Capitolo 3

Fibrati vettoriali

3.1 Definizioni ed esempi

Uno dei motivi per cui la struttura di varietà è così utile è che l'unione disgiunta degli spazi tangenti a una varietà ha a sua volta una struttura naturale di varietà. Si tratta del primo esempio di una categoria di oggetti estremamente importanti, i fibrati vettoriali.

Definizione 3.1.1: Un *fibrato vettoriale* di *rango* r su una varietà M è un'applicazione differenziabile surgettiva $\pi\colon E \to M$ fra una varietà E (detta *spazio totale* del fibrato) e la varietà M (detta *base* del fibrato) che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) per ogni $p \in M$ l'insieme $E_p = \pi^{-1}(p)$, detto *fibra* di E sopra p, è dotato di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione r, e indicheremo con O_p il vettore nullo di E_p;
(ii) per ogni $p \in M$ esiste un intorno U di p in M e un diffeomorfismo $\chi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, detto *banalizzazione locale* di E, tale che $\pi_1 \circ \chi = \pi$ (dove abbiamo indicato con $\pi_1\colon U \times \mathbb{R}^r \to U$ la proiezione sulla prima coordinata), e tale che la restrizione di χ a ciascuna fibra sia un isomorfismo fra gli spazi vettoriali E_p e $\{p\} \times \mathbb{R}^r$.

I fibrati vettoriali di rango 1 sono chiamati *fibrati in rette*. Quando non c'è rischio di confondersi useremo lo spazio totale E per indicare un fibrato vettoriale $\pi\colon E \to M$, sottintendendo la proiezione π. Infine, partendo da spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ invece che da spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ si ottiene la nozione di *fibrato vettoriale complesso*.

In altre parole, un fibrato vettoriale è un modo differenziabile di associare uno spazio vettoriale a ciascun punto di una varietà.

Esempio 3.1.1. Se M è una varietà, allora $E = M \times \mathbb{R}^r$ considerato con la proiezione $\pi\colon M \times \mathbb{R}^r \to M$ sulla prima coordinata è un fibrato vettoriale di rango r, detto *fibrato banale*.

Esempio 3.1.2. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su M di rango r, e $U \subset M$ un aperto. Allora $\pi_U\colon E_U \to U$, dove $E_U = \pi^{-1}(U)$ e $\pi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, è un fibrato vettoriale di rango r su U, detto *restrizione* di E a U.

Esercizio 3.1.1. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r sulla varietà M, e $S \subset M$ una sottovarietà. Dimostra che $\pi_S\colon E|_S \to S$, dove $E|_S = \pi^{-1}(S)$ e $\pi_S = \pi|_{\pi^{-1}(S)}$, è un fibrato vettoriale di rango r su S, detto *restrizione* di E a S. (*Suggerimento:* può essere utile l'Esercizio 2.5.12).

C'è un modo tipico per verificare se una collezione di spazi vettoriali è un fibrato vettoriale:

Proposizione 3.1.1: *Siano M una varietà, E un insieme e $\pi\colon E \to M$ un'applicazione surgettiva. Supponiamo di avere un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M e applicazioni bigettive $\chi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ tali che*

(a) $\pi_1 \circ \chi_\alpha = \pi$, *dove $\pi_1\colon U \times \mathbb{R}^r \to U$ è la proiezione sulla prima coordinata;*
(b) *per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ esiste un'applicazione differenziabile*

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$$

tale che la composizione $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$ sia della forma

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, v) = \bigl(p, g_{\alpha\beta}(p)v\bigr). \tag{3.1.1}$$

Allora l'insieme E ammette un'unica struttura di fibrato vettoriale di rango r su M per cui le χ_α siano banalizzazioni locali.

Dimostrazione: Poniamo $E_p = \pi^{-1}(p)$ per ogni $p \in M$. Se $p \in U_\alpha$, la restrizione di χ_α a E_p è una bigezione con $\{p\} \times \mathbb{R}^r$, e quindi possiamo usarla per definire una struttura di spazio vettoriale su E_p: se u_1, $u_2 \in E_p$ sono tali che $\chi_\alpha(u_j) = (p, v_j)$ per opportuni v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^r$, poniamo

$$u_1 + u_2 = \chi_\alpha^{-1}(p, v_1 + v_2) \qquad \text{e} \qquad \lambda u_1 = \chi_\alpha^{-1}(p, \lambda v_1) \tag{3.1.2}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. A priori, la struttura di spazio vettoriale così definita potrebbe dipendere dalla banalizzazione χ_α usata, nel qual caso saremmo nei guai, in quanto in un fibrato vettoriale la struttura di spazio vettoriale delle fibre dev'essere definita indipendentemente dalle banalizzazioni. Ma per fortuna la (3.1.1) ci evita questo problema. Infatti, se p appartiene anche a un altro U_β, e scriviamo $\chi_\beta(u_j) = (p, w_j)$ per opportuni w_1, $w_2 \in \mathbb{R}^r$, abbiamo

$$(p, v_j) = \chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, w_j) = \bigl(p, g_{\alpha\beta}(p) w_j\bigr),$$

cioè $v_j = g_{\alpha\beta}(p) w_j$, e quindi

$$\begin{aligned} \chi_\alpha^{-1}(p, v_1 + v_2) &= \chi_\alpha^{-1}\bigl(p, g_{\alpha\beta}(p)w_1 + g_{\alpha\beta}(p)w_2\bigr) = \chi_\alpha^{-1}\bigl(p, g_{\alpha\beta}(p)(w_1 + w_2)\bigr) \\ &= \chi_\alpha^{-1} \circ (\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1})(p, w_1 + w_2) = \chi_\beta^{-1}(p, w_1 + w_2), \end{aligned}$$

per cui l'operazione di somma non dipende dalla banalizzazione usata per definirla. Analogamente si dimostra che l'operazione di prodotto per uno scalare è ben definita.

Poniamo ora $\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ e $\tilde{\chi}_\alpha = (\varphi_\alpha, \mathrm{id}) \circ \chi_\alpha$. Allora $\tilde{\chi}_\alpha \circ \tilde{\chi}_\beta^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, g_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta^{-1})$ è di classe C^∞, per cui $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\chi}_\alpha)\}$ è un atlante su E di dimensione $n + r$, che soddisfa (esercizio) tutte le proprietà necessarie perché $\pi: E \to M$ sia un fibrato vettoriale.

Viceversa, supponiamo di avere su E una struttura di fibrato vettoriale per cui le χ_α siano banalizzazioni locali. In tal caso, le χ_α devono indurre isomorfismi fra le fibre ed $\mathbb{R}^r$, per cui la (3.1.2) dev'essere valida, e la struttura di spazio vettoriale su ciascuna fibra è unica. Inoltre, le $\tilde{\chi}_\alpha = (\varphi_\alpha, \mathrm{id}) \circ \chi_\alpha$ sono chiaramente diffeomorfismi con aperti di $\mathbb{R}^{n+r}$, dove $n = \dim M$, e quindi la struttura differenziabile di E coincide con quella indotta dall'atlante $\tilde{A}$ definito tramite le $\tilde{\chi}_\alpha$. □

Definizione 3.1.2: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale. Diremo che una carta locale (U, φ) di M *banalizza* E se esiste una banalizzazione locale del fibrato definita su $\pi^{-1}(U)$. Un atlante $\mathcal{A}$ di M *banalizza* il fibrato E se ogni carta di $\mathcal{A}$ lo fa.

Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante che banalizza un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$, e indichiamo con χ_α la banalizzazione sopra U_α. Allora le composizioni $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}$ devono indurre per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ un isomorfismo di $\mathbb{R}^r$ che dipende in modo C^∞ da p, per cui devono necessariamente esistere applicazioni differenziabili $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ che soddisfano (3.1.1).

Definizione 3.1.3: Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante che banalizza un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$. Le applicazioni $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ che soddisfano (3.1.1) sono dette *funzioni di transizione* per il fibrato E rispetto all'atlante $\mathcal{A}$.

I prossimi due esercizi mostrano come per definire un fibrato vettoriale su una varietà M sia sufficiente avere le funzioni di transizione.

Esercizio 3.1.2. Siano $\{g_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$ rispetto a un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M. Dimostra che $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}^{-1}$ (inversa di matrici) su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, e che $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ (prodotto di matrici) su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$.

Esercizio 3.1.3. Supponiamo di avere un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ su M, e funzioni $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ che soddisfano le proprietà dell'esercizio precedente. Dimostra che esiste un unico (a meno di isomorfismi: vedi oltre per l'ovvia definizione di isomorfismo fra fibrati vettoriali) fibrato vettoriale E su M che abbia le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione rispetto all'atlante $\mathcal{A}$. (*Suggerimento:* leggi l'Esempio 3.1.4 più sotto.)

Proviamo ad applicare la Proposizione 3.1.1 agli spazi tangenti. Data una varietà M, indichiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi tangenti T_pM al variare di $p\in M$, e sia $\pi\colon TM\to M$ la proiezione che manda ciascun T_pM in p. Dato un atlante $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, possiamo definire bigezioni $\chi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n v^j\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right|_p\right)=(p,v),$$

dove $\varphi_\alpha=(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n)$ e $v=(v^1,\dots,v^n)$. La (2.4.2) ci dice allora che

$$\chi_\alpha\circ\chi_\beta^{-1}(p,v)=\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n v^j\left.\frac{\partial}{\partial x_\beta^j}\right|_p\right)=\chi_\alpha\left(\sum_{h=1}^n\left[\sum_{j=1}^n\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^j}(p)v^j\right]\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^h}\right|_p\right)=\left(p,\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}(p)v\right),$$

dove $\partial x_\alpha/\partial x_\beta$ è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$. Quindi (3.1.1) è soddisfatta con

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta},$$

per cui otteniamo una struttura di fibrato vettoriale su TM.

Definizione 3.1.4: Sia M una varietà di dimensione n. Il fibrato vettoriale $\pi\colon TM\to M$ di rango n con la struttura appena definita si dice *fibrato tangente* alla varietà.

Un altro esempio è il fibrato cotangente. Indichiamo con T_p^*M lo spazio duale di T_pM, e con T^*M l'unione disgiunta dei T_p^*M al variare di $p\in M$, con l'ovvia proiezione $\pi\colon T^*M\to M$. Data una carta locale $\varphi_\alpha=(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n)$ in un punto $p\in M$, indichiamo con $\{dx_\alpha^1|_p,\dots,dx_\alpha^n|_p\}$ la base di T_p^*M duale della base $\{\partial/\partial x_\alpha^1|_p,\dots,\partial/\partial x_\alpha^n|_p\}$ di T_pM. È facile verificare che (2.4.2) implica

$$dx_\beta^k|_p=\sum_{h=1}^n\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^h}(p)\,dx_\alpha^h|_p,\tag{3.1.3}$$

per cui possiamo nuovamente applicare la Proposizione 3.1.1. Infatti, se definiamo $\chi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^n$ anche stavolta ponendo

$$\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n w_j\,dx_\alpha^j|_p\right)=(p,w^T),$$

dove $w^T\in\mathbb{R}^n$ è il vettore colonna trasposto del vettore riga $(w_1,\dots,w_n)\in(\mathbb{R}^n)^*$, otteniamo

$$\chi_\alpha\circ\chi_\beta^{-1}(p,w^T)=\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n w_j\,dx_\beta^j|_p\right)=\chi_\alpha\left(\sum_{h=1}^n\left[\sum_{j=1}^n\frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^h}(p)w_j\right]dx_\alpha^h|_p\right)=\left(p,\left[\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}(p)\right]^T w^T\right),$$

per cui recuperiamo (3.1.1) con

$$g_{\alpha\beta}=\left[\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right]^T,$$

dove A^T indica la trasposta della matrice A.

Definizione 3.1.5: Sia M una varietà di dimensione n. Il fibrato vettoriale $\pi\colon T^*M\to M$ di rango n con la struttura appena definita si dice *fibrato cotangente* alla varietà.

Osservazione 3.1.1. Data una carta locale $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$ in un punto p di una varietà M, abbiamo introdotto due notazioni pericolosamente simili: dx_p^j, che indica il differenziale in p della funzione coordinata x^j, e $dx^j|_p$, l'elemento della base duale di T_p^*M. Per fortuna, ricordando l'Osservazione 2.4.6 di fatto possiamo identificare questi due oggetti. Infatti, dx_p^j è un'applicazione lineare da T_pM a valori in $\mathbb{R}$, per cui è un elemento di T_p^*M; inoltre,

$$dx_p^j\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_p\right)=\frac{\partial x^j}{\partial x^h}(p)=\delta_h^j,$$

per cui $dx_p^j=dx^j|_p$.

Osservazione 3.1.2. Come diventerà ancora più chiaro a partire dal prossimo capitolo, in geometria differenziale è importante mantenere distinti vettori colonna e vettori riga, ovvero non identificare $\mathbb{R}^n$ con il suo duale $(\mathbb{R}^n)^*$. La scelta di una base fornisce un isomorfismo fra T_pM e $\mathbb{R}^n$; la scelta della base duale corrisponde a considerare l'inversa del duale di questo isomorfismo, e quindi identifica T_p^*M con $(\mathbb{R}^n)^*$. In altre parole, le coordinate rispetto alla base duale degli elementi di T_p^*M vivono in maniera naturale in $(\mathbb{R}^n)^*$, per cui sono vettori riga, e non vettori colonna. Siccome come modello per i fibrati vettoriali usiamo $\mathbb{R}^n$ e non il suo duale, nelle formule riguardanti il fibrato cotangente siamo costretti a introdurre la trasposizione. In particolare, le funzioni di transizione del fibrato cotangente sono le inverse trasposte delle funzioni di transizione del fibrato tangente, e non semplicemente le inverse.

