isomorfo a $T\mathbb{R}^3$, che è anch'esso un fibrato banale di rango 3. Per questo motivo nell'Analisi Matematica usuale il rotore di un campo vettoriale (calcolato rispetto alla metrica piatta di $\mathbb{R}^3$) viene presentato come un campo vettoriale e non come una 2-forma, per lo stesso motivo per cui il prodotto estero di due vettori in R^3 viene presentato come un vettore di $\mathbb{R}^3$ (il prodotto vettore: confronta l'Esercizio 1.3.19).

Come prevedibile, le applicazioni che conservano una metrica Riemanniana hanno un nome particolare.

Definizione 4.1.5: Sia $H: (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ un'applicazione C^∞ fra due varietà Riemanniane della stessa dimensione. Diremo che H è un'*isometria in* $p \in M_1$ se per ogni v, $w \in T_p M_1$ si ha

$$\tilde{g}_{H(p)}\big(dH_p(v), dH_p(w)\big) = g_p(v, w).$$

Se H è un'isometria in p, il differenziale di H in p è invertibile, e quindi H è un diffeomorfismo di un intorno di p con un intorno di $H(p)$. Diremo che H è un'*isometria locale* in $p \in M$ se p ha un intorno U tale che $H|_U$ sia un'isometria in ogni punto di U; e che è un'*isometria locale* se lo è in ogni punto di M. Infine, diremo che H è un'*isometria* se è un diffeomorfismo globale e un'isometria in ogni punto di M. Data una varietà Riemanniana (M, g), indicheremo con $\operatorname{Iso}(M)$ il gruppo di tutte le isometrie di M con se stessa.

Definizione 4.1.6: Diremo che la varietà Riemanniana (M, g) è *localmente isometrica* alla varietà Riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{g})$ se per ogni $p \in M$ esiste un'isometria di un intorno di p in M con un aperto di $\tilde{M}$. Infine, diremo che (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ sono *isometriche* se esiste un'isometria globale fra (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

Esercizio 4.1.2. Dimostra che un'applicazione $H: (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ di classe C^∞ fra varietà Riemanniane è un'isometria locale se e solo se è un'isometria in ogni punto di M.

Esercizio 4.1.3. Costruisci un esempio di un'isometria locale che non sia un'isometria.

Più in generale, un'immersione in una varietà Riemanniana induce una metrica Riemanniana anche nella varietà di partenza.

Definizione 4.1.7: Sia $F: M \to N$ un'immersione, e g una metrica Riemanniana su N. Definiamo per ogni $p \in M$ un prodotto scalare $(F^*g)_p$ su $T_p M$ ponendo

$$\forall v, w \in T_p M \qquad (F^*g)_p(v, w) = g_{F(p)}\big(dF_p(v), dF_p(w)\big).$$

È facile verificare (esercizio) che F^*g è una metrica Riemanniana su M, detta *metrica indotta* da g tramite F, o *metrica pullback*.

ESEMPIO 4.1.3. Se $\iota\colon M \to N$ è una sottovarietà di una varietà Riemanniana (N, g), la metrica indotta $\iota^* g$ verrà a volte indicata con $g|_S$. Dunque ogni sottovarietà di una varietà Riemanniana è a sua volta una varietà Riemanniana con la metrica indotta; per esempio, questo vale per le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ considerato con la metrica piatta.

Abbiamo visto (Teorema 2.5.6) che ogni varietà può essere realizzata come sottovarietà chiusa di un qualche $\mathbb{R}^N$, per N abbastanza grande, e quindi eredita una metrica Riemanniana indotta dalla metrica piatta di $\mathbb{R}^N$. Viene allora naturale chiedersi se in questo modo è possibile ottenere tutte le varietà Riemanniane. La risposta, positiva, è il famoso Teorema di Nash:

Teorema 4.1.3: (Nash, 1956) *Ogni varietà Riemanniana ammette un embedding isometrico in $\mathbb{R}^N$, considerato con la metrica piatta, per N abbastanza grande.*

ESEMPIO 4.1.4. Sia $\pi\colon \tilde{M} \to M$ un rivestimento liscio, e supponiamo di avere una metrica Riemanniana g su M. Un rivestimento liscio è, in particolare, un diffeomorfismo locale, e quindi un tipo molto speciale di immersione; possiamo quindi equipaggiare $\tilde{M}$ con la metrica indotta $\pi^* g$. È facile (esercizio) verificare che $\pi^* g$ è l'unica metrica Riemanniana su $\tilde{M}$ che rende π un'isometria locale.

ESEMPIO 4.1.5. Sia $\pi\colon \tilde{M} \to M$ di nuovo un rivestimento liscio, ma supponiamo stavolta di avere una metrica Riemanniana $\tilde{g}$ su $\tilde{M}$. Non è detto che esista una metrica Riemanniana g su M che rende π un'isometria locale. Infatti, supponiamo che g esista, e sia $F\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ un automorfismo del rivestimento, cioè un'applicazione continua tale che $\pi \circ F = \pi$; nota che F è automaticamente C^∞ (perché?). Allora per ogni $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e ogni $v,\, w \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ si deve avere

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\tilde{p}}(v, w) &= g_{\pi(\tilde{p})}\bigl(d\pi_{\tilde{p}}(v), d\pi_{\tilde{p}}(w)\bigr) = g_{\pi(F(\tilde{p}))}\bigl(d\pi_{F(\tilde{p})}(dF_{\tilde{p}}(v)), d\pi_{F(\tilde{p})}(dF_{\tilde{p}}(w))\bigr)\\ &= \tilde{g}_{F(\tilde{p})}\bigl(dF_{\tilde{p}}(v), dF_{\tilde{p}}(w)\bigr),\end{aligned}$$

cioè F dev'essere un'isometria per $\tilde{g}$. Viceversa, supponiamo che ogni automorfismo del rivestimento sia un'isometria, e che il gruppo degli automorfismi del rivestimento agisca in maniera transitiva sulle fibre (ipotesi quest'ultima equivalente a richiedere che il rivestimento sia *normale*, cioè tale che $\pi_*\bigl(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{p})\bigr)$ sia un sottogruppo normale di $\pi_1\bigl(M, \pi(\tilde{p})\bigr)$ per un qualsiasi $\tilde{p} \in \tilde{M}$); allora non è difficile dimostrare (esercizio) che esiste un'unica metrica Riemanniana g su M per cui π risulta essere un'isometria locale: è sufficiente per ogni $p \in M$ e $v,\, w \in T_pM$ porre

$$g_p(v, w) = \tilde{g}_{\tilde{p}}(\tilde{v}, \tilde{w}),$$

dove $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $\tilde{v},\, \tilde{w} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ sono tali che $\pi(\tilde{p}) = p$, $d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{v}) = v$ e $d\pi_{\tilde{p}}(\tilde{w}) = w$.

Usando la nozione di metrica indotta possiamo esprimere in maniera concisa quando un'immersione conserva la metrica Riemanniana:

Definizione 4.1.8: Un'immersione (embedding) $F\colon (M, g^M) \to (N, g^N)$ fra varietà Riemanniane è un'*immersione* (*embedding*) *isometrica* se $F^* g^N = g^M$, dove $F^* g^N$ è la metrica indotta su M appena definita.

Esercizio 4.1.4. Costruisci due varietà Riemanniane (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ tali che (M, g) è localmente isometrica a $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ma $(\tilde{M}, \tilde{g})$ non è localmente isometrica a (M, g).

Concludiamo questo paragrafo definendo, più in generale, la nozione di metrica Riemanniana su un fibrato vettoriale.

Definizione 4.1.9: Una *metrica lungo le fibre* su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$ è l'assegnazione per ogni punto $p \in M$ di un prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_p\colon E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ tale che la funzione $p \mapsto \langle \sigma(p), \tau(p) \rangle_p$ sia di classe C^∞ per ogni coppia di sezioni $\sigma,\, \tau \in \mathcal{E}(M)$.

Una volta data una metrica Riemanniana su M otteniamo automaticamente metriche lungo le fibre su tutti i fibrati tensoriali $T^h_k M$:

Proposizione 4.1.4: *Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e $h,\, k \in \mathbb{N}$. Allora esiste un'unica metrica lungo le fibre di $T^h_k M$ tale che se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ è un riferimento locale ortonormale per TM e $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ è il suo riferimento duale, allora $\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_h} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_k}\}$ forma un riferimento locale ortonormale per $T^h_k M$.*

Dimostrazione: Sia (g_{ij}) la matrice che rappresenta g in una qualche carta locale (U,φ), e prendiamo due elementi $F = F^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_k}\,\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_h}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_k}$, $G = G^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_k}\,\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_h}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_k}\in T^h_k U$. Allora ponendo

$$\langle F,G\rangle = g^{j_1s_1}\cdots g^{j_ks_k}g_{i_1r_1}\cdots g_{i_hr_h}F^{i_1\ldots i_h}_{j_1\ldots j_k}G^{r_1\ldots r_h}_{s_1\ldots s_k}$$

è facile verificare (esercizio) che otteniamo una metrica lungo le fibre che soddisfa le condizioni richieste. Siccome data una base esiste un unico prodotto scalare rispetto a cui detta base è ortonormale, la metrica così ottenuta è l'unica possibile. □

Esercizio 4.1.5. Dimostra che la metrica lungo le fibre così ottenuta coincide con quella che si otterrebbe applicando la Proposizione 1.2.1 alla metrica Riemanniana data su ciascun spazio tangente.

In particolare, data una metrica Riemanniana su M otteniamo una metrica lungo le fibre di T^*M, e la Proposizione 1.2.1.(iv) ci dice che le applicazioni bemolle e diesis sono allora delle isometrie rispetto a queste metriche. Possiamo verificarlo anche in coordinate locali: infatti,

$$\langle\omega^\#,\eta^\#\rangle = g_{hk}g^{ih}\omega_i g^{kj}\eta_j = g^{ij}\omega_i\eta_j = \langle\omega,\eta\rangle,$$

e analogamente si vede che

$$\langle v^\flat, w^\flat\rangle = \langle v,w\rangle.$$

4.2 Esempi

In questo paragrafo descriveremo alcuni esempi importanti di varietà Riemanniane.

Esempio 4.2.1. *La sfera.* Sia S^n_R la sfera di raggio $R>0$ e centro l'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$. La metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$ è detta *metrica sferica.* Vogliamo calcolare i coefficienti g_{ij} della metrica sferica rispetto alle coordinate sferiche introdotte nell'Esempio 2.1.11. Il riferimento locale di $T_pS^n_R$ indotto dalle coordinate sferiche è composto dai campi vettoriali locali

$$\frac{\partial}{\partial\theta^j} = R\sin\theta^{j+1}\cdots\sin\theta^n\left[\cos\theta^j\sum_{l=0}^{j-1}\cos\theta^l\sin\theta^{l+1}\cdots\sin\theta^{j-1}\frac{\partial}{\partial x^{l+1}} - \sin\theta^j\frac{\partial}{\partial x^{j+1}}\right],$$

per $j=1,\ldots,n$, dove $(x^1,\ldots,x^{n+1})$ sono le coordinate di $\mathbb{R}^{n+1}$, e dove abbiamo posto per convenzione $\theta^0\equiv 0$. Quindi otteniamo

$$g_{ij} = \begin{cases} R^2(\sin\theta^{i+1}\cdots\sin\theta^n)^2 & \text{se } i=j,\\ 0 & \text{se } i\neq j;\end{cases}$$

in particolare, la matrice (g_{ij}) è diagonale.

Esempio 4.2.2. Sia $\pi\colon S^n\to\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il rivestimento universale dello spazio proiettivo. Allora combinando gli Esempi 4.1.4 e 4.2.1 otteniamo una metrica Riemanniana sullo spazio proiettivo.

Una caratteristica interessante della sfera è che è localmente conformemente piatta (anche se, come vedremo, non è affatto piatta).