Nel Capitolo 1 abbiamo visto altre operazioni che possiamo effettuare sugli spazi vettoriali T_pM; possiamo per esempio costruire l'algebra tensoriale, o l'algebra esterna. Abbiamo anche visto come ottenere delle basi di questi spazi, facendo prodotti tensoriali o prodotti esterni di elementi delle basi di T_pM e T_p^*M. La multilinearità del prodotto tensoriale e del prodotto esterno ci dice anche come cambiano queste basi cambiando carte locali: otteniamo formule del tipo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_r}} \otimes dx_\beta^{h_1} \otimes \cdots \otimes dx_\beta^{h_s} \\ = \sum_{a_1,\ldots,a_r=1}^{n} \sum_{b_1,\ldots,b_s=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha^{a_1}}{\partial x_\beta^{j_1}} \cdots \frac{\partial x_\alpha^{a_r}}{\partial x_\beta^{j_r}} \frac{\partial x_\beta^{h_1}}{\partial x_\alpha^{b_1}} \cdots \frac{\partial x_\beta^{h_s}}{\partial x_\alpha^{b_s}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{a_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{a_r}} \otimes dx_\alpha^{b_1} \otimes \cdots \otimes dx_\alpha^{b_s},\end{aligned}$$

per cui possiamo procedere (esercizio) come fatto nel caso dei fibrati tangente e cotangente, ottenendo i fibrati tensoriali.

Definizione 3.1.6: Sia M una varietà. Indichiamo con T_l^kM l'unione disgiunta degli spazi $T_l^k(T_pM)$ al variare di $p \in M$, e sia $\pi: T_l^kM \to M$ la proiezione associata. Allora T_l^kM, con la struttura naturale sopra descritta, è detto *fibrato dei* $\binom{k}{l}$*-tensori* su M. Indicheremo invece con $\bigwedge^r M$ il *fibrato delle* r*-forme* ottenuto prendendo l'unione disgiunta degli spazi $\bigwedge^r(T_p^*M)$. In particolare, $\bigwedge^1 M = T^*M$.

Osservazione 3.1.3. Attenzione: $\bigwedge_p^r M$ è uguale a $\bigwedge^r(T_p^*M)$ e non a $\bigwedge^r(T_pM)$ come ci si sarebbe potuti aspettare, per cui $\bigwedge^r M$ è contenuto in T_r^0M invece di T_0^rM. Il motivo di questa scelta è che mentre il fibrato delle r-forme come definito qui è infinitamente utile in geometria differenziale, il fibrato ottenuto considerando gli spazi $\bigwedge^r(T_pM)$ viene usato così di rado da non meritare un simbolo speciale.

I fibrati tensoriali naturalmente non esauriscono la categoria dei fibrati vettoriali interessanti.

Esempio 3.1.3. Sia S una sottovarietà di dimensione k di una varietà n-dimensionale M. Abbiamo già osservato come per ogni $p \in S$ possiamo identificare ciascun T_pS con un sottospazio vettoriale di T_pM. Allora il *fibrato normale* di S in M è il fibrato vettoriale N_S su S di rango $n-k$ ottenuto prendendo l'unione disgiunta degli spazi vettoriali quozienti T_pM/T_pS, con la proiezione naturale $\pi: N_S \to S$. Per costruire le banalizzazioni locali, scegliamo un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di S in modo che ciascuna carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ provenga da una carta $(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$ di M come indicato nel Corollario 2.5.4. In particolare, posto $\tilde{\varphi}_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$, per ogni $p \in U_\alpha$ i vettori $\{\partial/\partial x_\alpha^1|_p, \ldots, \partial/\partial x_\alpha^k|_p\}$ formano una base di T_pS, per cui una base di T_pM/T_pS è data da $\{\partial/\partial x_\alpha^{k+1}|_p + T_pS, \ldots, \partial/\partial x_\alpha^n|_p + T_pS\}$. Quindi possiamo definire una banalizzazione locale $\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^{n-k}$ ponendo

$$\chi_\alpha\left(\sum_{j=1}^{n-k} v^j \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{n+j}}\right|_p + T_pS\right)\right) = (p, v),$$

e non è difficile (esercizio) verificare che le ipotesi della Proposizione 3.1.1 sono soddisfatte.

Esercizio 3.1.4. Definisci i concetti di sottofibrato di un fibrato vettoriale, di quoziente di un fibrato per un suo sottofibrato, di somma diretta e di prodotto tensoriale di due fibrati sulla stessa varietà, e verifica che il fibrato normale N_S introdotto nel precedente esempio può essere identificato con il fibrato quoziente $TM|_S/TS$, dove $TM|_S$ è la restrizione di TM a S (vedi l'Esercizio 3.1.1).

Esempio 3.1.4. Vogliamo introdurre una famiglia di fibrati in rette sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Sia $\mathcal{A} = \{(U_0, \varphi_0), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$ l'atlante introdotto nell'Esempio 2.1.12, e prendiamo $d \in \mathbb{Z}$. Indichiamo con E_d l'unione disgiunta degli insiemi $U_0 \times \mathbb{R}, \dots, U_n \times \mathbb{R}$ quozientato rispetto alla relazione d'equivalenza $\sim$ così definita: $(x, \lambda) \in U_h \times \mathbb{R}$ è equivalente a $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \in U_k \times \mathbb{R}$ se e solo se

$$x = \tilde{x} \qquad \text{e} \qquad \lambda = \left(\frac{x^k}{x^h}\right)^d \tilde{\lambda},$$

dove abbiamo scritto $x = [x^0 : \cdots : x^n]$ come al solito. In particolare, $(x, \lambda) \sim (\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ implica che $x = \tilde{x} \in U_h \cap U_k$, per cui la relazione d'equivalenza è ben definita e abbiamo una proiezione naturale $\pi: E_d \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. È ora facile usare la Proposizione 3.1.1 per dimostrare che abbiamo definito dei fibrati in rette: infatti per ogni $j = 0, \dots, n$ la proiezione sul quoziente è una bigezione fra $U_j \times \mathbb{R}$ e $\pi^{-1}(U_j)$, per cui possiamo usarne l'inversa $\chi_j: \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}$ per definire le banalizzazioni locali. Per costruzione le funzioni di transizione $g_{hk}: U_h \cap U_k \to GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ sono date da

$$g_{hk}(x) = \left(\frac{x_k}{x_h}\right)^d.$$

Chiaramente, $E_0 = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ è il fibrato in rette banale. Si può inoltre dimostrare che gli E_d, a meno di isomorfismi (vedi sotto per la definizione — ovvia — di isomorfismo fra fibrati), sono tutti e soli i fibrati in rette su $\mathbb{P}^n$.

Concludiamo questo paragrafo introducendo anche le applicazioni fra fibrati:

Definizione 3.1.7: Siano $\pi_1: E_1 \to M_1$ e $\pi_2: E_2 \to M_2$ due fibrati vettoriali. Un *morfismo* fra i due fibrati è una coppia di applicazioni differenziabili $L: E_1 \to E_2$ e $F: M_1 \to M_2$ tali che $\pi_2 \circ L = F \circ \pi_1$ (per cui $L\big((E_1)_p\big) \subseteq (E_2)_{F(p)}$ per ogni $p \in M_1$, cioè L manda fibre in fibre), e che $L|_{(E_1)_p}: (E_1)_p \to (E_2)_{F(p)}$ sia lineare per ogni $p \in M$. Un morfismo invertibile (cioè tale che sia L che F siano diffeomorfismi) è detto *isomorfismo* di fibrati vettoriali. A volte indicheremo un morfismo di fibrati scrivendo semplicemente $L: E_1 \to E_2$ sottintendendo l'applicazione F. Quando $M_1 = M_2$, cioè se E_1 ed E_2 sono fibrati sulla stessa base, a meno di avviso di contrario supporremo sempre che l'applicazione F sia l'identità, per cui L soddisfa $\pi_2 \circ L = \pi_1$. Spesso viene detto *banale* un qualsiasi fibrato vettoriale isomorfo al fibrato banale.

In altre parole, un morfismo di fibrati è un'applicazione che rispetta sia la struttura differenziabile che la struttura di fibrato vettoriale.

Esercizio 3.1.5. Se $F: M \to N$ è un'applicazione differenziabile, dimostra che $dF: TM \to TN$ è un morfismo di fibrati.

Esercizio 3.1.6. Sia $F: M \to N$ un'applicazione differenziabile, e $\pi: E \to N$ un fibrato vettoriale di rango r su N. Per ogni $p \in M$ poniamo $(F^*E)_p = E_{F(p)}$, e sia F^*E l'unione disgiunta degli $(F^*E)_p$ al variare di $p \in M$, con la proiezione canonica $\tilde{\pi}: F^*E \to M$. Dimostra che F^*E ha una struttura naturale di fibrato vettoriale di rango r su M, detto *fibrato pull-back* (o *fibrato indotto*) di E rispetto a F. Dimostra inoltre che se $\iota: S \to M$ è una sottovarietà e E è un fibrato su M, allora $\iota^*E = E|_S$.

Esercizio 3.1.7. Sia (L, F) un morfismo fra i fibrati vettoriali $\pi_1: E_1 \to M_1$ e $\pi_2: E_2 \to M_2$. Dimostra che $\operatorname{Ker}(L, F) = \{v \in E_1 \mid L(v) = O_{F(p)}\} \subseteq E_1$ è un sottofibrato di E_1, e che $\operatorname{Im}(L, F) = L(E_1) \subseteq E_2$ è un sottofibrato di E_2.

Esercizio 3.1.8. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante che banalizza due fibrati vettoriali $\pi: E \to M$ e $\tilde{\pi}: \tilde{E} \to M$ di rango r su M, e indichiamo con $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ le relative funzioni di transizione. Dimostra che E e $\tilde{E}$ sono isomorfi se e solo se esistono applicazioni differenziabili $\sigma_\alpha: U_\alpha \to GL(r, \mathbb{R})$ tali che $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} g_{\alpha\beta} \sigma_\beta$.

3.2 Sezioni di fibrati

Quando si ha un fibrato vettoriale, una cosa che risulta molto utile è studiare le applicazioni dalla base allo spazio totale del fibrato che associano a ogni punto della base un elemento della fibra su quel punto.

Definizione 3.2.1: Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M. Una *sezione* di E è un'applicazione differenziabile $s\colon M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, cioè tale che $s(p) \in E_p$ per ogni $p \in M$. Lo spazio vettoriale delle sezioni di E verrà indicato con $\mathcal{E}(M)$. La sezione $O_E \in \mathcal{E}(M)$ che a ogni punto $p \in M$ associa il vettore nullo $O_p \in E_p$ è detta *sezione nulla* di E.

Osservazione 3.2.1. Se $E = M \times \mathbb{R}^r$ è il fibrato banale di rango r, allora lo spazio delle sezioni $\mathcal{E}(M)$ è canonicamente isomorfo allo spazio $C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$ delle applicazioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^r$. Infatti, se $s \in \mathcal{E}(M)$ è una sezione allora $\pi_2 \circ s \in C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$, dove $\pi_2\colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ è la proiezione sulla seconda coordinata; viceversa, se $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$ allora $p \mapsto \big(p, F(p)\big)$ è una sezione di $M \times \mathbb{R}^r$. Quindi in un certo senso le sezioni di un fibrato sono una generalizzazione delle applicazioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^r$.

Osservazione 3.2.2. Ogni fibrato vettoriale ammette sezioni. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r, e $\chi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ una banalizzazione locale. Scegliamo una qualsiasi applicazione differenziabile $F\colon U \to \mathbb{R}^r$ e sia $\rho \in C^\infty(M)$ tale che $\mathrm{supp}(\rho) \subset U$. Allora l'applicazione $s\colon M \to E$ data da

$$s(p) = \begin{cases} \chi^{-1}\big(p, \rho(p)F(p)\big) & \text{se } p \in U, \\ O_p & \text{se } p \in M \setminus \mathrm{supp}(\rho), \end{cases}$$

è chiaramente una sezione di E.

Le sezioni del fibrato tangente, e più in generale dei fibrati tensoriali, hanno nomi particolari.

Definizione 3.2.2: Un *campo vettoriale* su una varietà M è una sezione del fibrato tangente TM. Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali su M verrà indicato con $\mathcal{T}(M)$. Una *k-forma differenziale* su M è una sezione del fibrato $\bigwedge^k M$. Lo spazio vettoriale delle k-forme differenziali su M verrà indicato con $A^k(M)$. Un *campo tensoriale di tipo* $\binom{k}{l}$ (o $\binom{k}{l}$*-tensore*) su M è una sezione del fibrato $T^k_l M$. Lo spazio vettoriale dei $\binom{k}{l}$-tensori verrà indicato con $\mathcal{T}^k_l(M)$.

Osservazione 3.2.3. Se $X \in \mathcal{T}(M)$ è un campo vettoriale e $p \in M$, a volte scriveremo X_p invece di $X(p)$. Analogamente, se $\omega \in A^k(M)$ è una k-forma, a volte scriveremo ω_p invece di $\omega(p)$.

Sia (U, φ) una carta in $p \in M$, e scriviamo $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ come al solito. Abbiamo quindi delle sezioni locali $\partial_1, \ldots, \partial_n$ di TM definite su U ponendo

$$\partial_j(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \in T_pM.$$

Se $X \in \mathcal{T}(M)$ è un campo vettoriale qualsiasi e $p \in U$, allora $X(p)$ dev'essere una combinazione lineare di $\partial_1(p), \ldots, \partial_n(p)$, per cui possiamo trovare funzioni $a^1, \ldots, a^n\colon U \to \mathbb{R}$ tali che

$$X(p) = \sum_{j=1}^n a^j(p)\partial_j(p).$$

Siccome $\big(a^1(p), \ldots, a^n(p)\big) = d\varphi_p\big(X(p)\big)$, si vede subito che le funzioni a^j sono di classe C^∞.

Osservazione 3.2.4. A volte scriveremo anche

$$X = \sum_{j=1}^n \hat{a}^j \partial_j,$$

dove le $\hat{a}^j$ sono funzioni C^∞ definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ (l'immagine della carta locale), e non su un aperto di M (il dominio della carta locale). In altre parole, $\hat{a}^j(x) = a^j \circ \varphi^{-1}(x)$ per ogni $x \in \varphi(U)$.

Se $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ è un'altra carta con $U \cap \tilde{U} \neq \varnothing$, sappiamo che

$$\tilde{\partial}_h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^h}\, \partial_k,$$

su $U \cap \tilde{U}$. Quindi se scriviamo $X = \sum_j a^j \partial_j = \sum_h \tilde{a}^h \tilde{\partial}_h$ troviamo

$$a^j = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^h}\, \tilde{a}^h, \tag{3.2.1}$$

che è la formula che ci dice come cambiano i coefficienti di un campo vettoriale al cambiare della carta.

Esercizio 3.2.1. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante su una n-varietà M. Supponiamo di avere per ogni α una n-upla di funzioni $a_\alpha = (a^1_\alpha, \dots, a^n_\alpha) \in C^\infty(U_\alpha)^n$ in modo che su $U_\alpha \cap U_\beta$ le a_α e le a_β siano legate da (3.2.1). Dimostra che la formula $X = \sum_j a^j_\alpha \partial_{j,\alpha}$, dove $\partial_{j,\alpha} = \partial/\partial x^j_\alpha$, definisce un campo vettoriale globale $X \in \mathcal{T}(M)$.

Dunque la scelta di coordinate locali fornisce una base dello spazio tangente che varia in modo differenziabile sul corrispondente aperto coordinato, il primo esempio di riferimento locale per un fibrato vettoriale.

Definizione 3.2.3: Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r sulla varietà M, e $U \subseteq M$ un aperto di M. Un *riferimento locale* per E su U è una r-upla $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathcal{E}(U)$ di sezioni di E su U tali che $\{\sigma_1(p), \dots, \sigma_r(p)\}$ sia una base di E_p per ogni $p \in U$.

Osservazione 3.2.5. Dare un riferimento locale è equivalente a dare una banalizzazione locale. Infatti, sia $\chi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ una banalizzazione locale di un fibrato vettoriale E di rango r. Ponendo $\sigma_j(p) = \chi^{-1}(p, e_j)$, dove e_j è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^r$, otteniamo chiaramente un riferimento locale per E su U. Viceversa, se $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ è un riferimento locale per E su U, definiamo $\xi: U \times \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(U)$ ponendo

$$\xi(p, w) = w^1 \sigma_1(p) + \cdots + w^r \sigma_r(p) \in E_p.$$

Chiaramente ξ è bigettiva, di classe C^∞, e $\chi = \xi^{-1}$ è una banalizzazione locale. L'unica cosa non del tutto ovvia è verificare che χ sia di classe C^∞. Per dimostrarlo scegliamo una qualsiasi banalizzazione $\tilde{\chi}$ nell'intorno di $p \in U$, e sia $\{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_r\}$ il corrispondente riferimento locale. Inoltre, poniamo $\tilde{\chi}_o = \pi_2 \circ \tilde{\chi}$, dove $\pi_2: U \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ è la proiezione sulla seconda coordinata, in modo che si abbia $\tilde{\chi}(v) = \big(p, \tilde{\chi}_o(v)\big)$. Scriviamo $\tilde{\chi}_o(\sigma_j) = (a^1_j, \dots, a^r_j)$; allora (a^h_j) è una matrice invertibile con elementi di classe C^∞, per cui anche la sua inversa $B = (b^j_h)$ ha tutti gli elementi di classe C^∞, e si ha $\tilde{\sigma}_h = \sum_j b^j_h \sigma_j$. Ma allora se $v \in E_p$ abbiamo

$$v = \sum_{h=1}^{r} \tilde{v}^h \tilde{\sigma}_h = \sum_{h,j=1}^{r} \tilde{v}^h b^j_h \sigma_j,$$

dove $(\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^r) = \tilde{\chi}_o(v)$, per cui $v = \xi(p, w)$ con $w = B\tilde{\chi}_o(v)$, e quindi

$$\chi(v) = \big(p, B\tilde{\chi}_o(v)\big)$$

è di classe C^∞, come voluto.

Osservazione 3.2.6. Una conseguenza della precedente osservazione è che un fibrato vettoriale è (isomorfo al fibrato) banale se e solo se ammette un riferimento globale.

Siano χ_α e χ_β due banalizzazioni locali, e $\{\sigma_{1,\alpha}, \dots, \sigma_{r,\alpha}\}$, $\{\sigma_{1,\beta}, \dots, \sigma_{r,\beta}\}$ i corrispondenti riferimenti locali. Se scriviamo $\sigma_{j,\beta} = \sum_k (g_{\alpha\beta})^k_j\, \sigma_{k,\alpha}$ abbiamo

$$\left(p, \sum_k (g_{\alpha\beta})^k_j e_k\right) = \chi_\alpha\left(\sum_k (g_{\alpha\beta})^k_j \sigma_{k,\alpha}\right) = \chi_\alpha(\sigma_{j,\beta}) = \chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, e_j) = \big(p, g_{\alpha\beta}(p) e_j\big),$$

dove $g_{\alpha\beta}$ è la funzione di transizione da χ_α a χ_β, per cui le $(g_{\alpha\beta})^k_j$ sono le componenti della funzione di transizione $g_{\alpha\beta}$.

Sia ora σ una sezione qualunque di E, e scriviamo $\sigma = \sum_j a^j_\alpha \sigma_{j,\alpha} = \sum_h a^h_\beta \sigma_{h,\beta}$. Allora il conto precedente ci dice che

$$a^j_\alpha = \sum_{h=1}^{r} (g_{\alpha\beta})^j_h \, a^h_\beta, \tag{3.2.2}$$

è la formula che esprime come cambiano i coefficienti di una sezione al cambiare della banalizzazione locale.

Esercizio 3.2.2. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante su M, e $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ una famiglia di funzioni di transizione per un fibrato E. Supponi di avere per ogni α una r-upla di funzioni differenziabili $a_\alpha = (a^1_\alpha, \dots, a^r_\alpha) \in C^\infty(U_\alpha)^r$ in modo che su $U_\alpha \cap U_\beta$ le a_α e le a_β siano legate da (3.2.2). Dimostra che esiste un'unica sezione σ di E tale che le a^j_α siano i coefficienti di σ relativi a un appropriato riferimento locale su U_α.

Esercizio 3.2.3. Sia $\sigma\colon M \to E$ una sezione (non necessariamente C^∞) di un fibrato vettoriale su M. Dimostra che σ è C^∞ se e solo se per ogni riferimento locale $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ di E su $U \subseteq M$ si può scrivere $\sigma = a^1\sigma_1 + \cdots + a^r\sigma_r$ con $a^1, \dots, a^r \in C^\infty(U)$ se e solo se questo avviene per una famiglia di riferimenti locali i cui domini di definizione formano un ricoprimento aperto di M.

Esempio 3.2.1. Una funzione $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è detta *d-omogenea* (con $d \in \mathbb{Z}$) se $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^*$ e $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. È evidente che ogni funzione 0-omogenee $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definisce una funzione $\tilde{f} \in C^\infty\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\big)$ tale che $\tilde{f} \circ \pi = f$, dove $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è la proiezione naturale. Viceversa, ogni funzione 0-omogenea è della forma $\tilde{f} \circ \pi$ per un'opportuna funzione C^∞ definita sullo spazio proiettivo. Ricordando l'Osservazione 3.2.1, abbiamo quindi un isomorfismo fra lo spazio delle funzioni 0-omogenee su $\mathbb{R}^{n+1}$ e lo spazio delle sezioni del fibrato banale $E_0 = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Vogliamo ora far vedere che, più in generale, c'è un naturale isomorfismo fra lo spazio delle funzioni d-omogenee su $\mathbb{R}^{n+1}$ e lo spazio $\mathcal{E}_d\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\big)$ delle sezioni del fibrato in rette $\pi_d\colon E_d \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ introdotto nell'Esempio 3.1.4. Infatti, sia $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una funzione d-omogenea, e definiamo $\tilde{f}\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to E_d$ nel seguente modo:

$$\forall x \in U_j \qquad \tilde{f}(x) = \chi_j^{-1}\big(x, f([x]_j)\big),$$

dove $[x]_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ è l'unico elemento $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\pi(y) = x$ e $y^j = 1$. Per verificare che $\tilde{f}$ è una sezione di E_d è sufficiente controllare che sia ben definita, visto che localmente è chiaramente C^∞. Sia $x \in U_h \cap U_k$; allora $[x]_h = (x^k/x^h)[x]_k$, per cui ricordando la definizione di E_d troviamo

$$\chi_h \circ \chi_k^{-1}\big(x, f([x]_k)\big) = \left(x, \left(\frac{x^k}{x^h}\right)^d f([x]_k)\right) = \left(x, f\left(\frac{x^k}{x^h} \cdot [x]_k\right)\right) = \big(x, f([x]_h)\big),$$

e $\tilde{f}$ è ben definita. Viceversa, data $\tilde{f} \in \mathcal{E}_d\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\big)$ possiamo definire $\tilde{f}_j\colon U_j \to \mathbb{R}$ con $\chi_j\big(\tilde{f}(x)\big) = \big(x, \tilde{f}_j(x)\big)$ per ogni $x \in U_j$ e ogni $j = 0, \dots, n$. Se $x \in U_h \cap U_k$ si verifica subito che

$$\tilde{f}_k(x) = \left(\frac{x^h}{x^k}\right)^d \tilde{f}_h(x). \tag{3.2.3}$$

Possiamo allora definire $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ ponendo $f(O) = 0$ e $f(y) = (y^j)^d \tilde{f}_j\big(\pi(y)\big)$ per un qualsiasi $j = 0, \dots, n$ tale che $y^j \neq 0$. Grazie alla (3.2.3) si vede subito che f è ben definita, ed è chiaramente d-omogenea.

Esempio 3.2.2. Se M è una varietà di dimensione n, allora TM è una varietà di dimensione $2n$, per cui possiamo considerare il fibrato tangente del tangente $\tilde{\pi}\colon T(TM) \to TM$ di rango $2n$ su TM. Vogliamo ora descrivere dei riferimenti locali naturali per $T(TM)$. Sia (U, φ) una carta locale per M; abbiamo visto che φ induce una banalizzazione locale $\chi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ e un riferimento locale $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ per TM tali che

$$\chi(v) = \big(p, (v^1, \dots, v^n)\big) \quad \text{se e solo se} \quad v = v^1\partial_1|_p + \cdots + v^n\partial_n|_p \in T_pM,$$

dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione naturale. Inoltre, se poniamo $\tilde\chi = (\varphi, \mathrm{id}) \circ \chi$ otteniamo una carta locale $\bigl(\pi^{-1}(U), \tilde\chi\bigr)$ di TM. Scrivendo $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ è chiaro che $\tilde\chi(v) = \bigl(x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n\bigr)$ per ogni $v \in T_pM$ e $p \in U$. Dunque alla carta locale $\tilde\chi$ di TM possiamo associare il riferimento locale $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n, \partial/\partial v^1, \dots, \partial/\partial v^n\}$ di $T(TM)$ sopra $\pi^{-1}(U) = TU$. Per capire meglio chi sono $\partial/\partial x^h$ e $\partial/\partial v^k$ vediamo come si comportano rispetto al differenziale della proiezione π. Ora, se $f \in C^\infty(U)$ è chiaro (perché?) che

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_v (f \circ \pi) = \partial_h|_p(f) \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial}{\partial v^k}\right|_v (f \circ \pi) = 0$$

quale che sia $v \in T_pM$; in altre parole, i $\partial/\partial x^h$ riproducono la derivate nelle coordinate di M, mentre i $\partial/\partial v^k$ danno le derivate delle funzioni ristrette ai singoli spazi tangenti. In termini più formali, questo vuol dire che $d\pi_v(\partial/\partial x^h) = \partial_h|_{\pi(v)}$ e $d\pi_v(\partial/\partial v^k) = O_{\pi(v)}$. In particolare, $\{\partial/\partial v^1, \dots, \partial/\partial v^n\}$ è un riferimento locale per il *fibrato verticale* $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(d\pi) \subset T(TM)$. Nota che mentre il fibrato verticale è ben definito indipendentemente dalla carta locale scelta, non esiste una definizione canonica per un "fibrato orizzontale" $\mathcal{H} \subset T(TM)$ tale che $T(TM) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$; per esempio, è facile dimostrare (esercizio) che, in generale, se $\tilde\varphi = (\tilde x^1, \dots, \tilde x^n)$ è un'altra carta locale allora $\mathrm{Span}(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) \neq \mathrm{Span}(\partial/\partial \tilde x^1, \dots, \partial/\partial \tilde x^n)$. Ne riparleremo nel prossimo capitolo quando introdurremo il concetto di connessione.

ESEMPIO 3.2.3. Se $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ è una carta locale su M, allora le 1-forme $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ definite come base duale di $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ (o come differenziale delle coordinate locali; vedi l'Osservazione 3.1.1) formano un riferimento locale del fibrato cotangente. La Proposizione 1.3.4 allora implica che un riferimento locale per il fibrato $\bigwedge^k M$ delle k-forme è dato dalle forme

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

con $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, per cui ogni k-forma si può scrivere localmente come

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

per opportune funzioni $a_{i_1 \dots i_k}$. In particolare, quando $k = n$ un riferimento locale per il fibrato in rette $\bigwedge^n M$ è dato dalla n-forma $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Se $\tilde\varphi = (\tilde x^1, \dots, \tilde x^n)$ è un'altra carta locale, usando la (3.1.3) e ricordando l'Osservazione 1.3.7 troviamo subito che

$$d\tilde x^1 \wedge \dots \wedge d\tilde x^n = \det\left(\frac{\partial \tilde x^h}{\partial x^k}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Un tensore di tipo $\binom{h}{k}$ definito su uno spazio vettoriale V prende come argomenti h elementi di V^* e k elementi di V, e restituisce un numero. Analogamente, un campo di tensoriale di tipo $\binom{h}{k}$ può essere calcolato punto per punto su h 1-forme e k campi vettoriali, ottenendo una funzione. Viceversa, perché un'applicazione con argomenti h 1-forme e k campi vettoriali e valore una funzione su M sia indotta da un campo tensoriale di tipo $\binom{h}{k}$ occorre come minimo che il suo valore in un punto p dipenda soltanto dal valore dei suoi argomenti nel punto p e non da come si comportano altrove (come succederebbe invece se stessimo calcolando una derivata). Un risultato non difficile ma importante è che per ottenere questo è sufficiente (e necessario) richiedere la $C^\infty(M)$-multilinearità:

Proposizione 3.2.1: *Sia M una varietà. Allora*

(i) *Un'applicazione $\tilde\tau\colon A^1(M)^h \times \mathcal{T}(M)^k \to C^\infty(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se esiste un campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}^h_k(M)$ tale che*

$$\tilde\tau(\omega^1, \dots, \omega^h, X_1, \dots, X_k)(p) = \tau_p\bigl(\omega^1(p), \dots, \omega^h(p), X_1(p), \dots, X_k(p)\bigr) \tag{3.2.4}$$

per tutti gli $\omega^1, \dots, \omega^h \in A^1(M)$, $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{T}(M)$ e $p \in M$.