Definizione 4.2.1: Due metriche Riemanniane g_1 e g_2 su una varietà M sono dette *conformi* se esiste una funzione $f\in C^\infty(M)$ sempre positiva tale che $g_2 = fg_1$. Due varietà Riemanniane (M_1,g_1) e (M_2,g_2) sono dette *conformemente equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $F\colon M_1\to M_2$, detto *equivalenza conforme*, tale che F^*g_2 sia conforme a g_1. Diremo che (M_1,g_1) è *localmente conforme* a (M_2,g_2) se per ogni $p\in M_1$ esistono un intorno $U\subseteq M_1$ di p e un diffeomorfismo con l'immagine $F\colon U\to M_2$ tale che $F^*g_2|_{F(U)}$ sia conforme a $g_1|_U$. Infine, diremo che (M,g) è *localmente conformemente piatta* se è localmente conforme a $\mathbb{R}^n$ con la metrica piatta, dove $n=\dim M$.

Proposizione 4.2.1: *S^n_R è localmente conformemente piatta.*

Dimostrazione: Sia $N = (0, \dots, 0, R) \in S^n_R$ il polo nord, e indichiamo con $\varphi_N: S^n_R \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la proiezione stereografica dal polo nord descritta nell'Esempio 2.1.10; vogliamo dimostrare che φ_N è un'equivalenza conforme.

Indichiamo con g_R la metrica Riemanniana su S^n_R, e con g_0 la metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$; basta far vedere che $(\varphi_N^{-1})^* g_R$ e g_0 sono conformi. Preso $x \in \mathbb{R}^n$ e $v = v^j \partial_j \in T_x\mathbb{R}^n$ dobbiamo calcolare

$$(\varphi_N^{-1})^* g_R(v, v) = g_R\big(d(\varphi_N^{-1})_x(v), d(\varphi_N^{-1})_x(v)\big) = \big\|d(\varphi_N^{-1})_x(v)\big\|^2 .$$

Ora,

$$d(\varphi_N^{-1})_x(v) = v^j \frac{\partial(\varphi_N^{-1})^h}{\partial x^j} \partial_h = \frac{2R^2}{\|x\|^2 + R^2}\, v - \frac{4R^2 \langle v, x\rangle}{(\|x\|^2 + R^2)^2} (x^h \partial_h - R\partial_{n+1});$$

quindi

$$(\varphi_N^{-1})^* g_R(v, v) = \frac{4R^4}{(\|x\|^2 + R^2)^2} \|v\|^2,$$

cioè

$$(\varphi_N^{-1})^* g_R = \frac{4R^4}{(\|x\|^2 + R^2)^2}\, g_0,$$

per cui $(\varphi_N^{-1})^* g_R$ è conforme alla metrica euclidea, come voluto. Infine, usando la proiezione stereografica rispetto al polo sud $S = -N$ si conclude la dimostrazione che S^n_R è localmente conformemente piatta. $\square$

Esempio 4.2.3. *Lo spazio iperbolico.* Introduciamo ora un altro esempio importante di varietà Riemanniana, in tre incarnazioni diverse.

(a) *L'iperboloide.* Sia $U^n_R = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^{n+1})^2 - \|x'\|^2 = R^2, x^{n+1} > 0\}$ la falda superiore dell'iperboloide ellittico, dove $x' = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Su U^n_R introduciamo il campo tensoriale simmetrico non degenere

$$g^1_R = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n - dx^{n+1} \otimes dx^{n+1};$$

dimostreremo fra un attimo che g^1_R è effettivamente definita positiva su TU^n_R, per cui è effettivamente una metrica Riemanniana.

(b) *La palla di Poincaré.* Sia $B^n_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$ la palla aperta di raggio R in $\mathbb{R}^n$. Su B^n_R poniamo la metrica

$$g^2_R = \frac{4R^4}{(R^2 - \|x\|^2)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n).$$

(c) *Il semispazio superiore di Poincaré.* Sia $H^n_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ il semispazio superiore in $\mathbb{R}^n$. Su H^n_R poniamo la metrica

$$g^3_R = \frac{R^2}{(x^n)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n).$$

Le ultime due metriche sono chiaramente conformi alla metrica euclidea, per cui B^n_R e H^n_R sono localmente conformemente piatte. In realtà questo vale anche per U^n_R, in quanto

Proposizione 4.2.2: *Le varietà Riemanniane (U^n_R, g^1_R), (B^n_R, g^2_R) e (H^n_R, g^3_R) sono isometriche.*

Dimostrazione: Cominciamo costruendo un'isometria $F: U^n_R \to B^n_R$. Dato $S = (0, \dots, 0, -R) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $x \in U^n_R$, sia $F(x) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il punto d'intersezione fra B^n_R e la retta da S a x. Si verifica subito che

$$F(x) = \frac{R}{R + x^{n+1}}\, x' \in B^n_R,$$

e che

$$F^{-1}(p) = \left(\frac{2R^2 p}{R^2 - \|p\|^2}, R\, \frac{R^2 + \|p\|^2}{R^2 - \|p\|^2} \right).$$

Vogliamo dimostrare che $F^*g^2_R = g^1_R$. Per far ciò ricordiamo (Proposizione 2.5.5) che $v \in T_xU^n_R$ se e solo se $x^{n+1}v^{n+1} = \langle x', v'\rangle$; inoltre,

$$dF_x(v) = \frac{R}{R + x^{n+1}} \left(v' - \frac{v^{n+1}}{R + x^{n+1}}\, x' \right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} F^*g^2_R(v,v) &= g^2_R\big(dF_x(v), dF_x(v)\big) = \frac{4R^4}{\big(R^2 - \|F(x)\|^2\big)^2}\, \|dF_x(v)\|^2 \\ &= \frac{4}{\Big(1 - \frac{\|x'\|^2}{(R+x^{n+1})^2}\Big)^2} \frac{R^2}{(R + x^{n+1})^2} \left\| v' - \frac{v^{n+1}}{R + x^{n+1}}\, x' \right\|^2 \\ &= \|v'\|^2 - \frac{2v^{n+1}}{R + x^{n+1}} \langle x', v'\rangle + \frac{|v^{n+1}|^2}{(R + x^{n+1})^2} \|x'\|^2 \\ &= \|v'\|^2 - |v^{n+1}|^2 = g^1_R(v,v), \end{aligned}$$

come voluto.

Costruiamo ora un diffeomorfismo $G\colon B^n_R \to H^n_R$ imitando la trasformata di Cayley di una variabile complessa:

$$G(p) = \left(\frac{2R^2 p'}{\|p'\|^2 + (p^n - R)^2}, R\, \frac{R^2 - \|p'\|^2 - |p^n|^2}{\|p'\|^2 + (p^n - R)^2} \right),$$

dove stavolta $p' = (p^1, \ldots, p^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. L'inversa è data da

$$G^{-1}(q) = \left(\frac{2R^2 q'}{\|q'\|^2 + (q^n + R)^2}, R\, \frac{\|q'\|^2 + |q^n|^2 - R^2}{\|q'\|^2 + (q^n + R)^2} \right),$$

e un conto analogo al precedente mostra che $G^*g^3_R = g^2_R$. □

Definizione 4.2.2: Una qualunque varietà Riemanniana isometrica a una delle tre varietà Riemanniane della proposizione precedente è detta *spazio iperbolico* di dimensione n.

Vedremo in seguito (nel paragrafo 6.4) che $\mathbb{R}^n$ con la metrica piatta, le sfere e gli spazi iperbolici sono le uniche (a meno di isometrie) varietà Riemanniane semplicemente connesse di curvatura sezionale costante. Per farlo, ci servirà il seguente

Esempio 4.2.4. Gli elementi del gruppo ortogonale $O(n+1)$ sono ovviamente delle isometrie di S^n_R. Inoltre, $O(n+1)$ agisce transitivamente sulle basi ortonomali in TS^n_R. In altre parole, per ogni p, $\tilde{p} \in S^n_R$ e basi ortonormali $\{E_j\}$ di $T_pS^n_R$ e $\{\tilde{E}_j\}$ di $T_{\tilde{p}}S^n_R$ esiste $A \in O(n+1)$ tale che $A(p) = \tilde{p}$ e $dA_p(E_j) = \tilde{E}_j$ per $j = 1, \ldots, n$. Infatti, è sufficiente far vedere che per ogni $p \in S^n_R$ e ogni base ortonormale $\{E_j\}$ di $T_pS^n_R$ esiste $A \in O(n+1)$ che manda il polo nord $N = (0, \ldots, 0, R)$ in p e la base canonica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di $T_NS^n_R$ in $\{E_j\}$. Ma infatti sia $\{e_1, \ldots, e_n, N/R\}$ che $\{E_1, \ldots, E_n, p/\|p\|\}$ sono basi ortonormali di $\mathbb{R}^{n+1}$, per cui esiste un'unica $A \in O(n+1)$ che manda la prima nella seconda (e $dA_N = A$, in quanto A è lineare). Nel paragrafo 6.4 faremo vedere che, come conseguenza di questo fatto, $\mathrm{Iso}(S^n_R) = O(n+1)$.

Esercizio 4.2.1. Sia $O(n,1)$ il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^{n+1}$ che conserva g^1_R considerata come forma quadratica su $\mathbb{R}^{n+1}$, e indichiamo con $O_+(n,1)$ il sottogruppo che manda U^n_R in sé. Dimostra che gli elementi di $O_+(n,1)$ sono isometrie di U^n_R, e che $O_+(n,1)$ agisce transitivamente sulle basi ortonormali di TU^n_R.

Concludiamo questo paragrafo parlando di metriche Riemanniane su gruppi di Lie.

Definizione 4.2.3: Una metrica Riemanniana g su un gruppo di Lie G è *invariante a sinistra* (rispettivamente, *invariante a destra*) se $L^*_h g = g$ (rispettivamente, $R^*_h g = g$) per ogni $h \in G$, cioè se tutte le traslazioni sinistre (destre) sono delle isometrie. Una metrica Riemanniana invariante sia a sinistra che a destra è detta *bi-invariante*.

Sia G un gruppo di Lie. Se scegliamo arbitrariamente un prodotto scalare definito positivo $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_e$ sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, otteniamo (perché?) una metrica Riemanniana invariante a sinistra ponendo

$$\forall h \in G,\ \forall v, w \in T_hG \qquad \langle v, w\rangle_h = \big\langle (dL_{h^{-1}})_h(v), (dL_{h^{-1}})_h(w)\big\rangle_e.$$

In maniera analoga si ottengono metriche Riemanniane invarianti a destra, ed è chiaro che tutte le metriche Riemanniane invarianti a sinistra o a destra si ricavano in questo modo.

Esercizio 4.2.2. Dimostra che su un gruppo di Lie compatto G esiste sempre una metrica Riemanniana bi-invariante seguendo la traccia seguente:

(a) Dimostra che l'unico omomorfismo continuo $f\colon G \to \mathbb{R}^*$ è la costante 1.
(b) Sia $\nu \in A^n(G)$ una n-forma invariante a sinistra, cioè tale che $L_h^*\nu = \nu$ per ogni $h \in G$. Dimostra che ν è anche invariante a destra. (*Suggerimento:* per ogni $h \in G$, la n-forma $R_h^*\nu$ è invariante a sinistra, per cui $R_h^*\nu = f(h)\nu$; verifica che $f\colon G \to \mathbb{R}^*$ è un omomorfismo di gruppi.)
(c) Dimostra che esiste una n-forma di volume invariante a sinistra su G.
(d) Sia $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ una metrica Riemanniana invariante a sinistra su G, e sia ν una n-forma di volume invariante a sinistra su G. Dimostra che ponendo

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle_g = \int_G \langle (dR_x)_g v, (dR_x)_g w\rangle_{gx}\, d\nu$$

dove $g \in G$ e v, $w \in T_gG$, si ottiene una metrica Riemanniana bi-invariante su G.

Definizione 4.2.4: Se $\theta\colon G \times M \to M$ è un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà Riemanniana M tale che θ_g è un'isometria per ogni $g \in G$, diremo che G *agisce per isometrie* su M.