(ii) *Un'applicazione $\hat\tau\colon \mathcal{T}(M)^k \to \mathcal{T}^h(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se esiste un campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}^h_k(M)$ tale che*

$$\hat\tau(X_1, \dots, X_k)(p)(\omega^1_p, \dots, \omega^h_p) = \tau_p\bigl(\omega^1_p, \dots, \omega^h_p, X_1(p), \dots, X_k(p)\bigr) \tag{3.2.5}$$

per tutti gli $\omega^1_p,\dots,\omega^h_p\in T^*_pM$, $X_1,\dots,X_k\in\mathcal{T}(M)$ *e* $p\in M$.

Dimostrazione: (i) Dato $\tau\in\mathcal{T}^h_k(M)$, cominciamo col dimostrare che l'applicazione

$$p\mapsto\tau_p\big(\omega^1(p),\dots,\omega^h(p),X_1(p),\dots,X_k(p)\big)$$

è di classe $C^\infty(M)$ per ogni $\omega^1,\dots,\omega^h\in A^1(M)$ e $X_1,\dots,X_k\in\mathcal{T}(M)$. Infatti, se (U,φ) è una carta locale in p, possiamo scrivere localmente $\omega^i=\sum_r\omega^i_r\,dx^r$, $\partial_j=\sum_s X^s_j\partial_s$ e

$$\tau=\sum_{u_1,\dots,u_h,v_1,\dots,v_k}\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}\partial_{u_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{u_h}\otimes dx^{v_1}\otimes\cdots\otimes dx^{v_k},\tag{3.2.6}$$

con ω^i_r, X^s_j, $\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}\in C^\infty(U)$, per cui localmente abbiamo

$$\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)=\sum_{u_1,\dots,u_h,v_1,\dots,v_k}\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}\omega^1_{u_1}\cdots\omega^h_{u_h}X^{v_1}_1\cdots X^{v_k}_k,$$

che è chiaramente di classe C^∞. La stessa formula ci dice anche che l'applicazione $\tilde\tau$ definita da (3.2.4) è $C^\infty(M)$-multilineare.

Viceversa, supponiamo di avere una $\tilde\tau\colon A^1(M)^h\times\mathcal{T}(M)^k\to C^\infty(M)$ che sia $C^\infty(M)$-multilineare; vogliamo far vedere che proviene da un campo tensoriale. Prima di tutto, dimostriamo che se $\omega^1\equiv O$ in un intorno U di un punto $p\in M$ allora $\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=0$ per ogni $\omega^2,\dots,\omega^h\in A^1(M)$ e ogni $X_1\dots,X_k\in\mathcal{T}(M)$. Il Corollario 2.3.2 ci fornisce una funzione $g\in C^\infty(M)$ tale che $g(p)=1$ e $g|_{M\setminus U}\equiv 0$. Allora $g\omega^1\equiv O$ e quindi

$$\begin{aligned}\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)&=g(p)\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=\hat\tau(g\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)\\&=\hat\tau(O,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=\hat\tau(0\cdot O,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)\\&=0\cdot\hat\tau(O,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=0.\end{aligned}$$

In particolare, se $\tilde\omega^1$ e $\bar\omega^1$ sono tali che $\tilde\omega^1\equiv\bar\omega^1$ in un intorno U di un punto p, applicando questo argomento a $\omega^1=\tilde\omega^1-\bar\omega^1$ troviamo $\hat\tau(\tilde\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)=\hat\tau(\bar\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)$.

Lo stesso ragionamento si applica chiaramente a $\omega^2,\dots,\omega^h$ e a $X_1,\dots,X_k$, per cui per calcolare $\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)$ ci basta conoscere il comportamento di $\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k$ in un intorno di p. In altre parole, per ogni aperto $U\subseteq M$ la $\hat\tau$ definisce un'applicazione $\hat\tau_U\colon A^1(U)^h\times\mathcal{T}(U)^k\to C^\infty(U)$ che è $C^\infty(U)$-multilineare.

Supponiamo adesso di prendere $p\in M$ e $\omega^1\in A^1(M)$ tale che $\omega^1_p=O$, e scegliamo una carta locale (U,φ) centrata in p. Allora possiamo scrivere $\omega^1|_U=\sum_r\omega^1_r\,dx^r$ per opportune $\omega^1_r\in C^\infty(U)$ con $\omega^1_r(p)=0$. Dunque

$$\begin{aligned}\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)&=\hat\tau_U(\omega^1|_U,\dots,\omega^h|_U,X_1|_U,\dots,X_k|_U)(p)\\&=\hat\tau_U\left(\sum_{r=1}^n\omega^1_r\,dx^r,\omega^2|_U,\dots,\omega^h|_U,X_1|_U,\dots,X_k|_U\right)\\&=\sum_{r=1}^n\omega^1_r(p)\hat\tau_U(dx^r,\omega^2|_U,\dots,\omega^h|_U,X_1|_U,\dots,X_k|_U)(p)=0.\end{aligned}$$

Argomentando come sopra, e ripetendo il ragionamento per $\omega^2,\dots,\omega^h$ e per $X_1,\dots,X_k$, vediamo quindi che $\hat\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)(p)$ dipende esclusivamente dal valore di $\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k$ in p. Quindi per ogni $p\in M$ la $\hat\tau$ induce un'applicazione $\mathbb{R}$-multilineare $(T^*_pM)^h\times(T_pM)^k\to\mathbb{R}$, cioè un elemento di $T^h_k(T_pM)$. In altre parole, abbiamo dimostrato che $\hat\tau$ definisce un'unica sezione τ di T^h_kM che soddisfa (3.2.4); per concludere dobbiamo solo dimostrare che τ è di classe C^∞. Scriviamo τ in coordinate locali come in (3.2.6); allora

$$\tau^{u_1\dots u_h}_{v_1\dots v_k}=\hat\tau_U(dx^{u_1},\dots,dx^{u_h},\partial_{v_1},\dots,\partial_{v_k})\in C^\infty(U),$$

e τ è di classe C^∞ grazie all'Esercizio 3.2.3.

(ii) Un'applicazione $\hat\tau\colon\mathcal{T}(M)^k\to\mathcal{T}^h(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se ponendo

$$\tilde\tau(\omega^1,\dots,\omega^h,X_1,\dots,X_k)=\hat\tau(X_1,\dots,X_k)(\omega^1,\dots,\omega^h)$$

otteniamo un'applicazione $C^\infty(M)$-multilineare $\tilde\tau\colon A^1(M)^h\times\mathcal{T}(M)^k\to C^\infty(M)$. La tesi segue allora dalla parte (i). □

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi.

Esercizio 3.2.4. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M, $K \subseteq M$ un compatto, e $U \subseteq M$ un intorno aperto di K. Dimostra che per ogni sezione $\sigma \in \mathcal{E}(U)$ esiste una sezione $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}(M)$ tale che $\tilde{\sigma}|_K \equiv \sigma|_K$.

Esercizio 3.2.5. Sia $F: M \to N$ un'applicazione differenziabile, e $\pi: E \to N$ un fibrato vettoriale di rango r su N. Dimostra che lo spazio delle sezioni su M del fibrato pull-back F^*E (vedi l'Esercizio 3.1.5) è isomorfo allo spazio delle applicazioni $\sigma: M \to E$ di classe C^∞ tali che $\sigma(p) \in E_{F(p)}$ per ogni $p \in M$.

Esercizio 3.2.6. Siano $\pi: E \to M$ e $\pi': E' \to M$ due fibrati vettoriali su una varietà M. Dimostra che un'applicazione $\mathcal{F}: \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}'(M)$ è $C^\infty(M)$-lineare se e solo se esiste un morfismo $F: E \to E'$ di fibrati tale che $\mathcal{F}(s) = F \circ s$ per ogni $s \in \mathcal{E}(M)$.

Esercizio 3.2.7. Sia $\sigma: M \to T^h_k M$ una sezione (non necessariamente C^∞). Dimostra che σ è C^∞ se e solo se per ogni aperto $U \subseteq M$, ogni k-upla di campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(U)$ e ogni h-upla di 1-forme $\omega^1, \ldots, \omega^h \in A^1(U)$ la funzione $p \mapsto \sigma_p\bigl(\omega^1_p, \ldots, \omega^h_p, X_1(p), \ldots, X_k(p)\bigr)$ è di classe C^∞.

Esercizio 3.2.8. Dimostra che un'applicazione $\bar{\tau}: \bigl(A^1(M)\bigr)^h \times \bigl(\mathcal{T}(M)\bigr)^k \to \mathcal{T}^l(M)$ è $C^\infty(M)$-multilineare se e solo se esiste un campo tensoriale $\tau \in \mathcal{T}^{h+l}_k(M)$ tale che

$$\bar{\tau}(\omega^1, \ldots, \omega^h, X_1, \ldots, X_k)(p)(\eta^1_p, \ldots, \eta^l_p) = \tau_p\bigl(\eta^1_p, \ldots, \eta^l_p, \omega^1(p), \ldots, \omega^h(p), X_1(p), \ldots, X_k(p)\bigr)$$

per ogni $\eta^1_p, \ldots, \eta^l_p \in T^*_p M$, $\omega^1, \ldots, \omega^h \in A^1(M)$, $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{T}(M)$ e $p \in M$.

Esercizio 3.2.9. Sia $\tau \in \mathcal{T}^h_k(M)$ un campo tensoriale di tipo $\binom{h}{k}$. Scelti $1 \le i \le h$ e $1 \le j \le k$, siano $\omega^1, \ldots, \omega^i \in A^1(M)$ delle 1-forme, e $X_1, \ldots, X_j \in \mathcal{T}(M)$ dei campi vettoriali. Dimostra che l'applicazione $p \mapsto \tau_p\bigl(\omega^1(p), \ldots, \omega^i(p), \cdot, X_1(p), \ldots, X_j(p), \cdot\bigr)$ può essere interpretata in modo naturale come un campo tensoriale di tipo $\binom{h-i}{k-j}$.

Esercizio 3.2.10. Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango k su una varietà M, e siano $\sigma_1, \ldots, \sigma_l \in \mathcal{E}(U)$ sezioni di E su un aperto $U \subseteq M$ tali che $\{\sigma_1(q), \ldots, \sigma_l(q)\}$ siano linearmente indipendenti per ogni $q \in U$. Dimostra che per ogni $p \in U$ possiamo trovare un intorno $V \subseteq U$ di p e sezioni $\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_k \in \mathcal{E}(V)$ tali che $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ sia un riferimento locale di E su V.

3.3 Flusso di un campo vettoriale

Torniamo adesso ai campi vettoriali, dandone una caratterizzazione equivalente.

Definizione 3.3.1: Sia A un'algebra sul campo $\mathbb{K}$. Una *derivazione* di A è un'applicazione $D: A \to A$ che sia $\mathbb{K}$-lineare e che soddisfi la regola di Leibniz: $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ per ogni $a, b \in A$.

Proposizione 3.3.1: *Lo spazio vettoriale $\mathcal{T}(M)$ dei campi vettoriali su una varietà M è isomorfo allo spazio vettoriale delle derivazioni $X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.*

Dimostrazione: Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale. Per ogni $f \in C^\infty(M)$ otteniamo un'altra funzione $Xf: M \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(Xf)(p) = X_p(\mathbf{f}),$$

dove $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ è il germe rappresentato da f. Nelle coordinate locali date una carta locale $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, scrivendo $X = \sum_j X^j \partial_j$ troviamo

$$Xf = \sum_j X^j \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}$$

per cui $Xf \in C^\infty(M)$, ed è assolutamente chiaro che $f \mapsto Xf$ è una derivazione.

Viceversa, sia $X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ una derivazione. Prima di tutto dimostriamo che se $f \in C^\infty(M)$ è zero in un intorno U di p allora $(Xf)(p) = 0$. Infatti, sia $h \in C^\infty(M)$ tale che $h(p) = 0$ e $h|_{M \setminus U} \equiv 1$ (Corollario 2.3.2). Allora $hf \equiv f$ per cui

$$(Xf)(p) = X(hf)(p) = h(p)(Xf)(p) + f(p)(Xh)(p) = 0.$$

Questo vuol dire che se f e g coincidono in un intorno di p abbiamo $(Xf)(p) = (Xg)(p)$. Siccome ogni funzione definita in un intorno di un punto può essere estesa a una funzione definita su tutto M (Corollario 2.3.3), per ogni aperto $U \subseteq M$ la X definisce una derivazione $X: C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, e per ogni $p \in M$ una derivazione $X_p: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, e quindi una sezione di TM. Siccome in coordinate locali $X_p = \sum_j X(x^j)(p)\partial_j(p)$, si vede subito (esercizio) che questa sezione è di classe C^∞. Quindi abbiamo ottenuto un campo vettoriale, ed è chiaro che questa costruzione è l'inversa di quella descritta sopra. □

Quindi se X e Y sono due campi vettoriali e $f \in C^\infty(M)$ possiamo considerare anche la funzione $X(Yf)$. Sfortunatamente, $f \mapsto X(Yf)$ non è una derivazione: infatti

$$X\bigl(Y(fg)\bigr) = X\bigl(fY(g) + gY(f)\bigr) = fX(Yg) + \bigl(X(f)Y(g) + X(g)Y(f)\bigr) + gX(Yf).$$

Ma questa stessa formula mostra che $XY - YX$ è una derivazione: infatti

$$(XY - YX)(fg) = fX(Yg) + gX(Yf) - fY(Xg) - gY(Xf) = f(XY - YX)(g) + g(XY - YX)(f).$$

Dunque $XY - YX$ è un campo vettoriale:

Definizione 3.3.2: La *parentesi di Lie* di due campi X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ è il campo vettoriale $[X, Y] = XY - YX$ definito da

$$\forall f \in C^\infty(M) \qquad [X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf).$$

Diremo che due campi vettoriali X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ *commutano* se $[X, Y] \equiv O$.