Dunque se G agisce fedelmente per isometrie su una varietà Riemanniana M allora G può essere pensato come un sottogruppo del gruppo $\mathrm{Iso}(M)$ di tutte le isometrie di M. A dire il vero, lo stesso gruppo $\mathrm{Iso}(M)$ è un gruppo di Lie e l'applicazione $g \mapsto \theta_g$ è sempre di classe C^∞, grazie ai seguenti due teoremi:

Teorema 4.2.3: *Siano G e H due gruppi di Lie, e $F\colon G \to H$ un omomorfismo continuo di gruppi. Allora F è automaticamente di classe C^∞.*

Teorema 4.2.4: (Myers, Steenrod) *Sia M una varietà Riemanniana. Allora il gruppo* $\mathrm{Iso}(M)$ *ammette una struttura di gruppo di Lie tale che l'applicazione naturale $(F, p) \mapsto F(p)$ sia un'azione di* $\mathrm{Iso}(M)$ *su M.*

Definizione 4.2.5: Diremo che una varietà Riemanniana M è *omogenea* se $\mathrm{Iso}(M)$ agisce in modo transitivo. Diremo che M è *isotropa* in un punto $p \in M$ se il sottogruppo di isotropia $\mathrm{Iso}(M)_p$ agisce in modo transitivo sui vettori unitari in T_pM, dove $\mathrm{Iso}(M)_p$ agisce su T_pM tramite l'applicazione $(F, v) \mapsto dF_p(v)$.

Osservazione 4.2.1. Se M è omogenea, e isotropa in un punto, allora è isotropa in ogni punto.

4.3 Connessioni

L'obiettivo di questo paragrafo è trovare un modo per derivare campi vettoriali definiti lungo una curva. Il problema è che i valori del campo vettoriale appartengono a spazi vettoriali diversi, per cui non è possibile scrivere un rapporto incrementale. Storicamente, questo problema venne risolto introducendo una tecnica (il trasporto parallelo) per confrontare spazi tangenti in punti diversi; noi invece faremo il percorso inverso, definendo prima cosa vuol dire derivare campi vettoriali e deducendo poi il concetto di trasporto parallelo.

La formalizzazione moderna del concetto di derivazione di campi vettoriali è data dalla definizione di connessione.

Definizione 4.3.1: Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M. Una *connessione* su E è un'applicazione $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$, scritta $(X, V) \mapsto \nabla_X V$, tale che

(a) $\nabla_X V$ è $C^\infty(M)$-lineare in X: per ogni X_1, $X_2 \in \mathcal{T}(M)$, $V \in \mathcal{E}(M)$, e f, $g \in C^\infty(M)$ si ha

$$\nabla_{fX_1+gX_2}V = f\nabla_{X_1}V + g\nabla_{X_2}V;$$

(b) $\nabla_X V$ è $\mathbb{R}$-lineare in V: per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, V_1, $V_2 \in \mathcal{E}(M)$, e a, $b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\nabla_X(aV_1 + bV_2) = a\nabla_X V_1 + b\nabla_X V_2;$$

(c) ∇ soddisfa un'identità di Leibniz: per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, $V \in \mathcal{E}(M)$, e $f \in C^\infty(M)$ si ha

$$\nabla_X(fV) = f\nabla_X V + (Xf)V.$$

La sezione $\nabla_X V$ è detta *derivata covariante* di V lungo X. Infine, una connessione su TM verrà chiamata *connessione lineare*, o semplicemente *connessione su M*.

Esempio 4.3.1. Sia $E = M \times \mathbb{R}^r$ un fibrato banale sulla varietà M. Ogni sezione $V \in \mathcal{E}(M)$ è della forma $V = V^j E_j$ per opportune $V^j \in C^\infty(M)$, dove $\{E_1, \dots, E_r\}$ è il riferimento globale di E ottenuto ponendo $E_j(p) = (p, e_j)$ per ogni $p \in M$, dove $\{e_1, \dots, e_r\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^r$. In altre parole, una sezione del fibrato banale di rango r è essenzialmente una r-upla di funzioni differenziabili. Possiamo allora definire la *connessione piatta* su E ponendo

$$\nabla_X V = X(V^j)E_j.$$

Si verifica subito che è effettivamente una connessione.

Usando la connessione piatta e le partizioni dell'unità è facile definire connessioni su qualsiasi fibrato:

Proposizione 4.3.1: *Su qualsiasi fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$ esiste sempre una connessione.*

Dimostrazione: Scegliamo un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M che banalizza E, con banalizzazioni locali date da $\chi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Su ciascun U_α definiamo una connessione ∇^α ponendo

$$\forall X \in \mathcal{T}(U_\alpha)\ \forall V \in \mathcal{E}(U_\alpha) \qquad \nabla^\alpha_X V = \chi_\alpha^{-1}\big(\nabla^0_X \chi_\alpha(V)\big),$$

dove ∇^0 è la connessione piatta su $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Incolliamo ora le ∇^α definendo

$$\forall X \in \mathcal{T}(M)\ \forall V \in \mathcal{E}(M) \qquad \nabla_X V = \sum_\alpha \rho_\alpha\big(\nabla^\alpha_{X|_{U_\alpha}} V|_{U_\alpha}\big).$$

Le proprietà (a) e (b) della Definizione 4.3.1 sono chiaramente soddisfatte. Per la proprietà (c) abbiamo

$$\begin{aligned}\nabla_X(fV) &= \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha_{X|_{U_\alpha}}(fV|_{U_\alpha}) = \sum_\alpha \rho_\alpha\big(f\nabla^\alpha_{X|_{U_\alpha}} V|_{U_\alpha} + X(f)V|_{U_\alpha}\big)\\ &= f\nabla_X V + \left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) X(f)V = f\nabla_X V + X(f)V,\end{aligned}$$

e quindi ∇ è una connessione. □

Osservazione 4.3.1. In generale, la somma di connessioni (o il prodotto di uno scalare per una connessione) non è una connessione, in quanto la proprietà (c) non viene conservata. Invece, la *combinazione affine* di connessioni è una connessione: se $\nabla^1, \dots, \nabla^k$ sono connessioni su un fibrato E e $\mu_1, \dots .\mu_k \in \mathbb{R}$ sono tali che $\mu_1 + \cdots + \mu_k = 1$, allora si verifica facilmente che $\mu_1\nabla^1 + \cdots + \mu_k\nabla^k$ è ancora una connessione.

Facciamo ora vedere che in realtà $\nabla_X V(p)$ dipende solo dal valore di X in $p \in M$ e dal comportamento di V in un intorno di p (o, più precisamente, solo da $X(p)$ e dal comportamento di V ristretto a una curva tangente a $X(p)$ in p):

Lemma 4.3.2: *Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale, e $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione.*

(i) *Se X, $\tilde{X} \in \mathcal{T}(M)$ e V, $\tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che $X(p) = \tilde{X}(p)$ e $V \equiv \tilde{V}$ in un intorno di $p \in M$ allora si ha $\nabla_X V(p) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{V}(p)$.*

(ii) *Per ogni aperto $U \subseteq M$ esiste un'unica connessione $\nabla^U: \mathcal{T}(U) \times \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$ su $E|_U$ tale che per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$, $V \in \mathcal{E}(M)$ e $p \in U$ si abbia*

$$\nabla^U_{X|_U} V|_U(p) = \nabla_X V(p).$$

(iii) *Se $X \in \mathcal{T}(M)$ e V, $\tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che esiste una curva $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X(p)$ e $V \circ \sigma = \tilde{V} \circ \sigma$ allora $\nabla_X V(p) = \nabla_X \tilde{V}(p)$.*

Dimostrazione: Prima di tutto dimostriamo che se $V \equiv O$ in un intorno U di p allora $\nabla_X V(p) = O$ per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$. Sia $g \in C^\infty(M)$ tale che $g(p) = 1$ e $g|_{M \setminus U} \equiv 0$ (vedi il Corollario 2.3.2). Allora $gV \equiv O$, per cui $\nabla_X(gV) = \nabla_X(0 \cdot gV) = 0 \nabla_X(gV) \equiv O$ e quindi

$$O = \nabla_X(gV)(p) = g(p)\nabla_X V(p) + (Xg)(p)V(p) = \nabla_X V(p).$$

Dunque se V, $\tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che $V \equiv \tilde{V}$ in un intorno di p, abbiamo $V - \tilde{V} \equiv O$ in un intorno di p, e quindi $\nabla_X V(p) = \nabla_X \tilde{V}(p)$ quale che sia $X \in \mathcal{T}(M)$.

Dimostriamo analogamente che se $X \equiv O$ in un intorno U di p allora $\nabla_X V(p) = O$ per ogni $V \in \mathcal{E}(M)$. Infatti, se $g \in C^\infty(M)$ è la stessa funzione di prima si ha $gX \equiv O$, per cui $\nabla_{gX} V = \nabla_{0gX} V = 0 \nabla_{gX} V \equiv O$ e quindi

$$O = \nabla_{gX} V(p) = g(p)\nabla_X V(p) = \nabla_X V(p).$$

Da questo segue, come prima, che se $X \equiv \tilde{X}$ in un intorno di p allora $\nabla_X V(p) = \nabla_{\tilde{X}} V(p)$ quale che sia $V \in \mathcal{E}(M)$.

In particolare, quindi, il valore di $\nabla_X V$ in p dipende solo dal comportamento di X e V in un intorno di p, per cui se una connessione ∇^U come in (ii) esiste allora è unica. Ma possiamo usare questa proprietà anche per definire ∇^U. Infatti, per ogni $p \in U$ scegliamo, usando la Proposizione 2.3.1, una $\chi_p \in C^\infty(M)$ tale che $\chi_p \equiv 1$ in un intorno di p e $\mathrm{supp}(\chi_p) \subset U$. Allora per ogni $X \in \mathcal{T}(U)$ il campo vettoriale $\chi_p X$, esteso a zero fuori da U, è un campo vettoriale globale che coincide con X in un intorno di p. In modo analogo, per ogni $V \in \mathcal{E}(U)$ possiamo considerare $\chi_p V$ come una sezione globale di E che coincide con V in un intorno di p. Quindi se definiamo $\nabla^U: \mathcal{T}(U) \times \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$ ponendo

$$\nabla^U_X V(p) = \nabla_{\chi_p X}(\chi_p V)(p)$$

per quanto visto otteniamo una connessione ben definita (cioè indipendente dalla scelta delle χ_p), e abbiamo dimostrato (ii).

Possiamo ora completare la dimostrazione di (i), facendo vedere che in realtà $\nabla_X V(p)$ dipende solo dal valore di X in p (e dal comportamento di V in un intorno di p). Al solito, basta far vedere che $X(p) = O$ implica $\nabla_X V(p) = O$ per ogni $V \in \mathcal{E}(M)$. Sia (U, φ) una carta locale centrata in p, e scriviamo $X|_U = X^j \partial_j$, con $X^j(p) = 0$ per $j = 1, \ldots, n$ in quanto $X(p) = O$. Per quanto detto, ha senso calcolare $\nabla_{\partial_j} V(p)$, e si ha

$$\nabla_X V(p) = \nabla_{X^j \partial_j} V(p) = X^j(p) \nabla_{\partial_j} V(p) = O.$$

Per dimostrare (iii), basta far vedere che se $V \circ \sigma \equiv O$ allora $\nabla_X V(p) = O$. Sia $\{E_1, \ldots, E_r\}$ un riferimento locale per E su un intorno U di p, e scriviamo $V = V^j E_j$. Da $V(p) = V\bigl(\sigma(0)\bigr) = O$ otteniamo $V^1(p) = \cdots = V^r(p) = 0$. Per quanto detto ha senso calcolare $\nabla_X E_j(p)$, e si ha

$$\nabla_X V(p) = \nabla_X(V^j E_j)(p) = V^j(p) \nabla_X E_j(p) + X(p)(V^j) E_j(p) = \frac{d(V^j \circ \sigma)}{dt}(0) E_j(p) = O.$$

□

Per non appesantire le notazioni, nel seguito indicheremo con ∇ e non con ∇^U la connessione indotta sull'aperto $U \subseteq M$.

Sia (U, φ) una carta locale che banalizza E, e $\{E_1, \ldots, E_r\}$ un riferimento locale su U. Allora si deve poter scrivere

$$\nabla_{\partial_j} E_h = \Gamma_{jh}^k E_k,$$

per opportune funzioni $\Gamma_{jh}^k \in C^\infty(U)$.

Definizione 4.3.2: Le funzioni Γ_{ij}^k sono dette *simboli di Christoffel* della connessione rispetto al dato riferimento locale.

I simboli di Christoffel determinano completamente la connessione: infatti se $X \in \mathcal{T}(U)$ e $V \in \mathcal{E}(U)$, localmente possiamo scrivere $X = X^j \partial_j$ e $V = V^h E_h$, e abbiamo

$$\nabla_X V = X^j \nabla_{\partial_j} V = [X^j \partial_j (V^k) + \Gamma_{jh}^k X^j V^h] E_k. \tag{4.3.1}$$

In particolare, i simboli di Christoffel della connessione piatta su un fibrato banale sono identicamente nulli.

Il Lemma 4.3.2.(iii) ci dice che per calcolare la derivata covariante di una sezione basta conoscerne il comportamento lungo una curva. Questo ci suggerisce la seguente:

Definizione 4.3.3: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale e $\sigma: I \to M$ una curva in M, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Una *sezione* di E *lungo* σ è un'applicazione $V: I \to E$ di classe C^∞ tale che $V(t) \in E_{\sigma(t)}$ per ogni $t \in I$. Lo spazio vettoriale delle sezioni di E lungo σ verrà indicato con $\mathcal{E}(\sigma)$, o con $\mathcal{T}(\sigma)$ se $E = TM$. Una sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è *estendibile* se esiste un intorno U del sostegno di σ e una sezione $\tilde{V} \in \mathcal{E}(U)$ tale che $V(t) = \tilde{V}\big(\sigma(t)\big)$ per ogni $t \in I$.

Esempio 4.3.2. Il vettore tangente a una curva $\sigma'(t) = d\sigma(d/dt)$ è un tipico esempio di sezione di TM lungo una curva. Inoltre, se $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ ma $\sigma'(t_1) \neq \sigma'(t_2)$ allora σ' non è estendibile.

Esercizio 4.3.1. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale, e $\sigma: I \to M$ una curva di classe C^∞. Sia $t_0 \in I$ tale che $\sigma'(t_0) \neq O$. Dimostra che esiste un intervallo aperto $J \subseteq I$ contenente t_0 tale che ogni $X \in \mathcal{E}(\sigma|_J)$ è estendibile.

Il vero significato del Lemma 4.3.2.(iii) è contenuto nella

Proposizione 4.3.3: *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$, e $\sigma: I \to M$ una curva su M. Allora esiste un unico operatore $D: \mathcal{E}(\sigma) \to \mathcal{E}(\sigma)$ soddisfacente le seguenti proprietà:*

(i) *è $\mathbb{R}$-lineare:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad D(aV_1 + bV_2) = aDV_1 + bDV_2;$$

(ii) *soddisfa una regola di Leibniz:*

$$\forall f \in C^\infty(I) \qquad D(fV) = f'V + fDV;$$

(iii) *se $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è estendibile, e $\tilde{V}$ è un'estensione di V, si ha*

$$DV(t) = \nabla_{\sigma'(t)} \tilde{V}.$$

Dimostrazione: Cominciamo con l'unicità. Dato $t_0 \in I$, un ragionamento analogo a quello usato per dimostrare il Lemma 4.3.2.(i) mostra che $DV(t_0)$ dipende solo dai valori di V in un intorno di t_0. Possiamo allora usare un riferimento locale e coordinate locali, scrivere $V(t) = V^h(t) E_h\big(\sigma(t)\big)$, $\sigma'(t_0) = (\sigma^j)'(t_0) \partial_j\big(\sigma(t_0)\big)$ e usare le proprietà di D per ottenere

$$\begin{aligned} DV(t_0) &= (V^h)'(t_0) E_h\big(\sigma(t_0)\big) + V^h(t_0) D(E_h \circ \sigma)(t_0) \\ &= (V^h)'(t_0) E_h\big(\sigma(t_0)\big) + V^h(t_0) \nabla_{\sigma'(t_0)} E_h\big(\sigma(t_0)\big) \\ &= \Big[(V^k)'(t_0) + \Gamma_{jh}^k\big(\sigma(t_0)\big)(\sigma^j)'(t_0) V^h(t_0)\Big] E_k\big(\sigma(t_0)\big), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

dove abbiamo usato il fatto che $E_h \circ \sigma$ è estendibile in un intorno di t_0; quindi D è univocamente determinato.

Per l'esistenza, se il sostegno di σ è contenuto in una sola carta locale banalizzante E, possiamo usare (4.3.2) per definire D, ed è facile verificare che soddisfa le condizioni richieste. In generale, copriamo $\sigma(I)$ con carte locali banalizzanti E, e usiamo (4.3.2) per definire un operatore D su ciascuna di queste carte. Nelle intersezioni, abbiamo due operatori che soddisfano (i)–(iii); per l'unicità, questi due operatori devono coincidere, e quindi abbiamo definito D globalmente. □

Definizione 4.3.4: L'operatore D definito sopra è detto *derivata covariante* lungo la curva $\sigma\colon I \to M$. Se $t \in I$ e $V \in \mathcal{E}(\sigma)$, scriveremo spesso $D_t V$ invece di $DV(t)$.

Esercizio 4.3.2. Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon I \to M$ una curva di classe C^∞; indichiamo con $D\colon \mathcal{E}(\sigma) \to \mathcal{E}(\sigma)$ la derivata covariante lungo σ. Sia poi $h\colon J \to I$ di classe C^∞, dove $J \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, e indichiamo con $\tilde{D}$ la derivata covariante lungo la curva $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h$. Dimostra che per ogni $X \in \mathcal{E}(\sigma)$ si ha $X \circ h \in \mathcal{E}(\sigma \circ h)$ e

$$\tilde{D}(X \circ h) = h'(DX \circ h).$$

Se $E = M \times \mathbb{R}^r$ è il fibrato banale, ∇ è la connessione piatta, e $\sigma\colon I \to M$ è una curva, si vede subito che $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ soddisfa $DV \equiv O$ se e solo se V è costante, cioè se $V(t)$ è sempre lo stesso vettore di $\mathbb{R}^r$ che si sposta parallelamente lungo la curva σ. Questo fatto suggerisce la seguente definizione:

Definizione 4.3.5: Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon I \to M$ una curva. Una sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è detta *parallela* se $DV \equiv O$.

La condizione di parallelismo è localmente un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie: infatti (4.3.2) implica che $DV \equiv O$ in una carta banalizzante E se e solo se

$$\frac{dV^k}{dt} + (\Gamma^k_{jh} \circ \sigma)(\sigma^j)' V^h = 0. \tag{4.3.3}$$

Citiamo a questo punto il Teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari:

Teorema 4.3.4: *Dati un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, un numero naturale $k \geq 1$, un $t_0 \in I$, punti $x_0, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^n$, e un'applicazione $A\colon I \times (R^n)^k \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ lineare rispetto a $(\mathbb{R}^n)^k$, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d^k V}{dt^k}(t) = A\left(t, V(t), \ldots, \dfrac{d^{k-1}V}{dt^{k-1}}(t)\right) \\ V(t_0) = x_0, \ldots, \dfrac{d^{k-1}V}{dt^{k-1}}(t_0) = x_{k-1}, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

ammette una e una sola soluzione $V\colon I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞.

Questo teorema implica che, posto $I = [a, b]$ e $p = \sigma(a)$, per ogni $v \in E_p$ esiste un unico $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ parallelo tale che $V(a) = v$. Infatti, essendo $\sigma(I)$ compatto, possiamo trovare un numero finito di carte $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_r, \varphi_r)$ banalizzanti E che coprono il sostegno di σ; possiamo anche supporre che si abbia $U_j \cap \sigma(I) = \sigma([s_j, t_j])$ per $j = 1, \ldots, r$, con $a = s_1 < s_2 < t_1 < s_3 < t_2 < \cdots < s_r < t_{r-1} < t_r = b$. Allora il Teorema 4.3.4 applicato a (4.3.3) ci fornisce un'unica sezione parallela V_1 lungo $\sigma|_{[s_1,t_1]}$ tale che $V_1(a) = v$. Analogamente, il Teorema 4.3.4 ci fornisce un'unica sezione parallela V_2 lungo $\sigma|_{[s_2,t_2]}$ tale che $V_2(t_1) = V_1(t_1)$; in particolare, l'unicità implica che V_1 e V_2 coincidono in $[s_2, t_1]$, definendo quindi un'unica sezione parallela lungo $\sigma|_{[s_1,t_2]}$. Procedendo in questo modo troviamo un'unica sezione V parallela lungo σ tale che $V(a) = v$. Questo ci permette di introdurre la seguente

Definizione 4.3.6: Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon [0,1] \to M$ una curva. Poniamo $p_0 = \sigma(0)$ e $p_1 = \sigma(1)$. Dato $v \in E_{p_0}$, l'unica sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ parallela lungo σ tale che $V(0) = v \in E_{p_0}$ è detta *estensione parallela* di v lungo σ. Il *trasporto parallelo* lungo σ (relativo a ∇) è l'applicazione $\tilde{\sigma}\colon E_{p_0} \to E_{p_1}$ definita da $\tilde{\sigma}(v) = V(1)$, dove $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è l'estensione parallela di $v \in E_{p_0}$.

Lemma 4.3.5: *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e $\sigma\colon [0,1] \to M$ una curva. Poniamo $p_0 = \sigma(0)$ e $p_1 = \sigma(1)$. Allora il trasporto parallelo lungo σ è un isomorfismo fra E_{p_0} e E_{p_1}.*

Dimostrazione: Siccome (4.3.3) è un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie, la soluzione dipende linearmente dalle condizioni iniziali, e quindi $\tilde{\sigma}$ è un'applicazione lineare.

Poniamo ora $\sigma_-(t) = \sigma(1 - t)$, e sia D^- la derivata covariante lungo σ_-; inoltre per ogni $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ poniamo $V^-(t) = V(1 - t)$, in modo da avere $V^- \in \mathcal{E}(\sigma^-)$. La formula (4.3.2) mostra subito che

$$D^-_t V^- = -D_{1-t} V;$$

in particolare, V^- è parallelo lungo σ_- se e solo se V è parallelo lungo σ. Questo vuol dire in particolare che se V è l'estensione parallela di $v \in E_{p_0}$, allora V^- è l'estensione parallela di $V(1) = \tilde{\sigma}(v) \in E_{p_1}$, per cui $\tilde{\sigma}_- = \tilde{\sigma}^{-1}$, e $\tilde{\sigma}$ è un isomorfismo. $\square$

Osservazione 4.3.2. Il trasporto parallelo è definito anche lungo curve C^∞ a tratti; basta fare la composizione dei trasporti paralleli lungo i singoli pezzi lisci.

Osservazione 4.3.3. Se $\sigma\colon[0,1]\to M$ è una curva chiusa, con $\sigma(0)=\sigma(1)=p$, allora il trasporto parallelo lungo σ diventa un automorfismo di T_pM. L'insieme degli automorfismi così ottenuti si chiama *gruppo di olonomia* di M in p, ed è un invariante importante della connessione.

Osservazione 4.3.4. Un fatto utile è che dati una curva $\sigma\colon I\to M$, un fibrato vettoriale $\pi\colon E\to M$ di rango r e una connessione su E esiste sempre un riferimento locale parallelo lungo σ, cioè una r-upla di sezioni $E_1,\dots,E_r\in\mathcal{E}(\sigma)$ parallele lungo σ tali che $\{E_1(t),\dots,E_r(t)\}$ sia una base di $E_{\sigma(t)}$ per ogni $t\in I$. Infatti, basta prendere un qualsiasi $t_0\in I$, una qualsiasi base $\{e_1,\dots,e_r\}$ di $E_{\sigma(t_0)}$, ed estendere parallelamente $e_1,\dots,e_r$ lungo σ.