Proposizione 3.3.2: *Se X, Y e Z sono campi vettoriali su una varietà M, a, $b \in \mathbb{R}$ e f, $g \in C^\infty(M)$, si ha:*
(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticommutatività);*
(ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearità);*
(iii) $\bigl[X, [Y, Z]\bigr] + \bigl[Y, [Z, X]\bigr] + \bigl[Z, [X, Y]\bigr] = 0$ *(identità di Jacobi);*
(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$;
(v) *se in coordinate locali abbiamo* $X = \sum_h X^h \partial_h$ *e* $Y = \sum_k Y^k \partial_k$ *allora*

$$[X, Y] = \sum_{h,k=1}^n \left(X^h \frac{\partial Y^k}{\partial x^h} - Y^h \frac{\partial X^k}{\partial x^h} \right) \partial_k.$$

In particolare, $[\partial_h, \partial_k] = 0$.

Dimostrazione: (i) e (ii) sono ovvie. Poi si ha

$$\begin{aligned} \bigl[X, [Y, Z]\bigr] &= XYZ - XZY - YZX + ZYX, \\ \bigl[Y, [Z, X]\bigr] &= YZX - YXZ - ZXY + XZY, \\ \bigl[Z, [X, Y]\bigr] &= ZXY - ZYX - XYZ + YXZ, \end{aligned}$$

e sommando si ottiene la (iii). Inoltre,

$$[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) = fg(XY) + f(Xg)Y - fg(YX) - g(Yf)X = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X,$$

e anche (iv) è dimostrata. Il Teorema di Schwartz sulle derivate seconde dice che

$$[\partial_h, \partial_k](f) = \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^h \partial x^k} - \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k \partial x^h} \equiv 0,$$

dove $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ è la carta locale che stiamo usando, per cui $[\partial_h, \partial_k] = 0$, e (v) segue dalle precedenti. □

In un certo senso, $[X, Y]$ rappresenta la derivata di Y nella direzione di X. Per dare senso a questa affermazione cominciamo richiamando il fondamentale teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

Teorema 3.3.3: *Dati un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e funzioni $X^1, \ldots, X^n \in C^\infty(U)$, si consideri il seguente problema di Cauchy per una curva $\sigma: I \to U$:*

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma^j}{dt}(t) = X^j\big(\sigma(t)\big), \quad j = 1, \ldots, n, \\ \sigma(t_0) = x \in U. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Allora si ha:

(i) *Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$ esistono $\delta > 0$ e un intorno aperto $U_0 \subseteq U$ di x_0 tali che per ogni $x \in U_0$ esiste una curva $\sigma_x: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to U$ soluzione di* (3.3.1). *Inoltre, l'applicazione $\Theta: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U_0 \to U$ data da $\Theta(t, x) = \sigma_x(t)$ è di classe C^∞.*
(ii) *Due soluzioni di* (3.3.1) *coincidono sempre nell'intersezione dei loro domini di definizione.*

Vediamo come tradurre questo risultato sulle varietà.

Definizione 3.3.3: Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M, e $p \in M$. Una curva $\sigma: I \to M$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo contenente l'origine, tale che

$$\begin{cases} \sigma'(t) = X\big(\sigma(t)\big), \\ \sigma(0) = p, \end{cases}$$

è detta *curva integrale* (o *traiettoria*) di X uscente da p.

Sia (U, φ) una carta locale centrata in $p \in M$, e $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale. In coordinate locali, possiamo scrivere $X = \sum_j X^j \partial_j$. Se $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ è una curva uscente da p, cioè tale che $\sigma(0) = p$, possiamo scegliere ε abbastanza piccolo in modo che tutto il sostegno di σ sia contenuto in U, e quindi possiamo scrivere $\varphi \circ \sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$. Usando l'Esempio 2.4.3 otteniamo

$$\sigma'(t) = \sum_{j=1}^n (\sigma^j)'(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\sigma(t)}.$$

Quindi σ è una curva integrale di X se e solo se la curva $\varphi \circ \sigma$ in $\varphi(U)$ soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{d\sigma^j}{dt} = X^j\big(\varphi \circ \sigma(t)\big), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Allora il Teorema 3.3.3 diventa il seguente teorema fondamentale:

Teorema 3.3.4: *Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M. Allora esistono un unico intorno aperto $\mathcal{U}$ di $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ e un'unica applicazione $\Theta: \mathcal{U} \to M$ di classe C^∞ che soddisfano le seguenti proprietà:*

(i) *Per ogni $p \in M$ l'insieme $\mathcal{U}^p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{U}\}$ è un intervallo aperto contenente* 0.
(ii) *Per ogni $p \in M$ la curva $\theta^p: \mathcal{U}^p \to M$ definita da $\theta^p(t) = \Theta(t, p)$ è l'unica curva integrale massimale di X uscente da p.*
(iii) *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{U}_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{U}\}$ è un aperto di M.*
(iv) *Se $p \in \mathcal{U}_t$, allora $p \in \mathcal{U}_{s+t}$ se e solo se $\Theta(t, p) \in \mathcal{U}_s$, e in questo caso*

$$\theta_s\big(\theta_t(p)\big) = \theta_{s+t}(p), \tag{3.3.2}$$

dove $\theta_t: \mathcal{U}_t \to M$ è definita da $\theta_t(p) = \Theta(t, p)$. In particolare, $\theta_0 = \mathrm{id}$ e $\theta_t: \mathcal{U}_t \to \mathcal{U}_{-t}$ è un diffeomorfismo con inversa θ_{-t}.
(v) *Per ogni $(t, p) \in \mathcal{U}$, si ha $d(\theta_t)_p(X) = X_{\theta_t(p)}$.*
(vi) *Per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$ si ha*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \theta^p)\bigg|_{t=0} = (Xf)(p).$$

Dimostrazione: Cominciamo col notare che il Teorema 3.3.3 implica, grazie a quanto visto sopra, che per ogni $p \in X$ una curva integrale di X uscente da p esiste sempre.

Siano σ, $\tilde\sigma: I \to M$ due curve integrali di X tali che $\sigma(t_0) = \tilde\sigma(t_0)$ per qualche $t_0 \in I$, e sia $J \subseteq I$ l'insieme degli $t \in I$ tali che $\sigma(t) = \tilde\sigma(t)$. Allora l'insieme J è non vuoto, chiuso, ed è anche aperto, grazie al Teorema 3.3.3.(ii); quindi $J = I$, e dunque due curve integrali che coincidono in un punto coincidono nell'intersezione dei loro domini di definizione.

Per ogni $p \in M$ indichiamo allora con $\mathcal{U}^p$ l'unione di tutti gli intervalli aperti $I \subseteq \mathbb{R}$ contenenti 0 su cui sia definita una curva integrale uscente da p. Chiaramente, $\mathcal{U}^p$ è un intervallo aperto contenente l'origine, e l'argomento precedente ci dice (perché?) che esiste una curva integrale $\theta^p: \mathcal{U}^p \to M$ di X uscente da p definita su tutto $\mathcal{U}^p$, e che questa è la curva integrale massimale uscente da p.

Poniamo allora $\mathcal{U} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in \mathcal{U}^p\}$, e definiamo $\Theta: \mathcal{U} \to M$ ponendo $\Theta(t, p) = \theta^p(t)$. Inoltre, poniamo $\mathcal{U}_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{U}\}$, e definiamo $\theta_t: \mathcal{U}_t \to M$ con $\theta_t(p) = \Theta(t, p)$. In questo modo abbiamo ottenuto (i) e (ii); vediamo di dimostrare (iv).

Per definizione, $\mathcal{U}_0 = M$ e $\theta_0 = \mathrm{id}_M$. Prendiamo ora $p \in M$ e $t \in \mathcal{U}^p$, e poniamo $q = \theta^p(t)$. Allora la curva $\sigma: \mathcal{U}^p - t \to M$ definita da
$$\sigma(s) = \theta^p(s + t),$$
dove $\mathcal{U}^p - t = \{s \in \mathbb{R} \mid s + t \in \mathcal{U}^p\}$, è ancora una curva integrale di X: infatti
$$\sigma'(s) = \frac{d\theta^p}{ds}(s + t) = X\bigl(\theta^p(t + s)\bigr) = X\bigl(\sigma(s)\bigr).$$
Quindi necessariamente $\sigma(s) = \theta^q(s)$, cioè $\theta^{\theta^p(t)}(s) = \theta^p(s + t)$, ovvero $\Theta\bigl(s, \Theta(t, p)\bigr) = \Theta(s + t, p)$, o anche
$$\theta_{s+t}(p) = \theta_s\bigl(\theta_t(p)\bigr),$$
e $\mathcal{U}^p - t \subseteq \mathcal{U}^q$. Siccome $0 \in \mathcal{U}^p$, otteniamo $-t \in \mathcal{U}^q$, e $\theta^q(-t) = p$. Applicando questo ragionamento a $(-t, q)$ invece di (t, p), otteniamo che $\mathcal{U}^q + t \subseteq \mathcal{U}^p$, e quindi $\mathcal{U}^p - t = \mathcal{U}^{\Theta(t,p)}$, che vuol dire esattamente che $\Theta(t, p) \in \mathcal{U}_s$ se e solo se $p \in \mathcal{U}_{s+t}$. Quindi (iv) è dimostrata.

Ora facciamo vedere che $\mathcal{U}$ è aperto in $\mathbb{R} \times M$, da cui segue (iii), e che Θ è di classe C^∞. Sia $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ l'insieme dei $(t, p) \in \mathcal{U}$ tale che esista un intorno di (t, p) della forma $I \times U$, con I intervallo aperto contenente 0 e t, e U intorno aperto di p in M, su cui Θ sia definita e di classe C^∞. Chiaramente ci basta dimostrare che $\mathcal{W} = \mathcal{U}$.

Prima di tutto, il Teorema 3.3.3 ci dice che $(0, p) \in \mathcal{W}$ per ogni $p \in M$. Supponiamo per assurdo che esista $(t_0, p_0) \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$. Siccome $t_0 \neq 0$, possiamo assumere per semplicità $t_0 > 0$; il caso $t_0 < 0$ sarà analogo. Sia $\tau = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid (t, p_0) \in \mathcal{W}\}$; per costruzione, $0 < \tau \le t_0$. Siccome $t_0 \in \mathcal{U}^{p_0}$, abbiamo $\tau \in \mathcal{U}^{p_0}$; poniamo $q_0 = \theta^{p_0}(\tau)$. Il Teorema 3.3.3 ci fornisce un $\delta > 0$ e un intorno U_0 di q_0 tale che Θ sia definita e di classe C^∞ su $(-\delta, \delta) \times U_0$. Scegliamo $t_1 < \tau$ tale che $t_1 + \delta > \tau$ e $\theta^{p_0}(t_1) \in U_0$. Siccome $t_1 < \tau$, abbiamo $(t_1, p_0) \in \mathcal{W}$, e quindi esiste un intorno $(-\varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times U_1$ di (t_1, p_0) su cui Θ è definita e di classe C^∞. Inoltre, possiamo anche scegliere U_1 in modo che $\Theta(\{t_1\} \times U_1) \subseteq U_0$.

Dunque, se $p \in U_1$ abbiamo che $\theta_{t_1}(p)$ è definito e dipende C^∞ da p. Inoltre, essendo $\theta_{t_1}(p) \in U_0$, abbiamo che $\theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p)$ è definito e dipende C^∞ da $p \in U_1$ e $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Ma (iii) ci dice che $\theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p) = \theta_t(p)$; quindi abbiamo esteso Θ in modo C^∞ a un aperto della forma $(-\varepsilon, t_1 + \delta) \times U_1$, per cui $(t_1 + \delta, p_0) \in \mathcal{W}$, contro la definizione di τ. Questa contraddizione mostra che $\mathcal{W} = \mathcal{U}$, come voluto.

La (vi) è ora immediata: infatti,
$$(Xf)(p) = df_p(X) = \frac{d}{dt}(f \circ \theta^p)\bigg|_{t=0},$$
in quanto θ^p è una curva con $\theta^p(0) = p$ e $(\theta^p)'(0) = X(p)$.

Infine, dimostriamo (v). Preso $(t_0, p_0) \in \mathcal{U}$ e posto $q = \theta_{t_0}(p_0)$, per ogni germe $\mathbf{f} \in C^\infty(q)$ si ha
$$\begin{aligned} d(\theta_{t_0})_{p_0}(X)(\mathbf{f}) &= X_{p_0}(\mathbf{f} \circ \theta_{t_0}) = \frac{d}{dt}(f \circ \theta_{t_0} \circ \theta^{p_0})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f\bigl(\theta_{t_0+t}(p_0)\bigr)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f\bigl(\theta^{p_0}(t_0 + t)\bigr)\bigg|_{t=0} = X_{\theta^{p_0}(t_0)}(\mathbf{f}), \end{aligned}$$
e ci siamo. □

Definizione 3.3.4: L'applicazione $\Theta: \mathcal{U} \to M$ introdotta nel precedente Teorema è detta *flusso locale* del campo vettoriale X. Il campo $X \in \mathcal{T}(M)$ è detto *completo* se $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times M$, cioè se tutte le curve integrali di X sono definite per tutti i tempi. Un campo vettoriale $Y \in \mathcal{T}(M)$ è detto *X-invariante* se $d(\theta_t)_p(Y) = Y_{\theta_t(p)}$ per ogni (t,p) nel dominio di Θ. In particolare, ogni campo vettoriale è invariante rispetto a se stesso.

Esercizio 3.3.1. Una curva $\sigma: \mathbb{R} \to M$ in una varietà M è *periodica* se esiste $T > 0$ tale che $\sigma(t) = \sigma(t+T)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale, e σ una curva integrale massimale di X.

(i) Dimostra che se σ non è costante allora o è iniettiva o è periodica.
(ii) Dimostra che se σ è periodica non costante allora esiste un unico numero positivo T_0 (il *periodo* di σ) tale che $\sigma(t) = \sigma(t')$ se e solo se $t - t' = kT_0$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.
(iii) Dimostra che se σ non è costante allora è un'immersione, e l'immagine di σ ha una struttura naturale di varietà 1-dimensionale diffeomorfa a $\mathbb{R}$ o a S^1.

Ora, se Θ è il flusso locale di un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$, e $Y \in \mathcal{T}(M)$ è un altro campo vettoriale, l'applicazione $Y \circ \Theta$ è di classe C^∞. Ma allora $t \mapsto d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)$ è una funzione C^∞ a valori in T_pM che dipende in modo C^∞ dal punto p, e abbiamo trovato un modo di misurare la derivata di Y nella direzione di X:

Definizione 3.3.5: Siano X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ due campi vettoriali su una varietà M. La *derivata di Lie* di Y lungo X è il campo vettoriale $\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{T}(M)$ definito da

$$\mathcal{L}_X Y(p) = \frac{d}{dt} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y) - Y_p}{t}$$

per ogni $p \in M$.

Il risultato tutt'altro che evidente che vogliamo dimostrare ora è che la derivata di Lie di Y lungo X è esattamente uguale a $[X,Y]$. Ci serve ancora un lemma:

Lemma 3.3.5: *Sia $U \subseteq M$ un aperto di una varietà M, $\delta > 0$, e $h: (-\delta,\delta) \times U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ con $h(0,q) = 0$ per ogni $q \in U$. Allora esiste una $g: (-\delta,\delta) \times U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che*

$$h(t,q) = tg(t,q)$$

e $g(0,q) = \frac{\partial h}{\partial t}(0,q)$ per ogni $q \in U$.

Dimostrazione: Basta porre

$$g(t,q) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(ts,q)\, ds;$$

infatti

$$tg(t,q) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(ts,q)\, d(ts) = h(t,q).$$

□

Allora

Proposizione 3.3.6: *Siano X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ due campi vettoriali su una varietà M. Allora $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$.*

Dimostrazione: Indichiamo con $\Theta: \mathcal{U} \to M$ il flusso locale di X. Dato $p \in M$, scegliamo $\delta > 0$ e un intorno U_0 di p tali che $(-\delta,\delta) \times U_0 \subseteq \mathcal{U}$. Sia (U,f) un rappresentante di un germe in p, dove abbiamo scelto U in modo che $\Theta\big((-\delta,\delta) \times U\big) \subseteq U_0$. Definiamo $h: (-\delta,\delta) \times U \to \mathbb{R}$ ponendo $h(t,q) = f(q) - f\big(\theta_{-t}(q)\big)$, e sia $g: (-\delta,\delta) \times U \to \mathbb{R}$ la funzione data dal lemma precedente. Allora ricordando il Teorema 3.3.4.(vi) otteniamo

$$f \circ \theta_{-t}(q) = f(q) - tg(t,q) \quad \text{e} \quad g(0,q) = Xf(q),$$

per cui

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y)(f) = Y_{\theta_t(p)}(f \circ \theta_{-t}) = (Yf)\big(\theta_t(p)\big) - t(Yg_t)\big(\theta_t(p)\big),$$

dove abbiamo posto $g_t(q) = g(t,q)$. Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y) - Y_p](f) &= \lim_{t\to 0}\frac{(Yf)\bigl(\theta_t(p)\bigr) - (Yf)(p)}{t} - (Yg_0)(p)\\ &= \frac{d}{dt}((Yf)\circ\theta^p)\Big|_{t=0} - Y_p(Xf) = X(Yf)(p) - Y(Xf)(p) = [X,Y](f)(p),\end{aligned}$$

grazie nuovamente al Teorema 3.3.4.(vi), e ci siamo. □

Se $F\colon M\to N$ è un diffeomorfismo, e $X\in\mathcal{T}(M)$, allora possiamo definire un campo vettoriale su N, che indicheremo con $dF(X)$, ponendo

$$\forall q\in N \qquad dF(X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}).$$

Se $F\colon M\to N$ non è un diffeomorfismo, questa formula non si può applicare: se F non è surgettiva esistono dei $q\in N$ per cui $F^{-1}(q)$ è vuoto, e se F non è iniettiva potrebbero esistere p_1, $p_2\in M$ per cui $q=F(p_1)=F(p_2)$ ma $dF_{p_1}(X_{p_1})\ne dF_{p_2}(X_{p_2})$, per cui questa formula non dà un modo univoco per definire un vettore tangente in q. Introduciamo allora la seguente

Definizione 3.3.6: Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra due varietà. Diremo che un campo vettoriale $V\in\mathcal{T}(N)$ è *F-correlato* a un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(M)$ se $V_{F(p)} = dF_p(X_p)$ per ogni $p\in M$.

Chiaramente, se F è un diffeomorfismo allora $dF(X)$ è l'unico campo vettoriale su N che è F-correlato a X, ma se F non è un diffeomorfismo potrebbero esistere più campi vettoriali F-correlati a X, o potrebbe non esisterne nessuno.

Esercizio 3.3.2. Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà, $X\in\mathcal{T}(M)$ e $Y\in\mathcal{T}(N)$. Dimostra che Y è F-correlato a X se e solo se $X(f\circ F) = Y(f)\circ F$ per ogni $f\in C^\infty(N)$.

Esercizio 3.3.3. Dimostra che se $F\colon M\to N$ è un diffeomorfismo allora

$$[dF(X), dF(Y)] = dF([X,Y])$$

per ogni X, $Y\in\mathcal{T}(M)$. Più in generale, senza assumere che F sia un diffeomorfismo, dimostra che se $V\in\mathcal{T}(N)$ è F-correlato a $X\in\mathcal{T}(M)$ e $W\in\mathcal{T}(N)$ è F-correlato a $Y\in\mathcal{T}(M)$, allora $[V,W]$ è F-correlato a $[X,Y]$.

Esercizio 3.3.4. Sia $F\colon M\to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà, $X\in\mathcal{T}(M)$ e $Y\in\mathcal{T}(N)$. Indichiamo con $\Theta\colon\mathcal{U}\to M$ il flusso locale di X, e con $\Psi\colon\mathcal{V}\to N$ il flusso locale di Y. Dimostra che Y è F-correlato a X se e solo se per ogni $t\in\mathbb{R}$ si ha $\psi_t\circ F = F\circ\theta_t$ su $\mathcal{U}_t$.

Concludiamo questo paragrafo parlando dei campi vettoriali sui gruppi di Lie.

Definizione 3.3.7: Un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(G)$ su un gruppo di Lie G è *invariante a sinistra* se si ha $dL_h(X) = X$ per ogni $h\in G$, cioè se

$$\forall h,x\in G \qquad d(L_h)_x(X_x) = X_{hx},$$

dove $L_h\colon G\to G$ è la traslazione sinistra.

Lemma 3.3.7: *Sia G un gruppo di Lie di elemento neutro $e\in G$. Allora:*
- (i) *L'applicazione $X\mapsto X(e)$ è un isomorfismo fra il sottospazio di $\mathcal{T}(M)$ costituito dai campi vettoriali invarianti a sinistra e lo spazio tangente T_eG.*
- (ii) *Se X, $Y\in\mathcal{T}(G)$ sono invarianti a sinistra, allora anche $[X,Y]$ lo è.*

Dimostrazione: (i) Se $X\in\mathcal{T}(G)$ è invariante a sinistra, chiaramente abbiamo

$$X_h = d(L_h)_e(X_e)$$

per ogni $h\in G$, per cui X è completamente determinato dal suo valore in e. Viceversa, se scegliamo $v\in T_eG$ e definiamo $X\in\mathcal{T}(G)$ ponendo $X_h = d(L_h)_e(v)\in T_hG$ per ogni $h\in G$ otteniamo (esercizio) un campo vettoriale invariante a sinistra che vale v nell'elemento neutro.

(ii) Se X e Y sono campi vettoriali invarianti a sinistra l'Esercizio 3.3.3 dice che

$$dL_h[X,Y] = [dL_hX, dL_hY] = [X,Y]$$

per ogni $h\in G$, per cui anche $[X,Y]$ è invariante a sinistra. □

Esercizio 3.3.5. Diremo che una varietà M è *parallelizzabile* se TM è un fibrato banale. Dimostra che ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.

Dunque lo spazio tangente all'identità di un gruppo di Lie eredita dai campi vettoriali invarianti a sinistra un'ulteriore struttura algebrica data dalla parentesi di Lie.

Definizione 3.3.8: Uno spazio vettoriale V dotato di un'ulteriore operazione $[\cdot\,,\cdot]\colon V\times V\to V$ che soddisfa le proprietà (i)-(iii) della Proposizione 3.3.2 è detto *algebra di Lie*. Se V e W sono algebre di Lie, un *morfismo* di algebre di Lie è un'applicazione $L\colon V\to W$ lineare tale che $[L(v_1),L(v_2)]=L[v_1,v_2]$ per ogni v_1, $v_2\in V$.

Esempio 3.3.1. Sia A un'algebra non commutativa sul campo $\mathbb{K}$. Allora possiamo fornire A di una struttura di algebra di Lie tramite il *commutatore* $[\cdot\,,\cdot]\colon A\times A\to A$ definito da

$$\forall X,Y\in A \qquad\qquad [X,Y]=XY-YX;$$

si verifica subito che il commutatore soddisfa le proprietà (i)-(iii) della Proposizione 3.3.2. In particolare, lo spazio vettoriale delle matrici $M_{n,n}(\mathbb{K})$ con questa struttura di algebra di Lie verrà indicato con $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Esercizio 3.3.6. Sia $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\mid \mathrm{tr}X=0\}$ il sottospazio delle matrici quadrate a traccia nulla, e $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\mid X^T+X=O\}$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche. Dimostra che X, $Y\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ implica $[X,Y]\in\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, e che X, $Y\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ implica $[X,Y]\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$, per cui $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ e $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ sono delle algebre di Lie.

Definizione 3.3.9: Sia G un gruppo di Lie di elemento neutro $e\in G$. Per ogni $v\in T_eG$, indichiamo con $X^v\in\mathcal{T}(G)$ il campo vettoriale invariante a sinistra tale che $X^v(e)=v$. Allora lo spazio tangente all'elemento neutro, considerato con la sua struttura di spazio vettoriale e con l'operazione $[\cdot,\cdot]\colon T_eG\times T_eG\to T_eG$ definita da $[v,w]=[X^v,X^w](e)$, è detto *algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ del gruppo G.

Non avremo il tempo di vederlo nei dettagli, ma si può ragionevolmente affermare che praticamente tutte le proprietà di un gruppo di Lie semplicemente connesso si possono ricavare dalle proprietà algebriche della sua algebra di Lie.

Definizione 3.3.10: Sia G un gruppo di Lie di dimensione n, $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie, e $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale. Allora per ogni i, $j=1,\dots,n$ devono esistere $c_{ij}^1,\dots,c_{ij}^n\in\mathbb{R}$ tali che

$$[v_i,v_j]=\sum_{k=1}^n c_{ij}^k v_k.$$

Le costanti $c_{ij}^k\in\mathbb{R}$ sono dette *costanti di struttura* di $\mathfrak{g}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esempio 3.3.2. Sia $G=GL(n,\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici invertibili a coefficienti reali; vogliamo dimostrare che la sua algebra di Lie è l'algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ introdotta nell'Esempio 3.3.1. Siccome G è un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$, lo spazio tangente nell'identità a G è canonicamente isomorfo come spazio vettoriale a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$; dobbiamo dimostrare che anche le strutture di algebra di Lie coincidono. Per ogni $a=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ indichiamo con $\tilde{a}\in\mathcal{T}(G)$ la sua estensione come campo vettoriale invariante a sinistra. Se $x=(x_{hk})\in G$ e $\mathbf{f}\in C^\infty(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{a}_x(\mathbf{f})&=d(L_x)_I(a)(\mathbf{f})=a(\mathbf{f}\circ L_x)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial(f\circ L_x)}{\partial y_{ij}}(I)\\&=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\sum_{h,k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_{hk}}(x)\sum_{r=1}^n\frac{\partial(x_{hr}y_{rk})}{\partial y_{ij}}=\sum_{i,j,h,k,r=1}^n a_{ij}x_{hr}\delta_{ri}\delta_{kj}\frac{\partial f}{\partial x_{hk}}(x)\\&=\sum_{h,j,r=1}^n x_{hr}a_{rj}\frac{\partial f}{\partial x_{hj}}(x),\end{aligned}$$

per cui

$$\tilde{a}_x=R_a(x)=xa.$$

Da questo segue facilmente che $[\tilde{a},\tilde{b}]_x = x(ab-ba)$, per cui effettivamente la struttura di algebra di Lie è data dal commutatore:

$$\forall a,b \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \qquad [a,b] = ab - ba.$$

In particolare, se indichiamo con $\mathcal{B} = \{E_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ la base canonica di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, dove E_{ij} è la matrice con 1 al posto (i,j) e 0 altrove, cioè

$$(E_{ij})_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js},$$

le costanti di struttura di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono date da

$$c_{(ij)(hk)}^{(rs)} = \delta_{ir}\delta_{ks}\delta_{jh} - \delta_{rh}\delta_{sj}\delta_{ik}.$$

Esempio 3.3.3. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, il gruppo di Lie $G = GL(V)$ è chiaramente isomorfo a $GL(n,\mathbb{R})$, e la sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(V)$ è isomorfa a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. In particolare, $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$ come spazio vettoriale, e la struttura di algebra di Lie è di nuovo data dal commutatore.