Partendo da una connessione abbiamo costruito il trasporto parallelo. Possiamo fare anche il viceversa:

Proposizione 4.3.6: *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E\to M$, $\sigma\colon I\to M$ una curva in M, e $t_0\in I$. Allora*

$$\forall V\in\mathcal{E}(\sigma)\qquad\qquad D_{t_0}V=\frac{d}{dt}\tilde\sigma_t^{-1}\bigl(V(t)\bigr)\bigg|_{t=t_0},$$

dove $\tilde\sigma_t\colon E_{\sigma(t_0)}\to E_{\sigma(t)}$ è il trasporto parallelo lungo σ, e D è la derivata covariante lungo σ. In particolare, se $\sigma(t_0)=p$ e $\sigma'(t_0)=v\in T_pM$ allora

$$\forall V\in\mathcal{E}(M)\qquad\qquad \nabla_vV=\frac{d}{dt}\tilde\sigma_t^{-1}\bigl(V\bigl(\sigma(t)\bigr)\bigr)\bigg|_{t=t_0}.$$

Dimostrazione: Sia $\{E_1,\dots,E_r\}$ un riferimento locale parallelo lungo σ (ottenuto prendendo una base qualsiasi di E_p e trasportandola parallelamente lungo σ), e scriviamo $V(t)=V^j(t)E_j(t)$. Allora

$$\tilde\sigma_t^{-1}\bigl(V(\sigma(t))\bigr)=V^j(t)E_j(t_0)\quad\Longrightarrow\quad\frac{d}{dt}\tilde\sigma_t^{-1}\bigl(V\bigl(\sigma(t)\bigr)\bigr)\bigg|_{t=t_0}=\frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0).$$

D'altra parte, abbiamo

$$D_{t_0}(V^jE_j)=\frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0)+V^j(t_0)D_{t_0}E_j=\frac{dV^j}{dt}(t_0)E_j(t_0),$$

perché gli E_j sono paralleli lungo σ. □

Esercizio 4.3.3. Indichiamo con $\mathcal{L}\colon\mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\to\mathcal{T}(M)$ la derivata di Lie $\mathcal{L}_X(Y)=[X,Y]$. Dimostra che $\mathcal{L}$ *non* è una connessione, e che esistono due campi vettoriali X, $Y\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ tali che $X(O)=O$ ma $\mathcal{L}_XY(O)\neq O$.

Nel seguito lavoreremo principalmente con connessioni lineari, cioè con connessioni definite sul fibrato tangente TM. Una delle caratteristiche delle connessioni lineari è che inducono una connessione su ciascun fibrato tensoriale:

Proposizione 4.3.7: *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Allora esiste un unico modo di definire per ogni h, $k\in\mathbb{N}$ una connessione su T^h_kM, ancora indicata con ∇, in modo da soddisfare le seguenti condizioni:*

(i) *su TM la connessione ∇ coincide con la connessione lineare data;*
(ii) *su $T^0M=C^\infty(M)$ si ha $\nabla_X(f)=X(f)$;*
(iii) *se $K_j\in\mathcal{T}^{h_j}_{k_j}(M)$, per $j=1$, 2 e $X\in\mathcal{T}(M)$ si ha*

$$\nabla_X(K_1\otimes K_2)=(\nabla_XK_1)\otimes K_2+K_1\otimes(\nabla_XK_2);$$

(iv) *∇ commuta con le contrazioni.*

Inoltre, se $\eta \in A^1(M)$ *e* $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ *si ha*

$$(\nabla_X \eta)(Y) = X\big(\eta(Y)\big) - \eta(\nabla_X Y). \tag{4.3.5}$$

Infine, se $p \in M$, $v \in T_pM$, *e* $K \in \mathcal{T}^h_k(M)$ *si ha*

$$\nabla_v K = \frac{d}{dt}\Big[T(\tilde\sigma_t)^{-1}\big(K\big(\sigma(t)\big)\big)\Big]\Big|_{t=0} \in T^h_k(M)_p, \tag{4.3.6}$$

dove $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ *è una curva in* M *con* $\sigma(0) = p$ *e* $\sigma'(0) = v$, *e* $T(\tilde\sigma_t)$ *è l'isomorfismo fra* $(T^h_k M)_p$ *e* $(T^h_k M)_{\sigma(t)}$ *indotto dal trasporto parallelo lungo* σ *come descritto nell'Osservazione 1.2.3.*

Dimostrazione: Cominciamo a verificare l'unicità. Se ∇ soddisfa (i)–(iv) allora abbiamo

$$\begin{aligned} X\big(\eta(Y)\big) &= \nabla_X\big(\eta(Y)\big) = \nabla_X \mathcal{C}^1_1(Y \otimes \eta) \\ &= \mathcal{C}^1_1 \nabla_X(Y \otimes \eta) = \mathcal{C}^1_1(\nabla_X Y \otimes \eta + Y \otimes \nabla_X \eta) \\ &= \nabla_X \eta(Y) + \eta(\nabla_X Y), \end{aligned}$$

per cui (4.3.5) è una conseguenza. Questo vuol dire che la connessione ∇ su T^*M è univocamente determinata da (i)–(iv); conoscendola su TM e su $C^\infty(M)$ la (iii) implica che ∇ è univocamente determinata su qualsiasi $T^h_k M$. Per l'esattezza, otteniamo la seguente formula:

$$\begin{aligned} &(\nabla_X K)(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k) \\ &\quad = X\big(K(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\big) \\ &\quad\quad - \sum_{r=1}^h K(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^r,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k) - \sum_{s=1}^k K(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,\nabla_X Y_s,\ldots,Y_k). \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Infatti, ci basta dimostrarla per campi tensoriali della forma $K = X_1 \otimes \cdots \otimes X_h \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^k$. Allora la proprietà (iii) e la formula (4.3.5) implicano

$$\begin{aligned} &\nabla_X K(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k) \\ &\quad = \sum_{r=1}^h (X_1 \otimes \cdots \otimes \nabla_X X_r \otimes \cdots \otimes X_h \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^k)(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k) \\ &\quad\quad\quad + \sum_{s=1}^k (X_1 \otimes \cdots \otimes X_h \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \nabla_X \eta^s \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes \eta^k)(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k) \\ &\quad = \sum_{r=1}^h \omega^1(X_1)\cdots\omega^r(\nabla_X X_r)\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\eta^k(Y_k) \\ &\quad\quad\quad + \sum_{s=1}^k \omega^1(X_1)\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\nabla_X\eta^s(Y_s)\cdots\eta^k(Y_k) \\ &\quad = \sum_{r=1}^h \omega^1(X_1)\cdots\big[X\big(\omega^r(X_r)\big) - (\nabla_X\omega^r)(X_r)\big]\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\eta^k(Y_k) \\ &\quad\quad\quad + \sum_{s=1}^k \omega^1(X_1)\cdots\omega^h(X_h)\eta^1(Y_1)\cdots\big[X\big(\eta^s(Y_s)\big) - \eta^s(\nabla_X Y_s)\big]\cdots\eta^k(Y_k) \\ &\quad = X\big(K(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k)\big) \\ &\quad\quad - \sum_{r=1}^h K(\omega^1,\ldots,\nabla_X\omega^r,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,Y_k) - \sum_{s=1}^k K(\omega^1,\ldots,\omega^h,Y_1,\ldots,\nabla_X Y_s,\ldots,Y_k), \end{aligned}$$

e ci siamo.

Viceversa, usiamo la (4.3.5) per definire ∇ su T^*M. Prima di tutto,

$$\nabla_X\eta(fY) = X(f)\eta(Y) + fX\big(\eta(Y)\big) - \eta\big(f\nabla_X Y + X(f)Y\big) = f\nabla_X\eta(Y),$$

per cui la Proposizione 3.2.1 ci assicura che $\nabla_X\eta$ è effettivamente una 1-forma. Siccome $\nabla_X\eta$ è chiaramente $C^\infty(M)$-lineare in X, e per ogni $Y \in \mathcal{T}(M)$ si ha

$$\nabla_X(f\eta)(Y) = X\big(f\eta(Y)\big) - f\eta(\nabla_X Y) = [X(f)\eta + f\nabla_X\eta](Y),$$

otteniamo effettivamente una connessione su T^*M. Analogamente, definiamo ∇ su ciascun T^h_kM tramite la (4.3.7); si verifica facilmente (esercizio) che si ottiene una connessione che possiede le proprietà volute.

Rimane da dimostrare che ∇ è data anche da (4.3.6). Ricordando la Proposizione 4.3.6, basta verificare che il trasporto parallelo indotto da ∇ su ciascun T^h_kM (che indichiamo provvisoriamente con $\hat\sigma_t$) coincide con l'isomorfismo $T(\tilde\sigma_t)$. Scegliamo un riferimento locale $\{v_1,\dots,v_n\}$ di TM parallelo lungo σ, e sia $\{v^1,\dots,v^n\}$ il riferimento duale di T^*M. Nota che anche i v^j sono paralleli rispetto a ∇: infatti la (4.3.5) implica

$$(Dv^j)\big(v_i\big) = \sigma'\big(v^j(v_i)\big) - v^j(Dv_i) = O$$

per ogni i e j, per cui $Dv^j = O$. Questo implica che

$$\hat\sigma_t\big(v_i(0)\big) = v_i(t) = T(\tilde\sigma_t)\big(v_i(0)\big) \qquad \text{e} \qquad \hat\sigma_t\big(v^j(0)\big) = v^j(t) = T(\tilde\sigma_t)\big(v^j(0)\big)$$

per ogni $1 \le i,\ j \le n$. Ma allora la proprietà (iii) e la definizione di $T(\tilde\sigma_t)$ implicano che

$$\begin{aligned}\hat\sigma_t\big(v_{i_1}(0)\otimes\cdots\otimes v_{i_h}(0)\otimes v^{j_1}(0)\otimes\cdots\otimes v^{j_k}(0)\big) &= v_{i_1}(t)\otimes\cdots\otimes v_{i_h}(t)\otimes v^{j_1}(t)\otimes\cdots\otimes v^{j_k}(t)\\ &= T(\tilde\sigma_t)\big(v_{i_1}(0)\otimes\cdots\otimes v_{i_h}(0)\otimes v^{j_1}(0)\otimes\cdots\otimes v^{j_k}(0)\big),\end{aligned}$$

per ogni $1 \le i_1,\dots,j_k \le n$, e quindi $\hat\sigma_t \equiv T(\tilde\sigma_t)$, come volevamo. □

Ora, prendiamo $K \in \mathcal{T}^h_k(M)$. Siccome ∇ è $C^\infty(M)$-lineare in X, l'applicazione

$$(\omega^1,\dots,\omega^h,Y_1,\dots,Y_k,X) \mapsto \nabla_X K(\omega^1,\dots,\omega^h,Y_1,\dots,Y_k) \tag{4.3.8}$$

è $C^\infty(M)$-multilineare in tutte le variabili, e quindi (Proposizione 3.2.1) definisce un campo tensoriale.

Definizione 4.3.7: Se $K \in \mathcal{T}^h_k(M)$ allora il campo tensoriale $\nabla K \in \mathcal{T}^h_{k+1}(M)$ definito da (4.3.8) si chiama *derivata covariante totale* di K.

Esempio 4.3.3. Se $f \in C^\infty(M)$ allora $\nabla f = df$. Infatti per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$ si ha

$$df(X) = X(f) = \nabla_X f = (\nabla f)(X).$$

Nel paragrafo 4.1 usando una metrica Riemanniana abbiamo definito il gradiente di una funzione. Usando la derivata covariante totale possiamo generalizzare altri due concetti dell'Analisi classica:

Definizione 4.3.8: Se $f \in C^\infty(M)$ il campo tensoriale $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f) \in \mathcal{T}_2(M)$ è detto *Hessiano* di f.

Definizione 4.3.9: La derivata covariante totale di un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{1}$. Quindi possiamo definire la funzione $\operatorname{div}(X) = \mathcal{C}^1_1(\nabla X)$, che è detta *divergenza* di X.