Esercizio 3.3.7. Siano G e H due gruppi di Lie, con algebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ rispettivamente, e sia $F\colon G \to H$ un morfismo di gruppi di Lie. Dimostra che per ogni $X \in \mathcal{T}(G)$ invariante a sinitra esiste un unico $Y = F_*(X) \in \mathcal{T}(H)$ che è F-correlato a X, e che l'applicazione $F_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ definita da $F_*(X_e) = (F_*X)_e$ è un morfismo di algebre di Lie.

Esercizio 3.3.8. Sia H un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie di algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Dimostra che se v, $w \in T_eH \subseteq T_eG = \mathfrak{g}$ allora $[v,w] \in T_eH$, per cui T_eH è un'algebra di Lie, e dimostra che T_eH è canonicamente isomorfa all'algebra di Lie di H.

Esercizio 3.3.9. Dimostra che l'algebra di Lie di $SL(n,\mathbb{R})$ è canonicamente isomorfa a $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, e che l'algebra di Lie di $SO(n)$ è canonicamente isomorfa a $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$.

3.4 Il teorema di Frobenius

Questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione di un risultato fondamentale per lo studio dei campi vettoriali su una varietà: il teorema di Frobenius.

Cominciamo ponendoci un problema preliminare: supponiamo di avere su una varietà M di dimensione n un riferimento locale $\{X_1,\ldots,X_n\}$ del fibrato tangente TM. Quando esiste una carta locale φ di M tale che $X_1 = \partial_1,\ldots,X_n = \partial_n$? Una condizione necessaria è data dalla Proposizione 3.3.2.(v): si deve avere $[X_i,X_j] \equiv O$ per ogni i, $j = 1,\ldots,n$. Vogliamo dimostrare che questa condizione è (essenzialmente) anche sufficiente; per farlo procederemo per gradi.

Definizione 3.4.1: Sia $X \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su una varietà M. Diremo che $p \in M$ è un *punto singolare* di X se $X_p = O_p$; diremo che p è un *punto regolare* altrimenti.

Proposizione 3.4.1: *Sia $p \in M$ un punto regolare di un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$. Allora esiste una carta locale (U,φ) centrata in p tale che $X|_U \equiv \partial/\partial x^1$.*

Dimostrazione: Trattandosi di un problema locale, possiamo supporre $M = \mathbb{R}^n$ e $p = O$. Inoltre, essendo $X_p \neq O_p$, a meno di permutare le coordinate possiamo anche supporre che la prima coordinata di X non si annulli in p. Il nostro obiettivo è trovare una carta locale (U,φ) in O tale che si abbia

$$X_q = d(\varphi^{-1})_{\varphi(q)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(q)}\right)$$

per ogni $q \in U$.

Sia $\Theta: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ il flusso locale di X, e scegliamo $\varepsilon > 0$ e un intorno aperto U_0 dell'origine tali che $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subseteq \mathcal{U}$. Poniamo $S_0 = U_0 \cap \{x^1 = 0\}$, e $S = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x') \in S_0\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Definiamo allora $\psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times S \to \mathbb{R}^n$ con

$$\psi(t, x') = \theta_t(0, x').$$

L'idea è che $d\psi(\partial/\partial t) \equiv X \circ \psi$ e che $d\psi_{0,O'}$ è invertibile; allora ψ è localmente invertibile, e l'inversa locale φ di ψ ci fornirà la carta locale cercata.

Dato $(t_0, x_0') \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times S$ e $f \in C^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0\big)$ abbiamo

$$d\psi_{(t_0, x_0')} \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(t_0, x_0')} \right)(f) = \left. \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \psi) \right|_{(t_0, x_0')} = \left. \frac{\partial}{\partial t} f\big(\theta_t(0, x_0')\big) \right|_{t=t_0} = (Xf)\big(\psi(t_0, x_0')\big),$$

per cui $d\psi(\partial/\partial t) \equiv X \circ \psi$, come voluto.

Infine, siccome $\psi(0, x') = (0, x')$ per ogni $x' \in S$, abbiamo

$$d\psi_{(0,O')} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_O$$

per ogni $i = 2, \ldots, n$. Quindi $d\psi_{(0,O')}$ manda una base di $T_{(0,O')}\mathbb{R}^n$ in una base di $T_O\mathbb{R}^n$ (ricorda che la prima coordinata di X_O è non nulla!), per cui $d\psi_{(0,O')}$ è invertibile come richiesto, e ci siamo. □

Per trattare il caso generale ci serve la seguente

Proposizione 3.4.2: *Siano $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ due campi vettoriali su una varietà M. Indichiamo con $\Theta: \mathcal{U} \to M$ il flusso locale di X, e con $\Psi: \mathcal{V} \to M$ il flusso locale di Y. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $[X, Y] = O$;

(ii) Y *è* X*-invariante;*

(iii) X *è* Y*-invariante;*

(iv) $\psi_s \circ \theta_t = \theta_t \circ \psi_s$ *non appena uno dei due membri è definito.*

Dimostrazione: Se Y è X-invariante, chiaramente $\mathcal{L}_X Y = O$, e quindi $[X, Y] = O$. Viceversa, supponiamo che $[X, Y] = O$; dobbiamo dimostrare che Y è X-invariante. Sia $p \in M$ qualsiasi, e sia $V: \mathcal{U}^p \to T_p M$ data da

$$V(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y);$$

per far vedere che Y è X-invariante ci basta dimostrare che V è costante. Ma infatti per ogni $t_0 \in \mathcal{U}^p$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(t_0) &= \left. \frac{d}{dt} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{ds} d(\theta_{-t_0-s})_{\theta_{t_0+s}(p)}(Y) \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{d}{ds} d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)} \circ d(\theta_{-s})_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}(Y) \right|_{s=0} = d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)} \left(\left. \frac{d}{ds} d(\theta_{-s})_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}(Y) \right|_{s=0} \right) \\
&= d(\theta_{-t_0})_{\theta_{t_0}(p)}(\mathcal{L}_X Y) = O,
\end{aligned}$$

per cui $V(t) \equiv V(0) = Y_p$ e ci siamo.

Abbiamo quindi dimostrato che (i) è equivalente a (ii); essendo $[Y, X] = -[X, Y]$, in modo analogo si dimostra che (i) è equivalente a (iii).

Dimostriamo ora che (iii) implica (iv). Scegliamo $s \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{V}_s$, e consideriamo la curva $\sigma: I \to M$ ottenuta ponendo $\sigma = \psi_s \circ \theta^p$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo contenente l'origine su cui σ è definita. Allora per ogni $t \in I$ abbiamo

$$\sigma'(t) = (\psi_s \circ \theta^p)'(t) = d(\psi_s)_{\theta^p(t)}\big((\theta^p)'(t)\big) = d(\psi_s)_{\theta^p(t)}(X_{\theta^p(t)}) = X_{\sigma(t)},$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che X è Y-invariante. Ma allora questo vuol dire che σ è la curva integrale di X uscente da $\psi_s(p)$, per cui $\psi_s \circ \theta_t(p)$ è definito se e solo se $\theta_t \circ \psi_s(p)$ lo è, e i due sono uguali.

Infine, supponiamo che valga (iv). Allora

$$d(\psi_s)_p(X) = \left. \frac{d}{dt}(\psi_s \circ \theta^p) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\big(\psi_s \circ \theta_t(p)\big) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\big(\theta_t(\psi_s(p))\big) \right|_{t=0} = (\theta^{\psi_s(p)})'(0) = X_{\psi_s(p)},$$

per cui X è Y-invariante, come voluto. □

Possiamo allora dimostrare il

Teorema 3.4.3: *Siano $X_1,\ldots,X_k\in\mathcal{T}(M)$ campi vettoriali linearmente indipendenti in ogni punto di una varietà M di dimensione n. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *Per ciascun $p\in M$ esiste una carta locale (U,φ) centrata in p tale che $X_j|_U=\partial/\partial x^j$ per $j=1,\ldots,k$;*
(ii) *$[X_i,X_j]\equiv O$ per i, $j=1,\ldots,k$.*

Dimostrazione: Abbiamo già notato che (i) implica (ii); supponiamo allora che (ii) valga. Essendo un problema locale, possiamo supporre $M=\mathbb{R}^n$ e $p=O$. A meno di permutare le coordinate, possiamo anche supporre che $\{X_1|_p,\ldots,X_k|_p,\partial/\partial\tilde{x}^{k+1}|_p,\ldots,\partial/\partial\tilde{x}^n|_p\}$ sia una base di T_pM. Indichiamo con Θ_j il flusso locale di X_j, per $j=1,\ldots,k$. Ragionando per induzione su k si dimostra facilmente che esistono $\varepsilon>0$ e un intorno $W\subseteq\tilde{U}$ di p tali che la composizione $(\theta_k)_{t_k}\circ\cdots\circ(\theta_1)_{t_1}$ è ben definita su W per ogni $t_1,\ldots,t_k\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Poniamo $S=\{(x^{k+1},\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^{n-k}\mid(0,\ldots,0,x^{k+1},\ldots,x^n)\in W\}$, e definiamo $\psi\colon(-\varepsilon,\varepsilon)^k\times S\to\mathbb{R}^n$ con

$$\psi(t^1,\ldots,t^k,x^{k+1},\ldots,x^n)=(\theta_k)_{t^k}\circ\cdots\circ(\theta_1)_{t^1}(0,\ldots,0,x^{k+1},\ldots,x^n).$$

Dimostriamo prima di tutto che

$$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)=X_i \tag{3.4.1}$$

per $i=1,\ldots,k$. Infatti, se $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)^k\times S$ la proposizione precedente ci dà

$$\begin{aligned}d\psi_x\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)(f)&=\frac{\partial}{\partial t^i}(f\circ\psi)\bigg|_x=\frac{\partial}{\partial t^i}f\big((\theta_k)_{t^k}\circ\cdots\circ(\theta_1)_{t^1}(0,\ldots,0,x^{k+1},\ldots,x^n)\big)\bigg|_x\\&=\frac{\partial}{\partial t^i}f\big((\theta_i)_{t^i}\circ(\theta_k)_{t^k}\circ\cdots\circ(\theta_{i+1})_{t^{i+1}}\circ(\theta_{i-1})_{t^{i-1}}\circ(\theta_1)_{t^1}(0,\ldots,0,x^{k+1},\ldots,x^n)\big)\bigg|_x\\&=(X_if)\big(\psi(x)\big),\end{aligned}$$

e (3.4.1) è dimostrata. Per concludere la dimostrazione ci basta far vedere che $d\psi_O$ è invertibile, perché in tal caso ψ è invertibile in un intorno dell'origine, e l'inversa φ di ψ è la carta locale cercata. Ma infatti siccome $\psi(0,\ldots,0,x^{k+1},\ldots,x^n)=(0,\ldots,0,x^{k+1},\ldots,x^n)$, vediamo subito che

$$d\psi_O\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_O$$

per $j=k+1,\ldots,n$, e la (3.4.1) insieme all'ipotesi che $\{X_1|_p,\ldots,X_k|_p,\partial/\partial\tilde{x}^{k+1}|_p,\ldots,\partial/\partial\tilde{x}^n|_p\}$ fosse una base di T_pM ci dà la tesi. □

Questo era solo l'antipasto. Una conseguenza del Teorema 3.3.4 è che dato un campo vettoriale mai nullo $X\in\mathcal{T}(M)$ possiamo decomporre la varietà M nell'unione delle curve integrali di X: ogni punto di M appartiene a una e una sola curva integrale, e ciascuna curva integrale è un'immersione (in quanto abbiamo supposto che X non abbia punti singolari).

Se ci dimentichiamo della parametrizzazione delle curve integrali, possiamo riformulare il risultato in questo modo: da una parte abbiamo selezionato in modo C^∞ un sottospazio uni-dimensionale in ciascun spazio tangente T_pM (il sottospazio generato da X_p); dall'altra abbiamo che ogni punto è contenuto nell'immagine dell'immersione di una varietà 1-dimensionale tangente in ogni punto a questi sottospazi unidimensionali. Il teorema di Frobenius è la generalizzazione di questo enunciato al caso di sottospazi k-dimensionali.

Introduciamo una serie di definizioni per giungere a un enunciato preciso del teorema di Frobenius.

Definizione 3.4.2: Una *distribuzione* k-dimensionale su una varietà M è un sottoinsieme $\mathcal{D}\subset TM$ del fibrato tangente tale che $\mathcal{D}_p=\mathcal{D}\cap T_pM$ è un sottospazio k-dimensionale di T_pM per ogni $p\in M$. Diremo che la distribuzione k-dimensionale $\mathcal{D}$ è *liscia* se per ogni $p\in M$ esiste un intorno aperto $U\subseteq M$ di p e k campi vettoriali locali $Y_1,\ldots,Y_k\in\mathcal{T}(U)$ tali che $\mathcal{D}_p=\mathrm{Span}\big(Y_1(p),\ldots,Y_k(p)\big)$ per ogni $p\in U$. La k-upla $(Y_1,\ldots,Y_k)$ è detta *riferimento locale* per $\mathcal{D}$ su U.

Esercizio 3.4.1. Dimostra che una distribuzione $\mathcal{D}\subseteq TM$ k-dimensionale è una distribuzione liscia se e solo se è un sottofibrato vettoriale di TM di rango k.

Definizione 3.4.3: Una *sezione locale* di una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ su un aperto $U \subseteq M$ di una varietà M è un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(U)$ tale che $X_p \in \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in U$. Indicheremo con $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ lo spazio delle sezioni locali di $\mathcal{D}$ sull'aperto U. Diremo che la distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è *involutiva* se $[X, Y] \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ per ogni X, $Y \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ e ogni aperto $U \subseteq M$.

Esercizio 3.4.2. Dimostra che una distribuzione liscia $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se per ogni $p \in M$ esiste un riferimento locale $(Y_1, \dots, Y_k)$ per $\mathcal{D}$ su un intorno aperto U di p tale che $[Y_i, Y_j] \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ per ogni i, $j = 1, \dots, k$.