Calcoliamo l'espressione in coordinate locali di Hessiano e divergenza. Se X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ abbiamo

$$\nabla^2 f(X,Y) = \nabla(\nabla f)(X,Y) = \big(\nabla_Y(df)\big)(X) = Y\big(df(X)\big) - df(\nabla_Y X) = Y\big(X(f)\big) - \nabla_Y X(f). \tag{4.3.9}$$

Quindi in coordinate locali

$$\nabla^2 f(\partial_i,\partial_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

In particolare, su $\mathbb{R}^n$ con la connessione piatta ritroviamo l'Hessiano usuale. Nota però che per connessioni generali questo Hessiano *non* è simmetrico, in quanto non è detto che si abbia $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$.

Poi, (4.3.1) permette di stabilire che se $X = X^h \partial_h$ allora

$$\nabla X = \partial_k \otimes (dX^k + \Gamma^k_{jh} X^h \, dx^j),$$

per cui

$$\mathrm{div}(X) = \frac{\partial X^k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{kh} X^h,$$

(con sommatoria sottintesa sull'indice k), e di nuovo su $\mathbb{R}^n$ con la connessione piatta recuperiamo la solita divergenza.

Esercizio 4.3.4. Sia ∇ una connessione sulla varietà M. Dato $X \in \mathcal{T}(M)$ e $p \in M$, sia $A_{X,p}: T_pM \to T_pM$ l'applicazione lineare data da $A_{X,p}(v) = \nabla_v X$. Dimostra che $\mathrm{div}(X)(p) = \mathrm{tr}\, A_{X,p}$.

Concludiamo questo paragrafo discutendo due altri modi di definire le connessioni.

Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Sia $\{E_1, \ldots, E_r\}$ un riferimento locale per E sopra un aperto $U \subseteq M$. Allora possiamo definire una matrice $\boldsymbol{\omega} = (\omega^k_j)$ di 1-forme su U ponendo

$$\forall X \in \mathcal{T}(U) \qquad\qquad \nabla_X E_j = \omega^k_j(X) E_k;$$

sono 1-forme in quanto $C^\infty(M)$-lineari in X. Se U è il dominio di una carta locale, in coordinate locali chiaramente abbiamo

$$\omega^k_j = \Gamma^k_{ij} \, dx^i.$$

Definizione 4.3.10: Sia $\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$, e $\{E_1, \ldots, E_r\}$ un riferimento locale per E su aperto U. La matrice $\boldsymbol{\omega} = (\omega^k_j)$ di 1-forme su U appena definita è detta *matrice delle forme di connessione* rispetto al dato riferimento locale.

Sia $\{\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_r\}$ un altro riferimento locale per E sopra U. Allora deve esistere una matrice invertibile $\mathbf{A} = (A^k_h)$ di funzioni C^∞ su U tali che $\tilde{E}_h = A^k_h E_k$. Se indichiamo con $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\omega}^h_i)$ la matrice delle forme di connessione rispetto a questo riferimento locale abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^h_i(X) A^k_h E_k &= \tilde{\omega}^h_i(X) \tilde{E}_h = \nabla_X \tilde{E}_i = \nabla_X (A^j_i E_j) = A^j_i \nabla_X E_j + X(A^j_i) E_j \\ &= [A^j_i \omega^k_j(X) + dA^k_i(X)] E_k.\end{aligned}$$

In termini matriciali questo vuol dire $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + d\mathbf{A}$, cioè

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1} \cdot d\mathbf{A}. \tag{4.3.10}$$

Esercizio 4.3.5. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Supponiamo di avere una famiglia di riferimenti locali $\{E^\alpha\}$ per E definiti su aperti $\{U_\alpha\}$ che ricoprono M, e di avere una famiglia di matrici di 1-forme $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$, con $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ definita su U_α, che soddisfano (4.3.10) sull'intersezione dei domini di definizione. Dimostra che esiste un'unica connessione ∇ su E per cui le $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ siano le matrici delle forme di connessione rispetto ai riferimenti locali E^α.

L'ultima interpretazione delle connessioni è in termini di sottofibrati orizzontali, e la presenteremo con una serie di definizioni ed esercizi.

Definizione 4.3.11: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r. Il *sottofibrato verticale* $\mathcal{V} \subset TE$ è il nucleo del differenziale di π, cioè $\mathcal{V} = \ker(d\pi)$. Siccome $d\pi: TE \to TM$, il fibrato verticale (che è un fibrato vettoriale su E) ha rango r.

Dato $p \in M$ e $v \in E_p$, indichiamo con $j_p: E_p \to E$ l'inclusione, e con $k_v: E_p \to T_v(E_p)$ la solita identificazione canonica. Siccome $\pi \circ j_p \equiv p$, si ha $d\pi \circ dj_p \equiv O$, per cui

$$\iota_v = d(j_p)_v \circ k_v: E_p \to \mathcal{V}_v$$

è un isomorfismo fra E_p e lo spazio verticale $\mathcal{V}_v$.

Definizione 4.3.12: Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, indichiamo con $\mu_\lambda\colon E \to E$ la moltiplicazione per λ, cioè $\mu_\lambda(v) = \lambda v$. Inoltre, indichiamo con $\sigma\colon E \oplus E \to E$ la somma $\sigma(v_1, v_2) = v_1 + v_2$.

Esercizio 4.3.6. Dimostra che $\mathcal{V}_{\mu_\lambda(v)} = d(\mu_\lambda)_v(\mathcal{V}_v)$ e che $\iota_{\mu_\lambda(v)} \circ d(\mu_\lambda)_v = d(\mu_\lambda)_v \circ \iota_v$ per ogni $v \in E$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.3.7. Dimostra che $\mathcal{V}_{\sigma(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)}(\mathcal{V}_{v_1} \oplus \mathcal{V}_{v_2})$ e che $\iota_{\sigma(v_1,v_2)} \circ d\sigma_{(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)} \circ (\iota_{v_1} \oplus \iota_{v_2})$ per ogni $(v_1, v_2) \in E \oplus E$.

Definizione 4.3.13: Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Un *sottofibrato orizzontale* è un sottofibrato $\mathcal{H} \subset TE$ tale che $TE = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. Dato un sottofibrato orizzontale $\mathcal{H}$, indicheremo con $\kappa\colon TE \to \mathcal{V}$ la proiezione associata. Diremo che un sottofibrato orizzontale è *lineare* se $\kappa_{\mu_\lambda(v)} \circ d(\mu_\lambda)_v = d(\mu_\lambda)_v \circ \kappa_v$ per ogni $v \in E$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\kappa_{\sigma(v_1,v_2)} \circ d\sigma_{(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)} \circ (\kappa_{v_1} \oplus \kappa_{v_2})$ per ogni $(v_1, v_2) \in E \oplus E$.

Esercizio 4.3.8. Dimostra che un sottofibrato orizzontale $\mathcal{H}$ è lineare se e solo se si ha $\mathcal{H}_{\mu_\lambda(v)} = d(\mu_\lambda)_v(\mathcal{H}_v)$ per ogni $v \in E$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{H}_{\sigma(v_1,v_2)} = d\sigma_{(v_1,v_2)}(\mathcal{H}_{v_1} \oplus \mathcal{H}_{v_2})$ per ogni $(v_1, v_2) \in E \oplus E$.

Definizione 4.3.14: Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Una *k-forma a valori in E* è una sezione del fibrato $\bigwedge^k M \otimes E$. Indicheremo con $A^k(M; E)$ lo spazio delle k-forme a valori in E.

Esercizio 4.3.9. Sia $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$. Dimostra che ∇ induce un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $D\colon \mathcal{E}(M) \to A^1(M; E)$ tale che

$$D(fV) = df \otimes V + f DV \tag{4.3.11}$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$ e ogni $V \in \mathcal{E}(M)$ ponendo $DV(X) = \nabla_X V$. Viceversa, dimostra che ogni applicazione $\mathbb{R}$-lineare $D\colon \mathcal{E}(M) \to A^1(M; E)$ che soddisfa (4.3.11) è indotta da un'unica connessione su E.

Esercizio 4.3.10. Sia $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$. Dati $p \in M$ e $v \in E_p$, siano V, $\tilde{V} \in \mathcal{E}(M)$ tali che $V(p) = \tilde{V}(p) = v$. Dimostra che

$$d\tilde{V}_p - \iota_v \circ D\tilde{V}_p = dV_p - \iota_v \circ DV_p\colon T_pM \to T_vE.$$

Definizione 4.3.15: Sia $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$. Per ogni $v \in E$ definiamo l'applicazione $\Theta_v\colon T_{\pi(v)}M \to T_vE$ data da

$$\Theta_p(X) = dV_{\pi(v)}(X) - \iota_v(\nabla_X V)$$

per ogni $X \in T_{\pi(v)}M$, dove $V \in \mathcal{E}(M)$ è una qualsiasi sezione tale che $V\big(\pi(v)\big) = v$. Il *sottofibrato orizzontale $\mathcal{H}^\nabla$ associato a ∇* è allora definito ponendo $\mathcal{H}^\nabla_v = \Theta_v(T_{\pi(v)}M)$ per ogni $v \in E$.

Esercizio 4.3.11. Sia $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$. Dimostra che $\mathcal{H}^\nabla$ è effettivamente un sottofibrato orizzontale, e che è lineare.

Definizione 4.3.16: Sia $\mathcal{H}$ un sottofibrato orizzontale lineare di un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, e sia $\kappa\colon TE \to \mathcal{V}$ la proiezione relativa. La *connessione $D^\mathcal{H}$ associata a $\mathcal{H}$* è l'applicazione $D^\mathcal{H}\colon \mathcal{E}(M) \to A^1(M; E)$ definita da $D^\mathcal{H} V = \iota_V^{-1} \circ \kappa_V \circ dV$.

Esercizio 4.3.12. Sia $\mathcal{H}$ un sottofibrato orizzontale lineare di un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$. Dimostra che la connessione $D^\mathcal{H}$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare che soddisfa (4.3.11), per cui proviene da una connessione su E, che indicheremo con $\nabla^\mathcal{H}$.

Esercizio 4.3.13. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Dimostra che le corrispondenze $\nabla \mapsto \mathcal{H}^\nabla$ e $\mathcal{H} \mapsto \nabla^\mathcal{H}$ sono una inversa dell'altra, per cui abbiamo una corrispondenza biunivoca fra connessioni su E e sottofibrati orizzontali lineari di TE. $\rfloor$

4.4 La connessione di Levi-Civita

Connessioni su una varietà qualunque ne esistono a bizzeffe; ma lo scopo di questa sezione è mostrare come sia possibile definire in modo canonico una connessione particolarmente utile su ogni varietà Riemanniana.

Definizione 4.4.1: Una connessione ∇ su una varietà Riemanniana (M,g) è *compatibile con la metrica* se

$$\nabla_X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle$$

per tutti gli X, Y, $Z\in\mathcal{T}(M)$.

Proposizione 4.4.1: *Sia ∇ una connessione su una varietà Riemanniana (M,g). Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *∇ è compatibile con g;*
(ii) *$\nabla g\equiv O$;*
(iii) *in un qualunque sistema di coordinate si ha*

$$\partial_k g_{ij}=\Gamma^l_{ki}g_{lj}+\Gamma^l_{kj}g_{il};$$

(iv) *per ogni coppia di campi vettoriali V e W lungo una curva σ abbiamo*

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle=\langle DV,W\rangle+\langle V,DW\rangle;$$

(v) *per ogni coppia di campi vettoriali V e W paralleli lungo una curva σ il prodotto $\langle V,W\rangle$ è costante;*
(vi) *il trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva è un'isometria.*

Dimostrazione: (i)$\Longleftrightarrow$(ii): per definizione,

$$\nabla g(Y,Z,X)=(\nabla_X g)(Y,Z)=X\bigl(\langle Y,Z\rangle\bigr)-\langle\nabla_X Y,Z\rangle-\langle Y,\nabla_X Z\rangle,$$

e ci siamo.

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii): fissato un sistema di coordinate si ha

$$\nabla g(\partial_i,\partial_j,\partial_k)=\partial_k(\langle\partial_i,\partial_j\rangle)-\langle\nabla_{\partial_k}\partial_i,\partial_j\rangle-\langle\partial_i,\nabla_{\partial_k}\partial_j\rangle=\partial_k(g_{ij})-\Gamma^l_{ki}g_{lj}-\Gamma^l_{kj}g_{il},$$

e ci siamo.

(i)$\Longrightarrow$(iv): Basta scrivere localmente $V=V^h\partial_h\circ\sigma$, $W=W^k\partial_k\circ\sigma$, e usare il fatto che

$$\frac{d}{dt}\langle\partial_h,\partial_k\rangle_\sigma=\sigma'(\langle\partial_h,\partial_k\rangle_\sigma).$$

(iv)$\Longrightarrow$(v): se $DV=DW\equiv O$ la (iv) implica che $\langle V,W\rangle$ è costante.

(v)$\Longrightarrow$(vi): infatti la (v) dice esattamente che il trasporto parallelo conserva la metrica.

(vi)$\Longrightarrow$(i): scelto $p\in M$, sia σ una curva con $\sigma(0)=p$ e $\sigma'(0)=X_p$. Fissiamo una base ortonormale $\{v_1,\ldots,v_n\}$ di T_pM; per (vi) possiamo estendere ciascun v_j a un campo vettoriale $v_j(t)$ parallelo lungo σ e tale che $\{v_1(t),\ldots,v_n(t)\}$ sia una base ortonormale di $T_{\sigma(t)}M$ per ogni t. Scriviamo $Y\bigl(\sigma(t)\bigr)=Y^h(t)v_h(t)$ e $Z\bigl(\sigma(t)\bigr)=Z^k(t)v_k(t)$; allora

$$\begin{aligned}\nabla_{X_p}\langle Y,Z\rangle&=\frac{d}{dt}\bigl\langle Y\bigl(\sigma(t)\bigr),Z\bigl(\sigma(t)\bigr)\bigr\rangle\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^n Y^hZ^h\right)\Bigg|_{t=0}=\sum_{h=1}^n\left(\frac{dY^h}{dt}(0)Z^h(0)+Y^h(0)\frac{dZ^h}{dt}(0)\right)\\&=\left\langle\frac{dY^h}{dt}(0)v_h,Z(0)\right\rangle+\left\langle Y(0),\frac{dZ^h}{dt}(0)v_h\right\rangle=\langle D_0Y,Z\rangle+\langle Y,D_0Z\rangle\\&=\langle\nabla_{X_p}Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_{X_p}Z\rangle,\end{aligned}$$

e ci siamo. □

Esercizio 4.4.1. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà Riemanniana (M, g). Dimostra che ∇ è compatibile con g se e solo se le 1-forme di connessione (ω_j^i) rispetto a qualsiasi riferimento locale $\{E_1, \ldots, E_n\}$ di TM sono tali che

$$g_{jk}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k = dg_{ij},$$

dove $g_{ij} = g(E_i, E_j)$, come al solito. In particolare, se ∇ è compatibile con la metrica allora la matrice (ω_j^i) rispetto a un riferimento locale ortonormale è necessariamente antisimmetrica.

La compatibilità con la metrica non identifica univocamente una connessione, sfortunatamente:

Esercizio 4.4.2. Dimostra che se ∇ è una connessione compatibile con la metrica su una varietà Riemanniana (M, g), e $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ è tale che

$$\langle A(X, Y), Z\rangle + \langle Y, A(X, Z)\rangle = 0 \tag{4.4.1}$$

per ogni X, Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$ allora $\nabla + A$ è ancora una connessione compatibile con la metrica. Dimostra inoltre che se ∇^1 e ∇^2 sono due connessioni compatibili con la metrica allora $\nabla^1 - \nabla^2$ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{2}$ che soddisfa (4.4.1).

In un certo senso, un campo tensoriale che soddisfa (4.4.1) è antisimmetrico, il che fa sospettare che una connessione compatibile con la metrica e che sia simmetrica in qualche senso dovrebbe essere unica. Il concetto giusto di simmetria è rivelato dal

Lemma 4.4.2: *Data una connessione lineare ∇ su una varietà M, definiamo $\tau: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ ponendo*

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Allora τ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{2}$.

Dimostrazione: Siccome $\tau(Y, X) = -\tau(X, Y)$, per far vedere che τ è un campo tensoriale di tipo $\binom{1}{2}$ grazie alla Proposizione 3.2.1.(ii) è sufficiente dimostrare che τ è $C^\infty(M)$-lineare nella prima variabile. Ma infatti

$$\tau(fX, Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y] = f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)X - f[X, Y] + Y(f)X = f\tau(X, Y).$$

□

Definizione 4.4.2: La *torsione* di una connessione ∇ su una varietà M è il campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}_2^1(M)$ definito da

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

La connessione ∇ è detta *simmetrica* se $\tau \equiv O$.

Esercizio 4.4.3. Dimostra che se ∇ è una connessione lineare di torsione τ allora $\tilde{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2}\tau$ è una connessione lineare simmetrica.

Lemma 4.4.3: *Sia ∇ una connessione su una varietà M. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) ∇ *è simmetrica;*

(ii) *i simboli di Christoffel rispetto a un qualsiasi sistema di coordinate sono simmetrici, cioè $\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h$;*

(iii) *l'Hessiano $\nabla^2 f$ è simmetrico per ogni $f \in C^\infty(M)$.*

Dimostrazione: (i)$\Longleftrightarrow$(ii): Fissiamo una carta locale, e scriviamo $X = X^h\partial_h$ e $Y = Y^k\partial_k$. Allora (4.3.1) ci dà

$$\tau(X, Y) = X^h Y^k [\Gamma_{hk}^j - \Gamma_{kh}^j]\partial_j,$$

per cui $\tau(X, Y) \equiv O$ per ogni X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ se e solo se i simboli di Christoffel sono simmetrici.

(i)$\Longleftrightarrow$(iii): Grazie a (4.3.9) abbiamo

$$\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) = -[X, Y](f) - \nabla_Y X(f) + \nabla_X Y(f) = \tau(X, Y)(f),$$

e ci siamo. □

Esercizio 4.4.4. Trova una connessione lineare ∇ compatibile con una metrica Riemanniana g tale che la connessione $\tilde{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2}\tau$ non sia compatibile con g, dove τ è la torsione di ∇.

Esercizio 4.4.5. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M, $\{E_1, \dots, E_n\}$ un riferimento locale di TM, $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ il riferimento duale di T^*M, e (ω^i_j) la matrice delle 1-forme di connessione. Sia infine τ la torsione di ∇, e definiamo $\tau^j \colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$ per $j = 1, \dots, n$ tramite la formula

$$\tau(X, Y) = \tau^j(X, Y) E_j.$$

Dimostra che $\tau^1, \dots, \tau^n$ sono delle 2-forme locali (dette *forme di torsione*), e dimostra la *prima equazione di struttura di Cartan:*

$$d\varphi^j = \varphi^i \wedge \omega^j_i + \tau^j$$

per $j = 1, \dots, n$.

Il risultato che permette alla geometria Riemanniana di prendere davvero vita è il seguente:

Teorema 4.4.4: *Su ogni varietà Riemanniana (M, g) esiste un'unica connessione ∇ simmetrica e compatibile con la metrica. Inoltre, ∇ soddisfa*

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle \} \tag{4.4.2}$$

per ogni X, Y, $Z \in \mathcal{T}(M)$. In particolare, se $\{E_1, \dots, E_n\}$ è un riferimento locale ortonormale abbiamo

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = \frac{1}{2} \Big\{ \langle [E_i, E_j], E_k\rangle - \langle [E_j, E_k], E_i\rangle + \langle [E_k, E_i], E_j\rangle \Big\}, \tag{4.4.3}$$

mentre i simboli di Christoffel di ∇ sono dati da

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \tag{4.4.4}$$

Dimostrazione: Cominciamo con l'unicità. Se ∇ è una connessione compatibile con g si deve avere

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

Quindi se ∇ è anche simmetrica otteniamo

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle + \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle \\ &= -\langle [Z, X], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle, \end{aligned}$$

e quindi ∇ è data da (4.4.2).

Viceversa, definiamo $\nabla \colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ tramite (4.4.2); dobbiamo verificare che otteniamo una connessione simmetrica compatibile con la metrica. Iniziamo mostrando che il secondo membro di (4.4.2) è $C^\infty(M)$-lineare in Z; infatti

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, fZ\rangle &= \frac{1}{2} \{ X\langle Y, fZ\rangle + Y\langle fZ, X\rangle - fZ\langle X, Y\rangle + \langle [X, Y], fZ\rangle - \langle [Y, fZ], X\rangle + \langle [fZ, X], Y\rangle \} \\ &= f\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \frac{1}{2} \{ X(f)\langle Y, Z\rangle + Y(f)\langle Z, X\rangle - Y(f)\langle Z, X\rangle - X(f)\langle Z, Y\rangle \} \\ &= f\langle \nabla_X Y, Z\rangle. \end{aligned}$$

Quindi $\langle\nabla_X Y,\cdot\rangle$ è una 1-forma, per cui $\nabla_X Y = \langle\nabla_X Y,\cdot\rangle^\#$ è effettivamente un campo vettoriale.

Poi, ∇ è $C^\infty(M)$-lineare nel primo argomento:

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{fX}Y,Z\rangle &= \frac{1}{2}\Big\{fX\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,fX\rangle - Z\langle fX,Y\rangle + \langle[fX,Y],Z\rangle - \langle[Y,Z],fX\rangle + \langle[Z,fX],Y\rangle\Big\}\\ &= f\langle\nabla_X Y,Z\rangle + \frac{1}{2}\Big\{Y(f)\langle Z,X\rangle - Z(f)\langle X,Y\rangle - Y(f)\langle X,Z\rangle + Z(f)\langle X,Y\rangle\Big\} = \langle f\nabla_X Y,Z\rangle,\end{aligned}$$

come voluto. In modo analogo (esercizio) si verifica la formula di Leibniz. Controlliamo ora la compatibilità con la metrica:

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle &= \frac{1}{2}\Big\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle[X,Y],Z\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle + \langle[Z,X],Y\rangle\Big\}\\ &\quad + \frac{1}{2}\Big\{X\langle Z,Y\rangle + Z\langle Y,X\rangle - Y\langle X,Z\rangle + \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Z,Y],X\rangle + \langle[Y,X],Z\rangle\Big\}\\ &= X\langle Y,Z\rangle,\end{aligned}$$

come desiderato. Infine è facile vedere (esercizio) che ∇ è anche simmetrica.

La (4.4.2) chiaramente implica la (4.4.3). Infine, siccome $[\partial_h,\partial_k]=O$ per ogni h, $k=1,\dots,n$, abbiamo

$$g_{kl}\Gamma_{ij}^k = \langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l\rangle = \frac{1}{2}\big(\partial_i(g_{jl}) + \partial_j(g_{li}) - \partial_l(g_{ij})\big),$$

e la (4.4.4) segue. □

Definizione 4.4.3: Sia M una varietà Riemanniana. L'unica connessione ∇ simmetrica e compatibile con la metrica si dice *connessione di Levi-Civita* della varietà Riemanniana M.

Osservazione 4.4.1. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato solo il fatto che $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ fosse un prodotto scalare non degenere, e non che fosse definito positivo. Quindi è possibile definire una connessione di Levi-Civita in varietà equipaggiate con un campo tensoriale $g\in\mathcal{T}_2(M)$ simmetrico e non degenere (cioè tale che $g_p(v,w)=0$ per ogni $w\in T_pM$ implica $v=O$). Questo è utile, per esempio, in relatività generale.

Esempio 4.4.1. La connessione piatta è la connessione di Levi-Civita per la metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 4.4.2. Sia M una varietà Riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇^M, e N una sottovarietà di M. Se indichiamo con $\pi\colon TM\to TN$ la proiezione ortogonale (dove: per ogni $p\in N$ consideriamo T_pN come sottospazio di T_pM, e $\pi|_{T_pM}\colon T_pM\to T_pN$ è la proiezione ortogonale rispetto al prodotto scalare dato dalla metrica su M), allora si verifica facilmente (esercizio) che $\nabla^N\colon\mathcal{T}(N)\times\mathcal{T}(N)\to\mathcal{T}(N)$ data da

$$\forall X,Y\in\mathcal{T}(N)\qquad \nabla^N_X Y = \pi(\nabla^M_X Y)$$

è una connessione simmetrica, in quanto ∇^M lo è. Inoltre, se mettiamo su N la metrica g^N indotta da quella di M, si vede subito (esercizio) che ∇^N è compatibile con g^N, e quindi ∇^N è proprio la connessione di Levi-Civita di N considerata con la metrica indotta.

Esercizio 4.4.6. Dimostra che se M è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ equipaggiata con la metrica indotta dalla metrica euclidea, allora i simboli di Christoffel introdotti nella teoria classica delle superfici coincidono con quelli introdotti qui.

Una conseguenza immediata dell'unicità della connessione di Levi-Civita è la seguente

Proposizione 4.4.5: *Sia $F\colon(M,g)\to(\tilde M,\tilde g)$ un'isometria fra due varietà Riemanniane. Allora:*

(i) *F porta la connessione di Levi-Civita ∇ di M nella connessione di Levi-Civita $\tilde\nabla$ di $\tilde M$ nel senso che*

$$\forall X,Y\in\mathcal{T}(M)\qquad dF(\nabla_X Y) = \tilde\nabla_{dF(X)}dF(Y);$$

(ii) *se σ è una curva in M si ha*

$$\forall V\in\mathcal{T}(\sigma)\qquad dF(DV) = \tilde D\big(dF(V)\big),$$

dove D (rispettivamente, $\tilde{D}$) è la derivata covariante lungo la curva σ (rispettivamente, $\tilde{\sigma} = F \circ \sigma$) indotta da ∇ (rispettivamente, $\tilde{\nabla}$).

Dimostrazione: (i) Definiamo un'applicazione $F^*\tilde{\nabla}: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ ponendo

$$\forall X, Y \in \mathcal{T}(M) \qquad (F^*\tilde{\nabla})_X Y = (dF)^{-1}\big(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)\big).$$

Si vede subito che $F^*\tilde{\nabla}$ è una connessione su M. Inoltre

$$\begin{aligned}\langle (F^*\tilde{\nabla})_X Y, Z\rangle_M + \langle Y, (F^*\tilde{\nabla})_X Z\rangle_M &= \big\langle (dF)^{-1}\big(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)\big), Z\big\rangle_M + \big\langle Y, (dF)^{-1}\big(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Z)\big)\big\rangle_M \\ &= \langle \tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y), dF(Z)\rangle_{\tilde{M}} + \langle dF(Y), \tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Z)\rangle_{\tilde{M}} \\ &= dF(X)\big(\langle dF(Y), dF(Z)\rangle_{\tilde{M}}\big) = dF(X)\big(\langle Y, Z\rangle_M \circ F^{-1}\big) \\ &= X\langle Y, Z\rangle_M,\end{aligned}$$

per cui $F^*\tilde{\nabla}$ è compatibile con la metrica. Infine

$$\begin{aligned}(F^*\tilde{\nabla})_X Y - (F^*\tilde{\nabla})_Y X - [X, Y] &= (dF)^{-1}\big(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y) - \tilde{\nabla}_{dF(Y)} dF(X)\big) - [X, Y] \\ &= (dF)^{-1}\big([dF(X), dF(Y)]\big) - [X, Y] \\ &= O,\end{aligned}$$

(dove abbiamo usato l'Esercizio 3.3.3), per cui $F^*\tilde{\nabla}$ è simmetrica. Il Teorema 4.4.4 implica allora $F^*\tilde{\nabla} = \nabla$, come voluto.

(ii) Se si definisce $F^*\tilde{D}: \mathcal{T}(\sigma) \to \mathcal{T}(\sigma)$ con

$$(F^*\tilde{D})V = (dF)^{-1}\big(\tilde{D}dF(V)\big),$$

l'unicità di D enunciata nella Proposizione 4.3.3 (assieme a $F^*\tilde{\nabla} = \nabla$) implicano che $F^*\tilde{D} = D$, e ci siamo. $\square$

Esercizio 4.4.7. Sia $F: M \to N$ un'immersione globalmente iniettiva, e g una metrica Riemanniana su N. Indichiamo con ∇ la connessione di Levi-Civita su N, e per ogni $p \in M$ sia $\pi_p: T_{F(p)}N \to dF_p(T_pM)$ la proiezione ortogonale. Definiamo $F^*\nabla: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ ponendo

$$F^*\nabla_X Y(p) = (dF_p)^{-1}\big(\pi_p\big(\nabla_{dF_p(X)} dF(Y)\big)\big).$$

Dimostra che $F^*\nabla$ è la connessione di Levi-Civita della metrica F^*g su M.

Avendo a disposizione una connessione e una metrica possiamo introdurre la generalizzazione di un altro concetto dell'Analisi classica. Per farlo ci serve un risultato di algebra lineare che lasciamo per esercizio.

Definizione 4.4.4: La *traccia* di una forma bilineare simmetrica $S: V \times V \to \mathbb{R}$ su uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto scalare definito positivo è definita da

$$\mathrm{tr}(S) = \sum_{j=1}^{n} S(v_j, v_j), \tag{4.4.5}$$

dove $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una qualunque base ortonormale di V.

Esercizio 4.4.8. Verifica che il secondo membro di (4.4.5) non dipende dalla base ortonormale scelta, per cui la traccia di una forma bilineare simmetrica è ben definita.

Definizione 4.4.5: Sia M una varietà Riemanniana, e $f \in C^\infty(M)$. Diremo *Laplaciano* di f la funzione

$$\Delta f = \mathrm{tr}(\nabla^2 f),$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di f.

Esercizio 4.4.9. Dimostra che

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad}(f),$$

e che in coordinate locali si ha

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{G}\, g^{jk}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right),$$

dove $G = \det(g_{ij})$.

Concludiamo questo capitolo determinando la connessione di Levi-Civita in alcuni casi particolarmente significativi. Nell'Esempio 4.4.1 abbiamo trovato la connessione di Levi-Civita per $\mathbb{R}^n$; vediamo adesso l'aspetto delle connessioni di Levi-Civita sulla sfera e sullo spazio iperbolico.

Esempio 4.4.3. Sia g_R la metrica sferica su $S^n_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (Esempio 4.2.1); vogliamo calcolare i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita di g_R rispetto alle coordinate sferiche. Conservando le notazioni introdotte nell'Esempio 4.2.1 abbiamo

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^l} = \begin{cases} 2R^2(\sin\theta^{l+1}\cdots\sin\theta^n)^2\dfrac{\cos\theta^l}{\sin\theta^l} & \text{se } i = j < l,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Quindi (4.4.4) ci dà

$$\Gamma^k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta^{\max\{i,j\}}}{\sin\theta^{\max\{i,j\}}} & \text{se } k = i < j \text{ o } k = j < i,\\ -\dfrac{1}{2}(\sin\theta^{i+1}\cdots\sin\theta^{k-1})^2\sin(2\theta^k) & \text{se } i = j < k,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

In particolare, per la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ otteniamo

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \mathrm{ctg}\theta^2, \quad \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}\sin(2\theta^2).$$

Esempio 4.4.4. Calcoliamo i simboli di Christoffel per la connessione di Levi-Civita sullo spazio iperbolico (Esempio 4.2.3). Cominciamo con B^n_R; una base dello spazio tangente è data da $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n\}$, per cui

$$g_{ij} = \frac{4R^4}{(R^2 - \|x\|^2)^2}\delta_{ij}, \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{16R^4x^k}{(R^2 - \|x\|^2)^3}\delta_{ij},$$

e quindi

$$\Gamma^k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2x^j}{R^2 - \|x\|^2} & \text{se } i = k,\\ \dfrac{2x^i}{R^2 - \|x\|^2} & \text{se } j = k \neq i,\\ -\dfrac{2x^k}{R^2 - \|x\|^2} & \text{se } i = j \neq k,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Nel caso di H^n_R, la base dello spazio tangente è la stessa, ma

$$g_{ij} = \frac{R^2}{(x^n)^2}\delta_{ij}, \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -\frac{2R^2}{(x^n)^3}\delta_{ij}\delta_{kn},$$

per cui

$$\Gamma^k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} & \text{se } i = j < k = n,\\ -\dfrac{1}{x^n} & \text{se } i = k < j = n \text{ o } j = k < i = n \text{ o } i = j = k = n,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Esercizio 4.4.10. Calcola i simboli di Christoffel della metrica g^1_R di U^n_R rispetto alle coordinate locali

$$\varphi(u^1,\dots,u^n)=\left(u^1,\dots,u^n,\sqrt{R^2+\|u\|^2}\right).$$

Esempio 4.4.5. Sia G un gruppo di Lie su cui abbiamo messo una metrica invariante a sinistra g, e indichiamo con $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie, e con ∇ la connessione di Levi-Civita. Prima di tutto, è facile verificare che ∇ è invariante a sinistra, cioè che

$$\nabla_X Y(h)=dL_h\bigl(\nabla_{dL_{h^{-1}}(X)}dL_{h^{-1}}(Y)(e)\bigr) \tag{4.4.6}$$

per ogni X, $Y\in\mathcal{T}(G)$ e $h\in G$. Infatti, se usiamo il lato destro di (4.4.6) per definire una nuova connessione $\tilde\nabla$, si vede subito che $\tilde\nabla$ è (effettivamente una connessione ed è) simmetrica e compatibile con la metrica, per cui coincide con ∇. Se $\{X_1,\dots,X_n\}$ è una base di $\mathfrak{g}$, estendiamo gli X_j a campi vettoriali invarianti a sinistra. Chiaramente otteniamo un riferimento globale per TG, e ogni campo vettoriale su G (non necessariamente invariante a sinistra) si scrive come combinazione lineare a coefficienti in $C^\infty(G)$ di $X_1,\dots,X_n$. Quindi per determinare ∇ ci basta vedere quanto fa applicata agli X_j; e per l'invarianza a sinistra ci basta effettuare questo calcolo nell'identità. Ora, l'invarianza a sinistra di g implica che $g_{ij}=\langle X_i,X_j\rangle$ è costante su G; quindi la (4.4.2) ci dice che

$$\langle\nabla_{X_i}X_j,X_k\rangle_e=\frac12\bigl(g_{lk}c^l_{ij}-g_{li}c^l_{jk}+g_{lj}c^l_{ki}\bigr), \tag{4.4.7}$$

dove le c^l_{ij} sono le costanti di struttura di $\mathfrak{g}$ rispetto alla base $\{X_1,\dots,X_n\}$ (vedi la Definizione 3.3.10), e abbiamo determinato ∇.

Esempio 4.4.6. Sia $G=GL(n,\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili a coefficienti reali. Prendiamo come base di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ la base canonica $\{E_{ij}\}$, dove E_{ij} è la matrice con 1 al posto (i,j) e 0 altrove, cioè

$$(E_{ij})_{rs}=\delta_{ir}\delta_{js}.$$

Abbiamo visto (Esempio 3.3.2) che le costanti di struttura sono

$$c^{(rs)}_{(ij)(hk)}=\delta_{ir}\delta_{ks}\delta_{jh}-\delta_{rh}\delta_{sj}\delta_{ik}.$$

Mettiamo su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ il prodotto scalare rispetto a cui la base canonica $\{E_{ij}\}$ è ortonormale, ed estendiamolo in modo da avere una metrica Riemanniana invariante a sinistra (che *non* è la metrica euclidea). Allora la (4.4.7) ci fornisce la connessione di Levi-Civita rispetto a questa metrica:

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{E_{ij}}E_{hk},E_{rs}\rangle&=\frac12[c^{(rs)}_{(ij)(hk)}-c^{(ij)}_{(hk)(rs)}+c^{(hk)}_{(rs)(ij)}]\\&=\frac12[\delta_{ir}\delta_{kj}\delta_{jh}-\delta_{hr}\delta_{js}\delta_{ik}-\delta_{hi}\delta_{sj}\delta_{kr}+\delta_{ir}\delta_{jk}\delta_{hs}+\delta_{hr}\delta_{jk}\delta_{is}-\delta_{ih}\delta_{ks}\delta_{jr}].\end{aligned}$$