Definizione 3.4.4: Una *sottovarietà immersa* di dimensione k in una varietà M è un sottoinsieme $S \subseteq M$ dotato di una struttura di varietà k-dimensionale (non necessariamente con la topologia indotta da M) tale che l'inclusione $\iota\colon S \hookrightarrow M$ sia un'immersione di classe C^∞.

Osservazione 3.4.1. Se $F\colon N \to M$ è un'immersione iniettiva, allora $F(N)$, con la struttura di varietà indotta da N come descritto nell'Osservazione 2.5.1, è una sottovarietà immersa di M. Inoltre, se S è una sottovarietà immersa in M, il differenziale dell'inclusione permette di identificare T_pS con un sottospazio di T_pM per ogni $p \in S$.

Esercizio 3.4.3. Sia $\iota\colon S \hookrightarrow M$ una sottovarietà immersa in una varietà M. Dimostra che per ogni $X \in \mathcal{T}(M)$ tale che $X_p \in T_pS$ per ogni $p \in S$ esiste un unico campo vettoriale $X|_S \in \mathcal{T}(S)$ che è ι-correlato a X. Deduci che se X, $Y \in \mathcal{T}(M)$ sono tali che X_p, $Y_p \in T_pS$ per ogni $p \in S$ allora $[X, Y]_p \in T_pS$ per ogni $p \in S$.

Esercizio 3.4.4. Sia $S \subseteq M$ un sottoinsieme di una varietà M. Dimostra che per ogni topologia su S esiste al più una struttura di varietà differenziabile su S che induce la topologia data su S e la rende una sottovarietà immersa di M.

Definizione 3.4.5: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia. Una *sottovarietà integrale* di $\mathcal{D}$ è una sottovarietà immersa $S \hookrightarrow M$ tale che $T_pS = \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in S$. Diremo che $\mathcal{D}$ è *integrabile* se ogni punto di M è contenuto in una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$.

Proposizione 3.4.4: *Ogni distribuzione liscia integrabile è involutiva.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione integrabile, e X, $Y \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ due sezioni di $\mathcal{D}$ su un aperto U. Preso $p \in U$, sia $N \subseteq U$ una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$ contenente p. Siccome X e Y sono sezioni di $\mathcal{D}$, abbiamo X_q, $Y_q \in T_qN$ per ogni $q \in N$; l'Esercizio 3.4.3 ci dice allora che $[X, Y]_p \in T_pN = \mathcal{D}_p$. Siccome questo vale per qualsiasi $p \in U$, otteniamo $[X, Y] \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$, come voluto. □

Come già succedeva per le curve integrali, le sottovarietà integrali sono (almeno localmente) a due a due disgiunte e, in un certo senso, parallele. Per precisare questo concetto ci servono un altro paio di definizioni.

Definizione 3.4.6: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia k-dimensionale in una varietà di dimensione n. Diremo che una carta locale (U, φ) è *piatta* per $\mathcal{D}$ se $\varphi(U) = V' \times V''$ con V' aperto in $\mathbb{R}^k$ e V'' aperto in $\mathbb{R}^{n-k}$, e se $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k)$ è un riferimento locale per $\mathcal{D}$ su U. Diremo che $\mathcal{D}$ è *completamente integrabile* se per ogni $p \in M$ esiste una carta locale (U, φ) in p piatta per $\mathcal{D}$. Se (U, φ) è una carta piatta per $\mathcal{D}$, gli insiemi della forma $\{x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n\}$ con $c^{k+1}, \dots, c^n \in \mathbb{R}$ sono detti *foglie* di U.

Lemma 3.4.5: *Ogni distribuzione liscia completamente integrabile è integrabile.*

Dimostrazione: Infatti se (U, φ) è una carta piatta per una distribuzione k-dimensionale liscia $\mathcal{D}$ allora le foglie di U sono chiaramente delle sottovarietà integrali di $\mathcal{D}$. □

Dunque completamente integrabile implica integrabile che implica involutiva. Il *Teorema di Frobenius locale* ci assicura che queste implicazioni sono in realtà delle equivalenze:

Teorema 3.4.6: (Frobenius) *Ogni distribuzione liscia involutiva è completamente integrabile.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia involutiva. Grazie al Teorema 3.4.3, per dimostrare che $\mathcal{D}$ è completamente integrabile ci basta trovare nell'intorno di ogni punto di M un riferimento locale di $\mathcal{D}$ composto da campi vettoriali che commutano.

Dato $p \in M$, scegliamo una carta locale (U, φ) centrata in p tale che esista un riferimento locale $(X_1, \dots, X_k)$ per $\mathcal{D}$ su U. Inoltre, a meno di permutare le coordinate di φ, possiamo anche supporre che

$$\left\{ X_1(p), \dots, X_k(p), \left.\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right\}$$

sia una base di T_pM. Per comodità di notazione, poniamo $X_j = \partial/\partial x^j$ per $j = k+1, \dots, n$, e scegliamo $a_i^j \in C^\infty(U)$ tali che

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

su U, per $i = 1, \dots, n$. La matrice (a_i^j) è invertibile in p; a meno di restringere ulteriormente U possiamo supporre che sia invertibile su tutto U, e sia (b_j^i) la sua inversa. Allora

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n b_j^i X_i = \sum_{i=1}^k b_j^i X_i + \sum_{i=k+1}^n b_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

per $j = 1, \dots, n$. Definiamo allora $Y_j = \sum_{i=1}^k b_j^i X_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(U)$ per $j = 1, \dots, k$; per concludere ci basta dimostrare che $(Y_1, \dots, Y_k)$ è un riferimento locale per $\mathcal{D}$ composto da campi vettoriali che commutano.

Sia $F: U \to \mathbb{R}^k$ data da $F = \pi \circ \varphi$, dove $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è la proiezione sulle prime k coordinate. Allora per ogni $q \in U$ e ogni $j = 1, \dots, k$ abbiamo

$$dF_q(Y_j) = dF_q(Y_j) + \sum_{i=k+1}^n b_j^i(q)\, dF_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = dF_q\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{F(q)}.$$

Quindi gli Y_j sono linearmente indipendenti su tutto U, per cui formano un riferimento locale per $\mathcal{D}$, e $dF_q|_{\mathcal{D}_q}$ è iniettivo per ogni $q \in U$. Inoltre, l'Esercizio 3.3.3 implica che

$$dF_q([Y_i, Y_j]) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\bigl(F(q)\bigr) = O$$

per ogni $q \in U$ e $i, j = 1, \dots, k$. Ma allora, essendo $\mathcal{D}$ involutiva abbiamo $[Y_i, Y_j](q) \in \mathcal{D}_q$, ed essendo $dF_q|_{\mathcal{D}_q}$ iniettivo troviamo $[Y_i, Y_j](q) = O_q$, come voluto. □

Vogliamo ora dare una descrizione di come sono disposte le sottovarietà integrali, descrizione che ci servirà poi per dare la versione globale del Teorema di Frobenius.

Proposizione 3.4.7: *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva k-dimensionale in una varietà M, (U, φ) una carta piatta per $\mathcal{D}$, e N una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$. Allora $N \cap U$ è unione disgiunta al più numerabile di aperti connessi di foglie di U, ciascuno dei quali è aperto in N ed embedded in M.*

Dimostrazione: Siccome l'inclusione $\iota: N \hookrightarrow M$ è continua, l'intersezione $N \cap U = \iota^{-1}(U)$ è aperta in N, e quindi è unione di una quantità al più numerabile di componenti connesse, ciascuna delle quali è aperta in N.

Sia V una di queste componenti connesse; cominciamo col dimostrare che è contenuta in un'unica foglia di U. Essendo (U, φ) una carta piatta per $\mathcal{D}$, per ogni $p \in U$ abbiamo $\mathcal{D}_p = \mathrm{Ker}(dx^{k+1}) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(dx^n)$. Quindi la restrizione di $dx^{k+1}, \dots, dx^n$ a TV è identicamente nulla; essendo V connesso, questo vuol dire che le funzioni $x^{k+1}, \dots, x^n$ sono costanti su V, e quindi V è contenuto in un'unica foglia S di U.

Siccome S è una sottovarietà (embedded) di M, l'inclusione $V \hookrightarrow S$ è di classe C^∞, essendolo a valori in M. Ma allora è un'immersione iniettiva fra varietà della stessa dimensione, per cui è un diffeomorfismo locale e un omeomorfismo con l'immagine, che è aperta in S; in altre parole, è un embedding. Essendo S embedded in M, ne segue che V è embedded in M. □

Definizione 3.4.7: Una *foliazione* di dimensione k di una n-varietà è una partizione $\mathcal{F}$ di M in sottovarietà immerse connesse, disgiunte e di dimensione k (dette *foglie* della foliazione) tali che per ogni punto $p \in M$ esiste una carta locale (U, φ) in p per cui $\varphi(U) = V' \times V''$, con V' aperto in $\mathbb{R}^k$ e V'' aperto in $\mathbb{R}^{n-k}$, e tale che ogni foglia della foliazione intersechi U o nell'insieme vuoto o in una unione disgiunta al più numerabile di foglie k-dimensionali di U della forma $\{x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\}$ per opportune costanti $c^{k+1}, \ldots, c^n \in \mathbb{R}$. Una tale carta locale sarà detta *piatta* per la foliazione $\mathcal{F}$.

Esercizio 3.4.5. Dimostra che l'unione degli spazi tangenti alle foglie di una foliazione k-dimensionale forma una distribuzione liscia k-dimensionale involutiva.

La versione globale del Teorema di Frobenius ci dice che è vero anche l'inverso di questo esercizio, per cui foliazioni o distribuzioni involutive sono di fatto la stessa cosa.

Per dimostrarlo, ci serve un ultimo

Lemma 3.4.8: *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva in una varietà M, e sia $\{N_\alpha\}$ una collezione di sottovarietà integrali connesse di $\mathcal{D}$ con un punto in comune. Allora $N = \bigcup_\alpha N_\alpha$ ha un'unica struttura di varietà rispetto alla quale è una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ tale che ciascun N_α sia aperto in N.*

Dimostrazione: Su ciascun N_α fissiamo un atlante composto da carte locali della forma $(S \cap N_\alpha, \pi \circ \varphi)$, dove S è un'unica foglia di una carta (U, φ) piatta per $\mathcal{D}$, e $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è la proiezione sulle prime k-coordinate. Se N ha una struttura di varietà che soddisfa le richieste queste carte devono farvi parte; quindi ci basta dimostrare che mettendole insieme otteniamo un atlante di N.

Per avere la compatibilità topologica delle carte, dobbiamo prima di tutto dimostrare che $N_\alpha \cap N_\beta$ è aperto in N_β quali che siano α e β. Prendiamo $q \in N_\alpha \cap N_\beta$, sia (U, φ) una carta in q piatta per $\mathcal{D}$, e indichiamo con V_α (rispettivamente, V_β) la componente connessa di $N_\alpha \cap U$ (rispettivamente, $N_\beta \cap U$) contenente q. La Proposizione 3.4.7 ci dice che V_α e V_β sono aperti di una foglia S di U, necessariamente la stessa per entrambi in quanto deve contenere q. Quindi $V_\alpha \cap V_\beta$ è aperto in S, e quindi in N_β, come voluto.

Siccome due foglie distinte di una carta piatta sono disgiunte, se $(S_\alpha \cap N_\alpha) \cap (S_\beta \cap N_\beta) \neq \varnothing$ allora $S_\alpha = S_\beta$. Quindi i cambiamenti di coordinate nel nostro atlante saranno della forma $\pi \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\pi|_{\varphi(S)})^{-1}$, definiti su aperti di $\mathbb{R}^k$ per quanto detto finora, e chiaramente di classe C^∞.

Siccome essere un'immersione è una proprietà locale, l'inclusione $N \hookrightarrow M$ è un'immersione, ed è evidente che N è una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$.

Rimane quindi da dimostrare che la strutturà di varietà così definita su N è di Hausdorff e ha una base numerabile. Se $q, q' \in N$ sono punti distinti, prendiamo intorni disgiunti U e U' in M; allora, essendo l'inclusione $N \hookrightarrow M$ continua, $U \cap N$ e $U' \cap N$ sono intorni disgiunti di q e q' in N, per cui N è di Hausdorff.

Ora, sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto numerabile di M composto da domini di carte piatte per $\mathcal{D}$. Per far vedere che N ha una base numerabile è sufficiente far vedere che $N \cap U_i$ è contenuto in un'unione numerabile di foglie di U_i per ciascun i, in quanto qualsiasi aperto di una foglia ha una base numerabile.

Fissiamo un punto $p \in M$ contenuto in tutti gli N_α, scegliamo $U_i \in \mathfrak{U}$, e sia $S \subset U_i$ una foglia di U_i contenente un punto $q \in N$. Per definizione, deve esistere un α tale che N_α contiene sia p che q. Essendo N_α connesso per archi, esiste una curva continua $\sigma\colon [0,1] \to N_\alpha$ che collega p con q. Siccome l'immagine di σ è compatta, esiste una partizione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ di $[0,1]$ tale che $\sigma([t_{j-1}, t_j])$ è contenuto in un $U_{i_j} \in \mathfrak{U}$ per ogni $j = 1, \ldots, m$. Essendo $\sigma([t_{j-1}, t_j])$ connesso, è contenuto in un'unica componente connessa di $N_\alpha \cap U_{i_j}$, e quindi in un'unica foglia S_{i_j} di U_{i_j}.

Diremo che una foglia S di un qualche U_k è *accessibile* da p se esiste una successione finita di indici $i_0, \ldots, i_m$ e di foglie $S_{i_j} \subset U_{i_j}$ tali che $p \in S_{i_0}$, $S_{i_m} = S$ e $S_{i_{j-1}} \cap S_{i_j} \neq \varnothing$ per $j = 1, \ldots, m$. Siccome ogni foglia $S_{i_{j-1}}$ è a sua volta una sottovarietà integrale di $\mathcal{D}$, per la Proposizione 3.4.7 può intersecare al più una quantità numerabile di foglie di U_{i_j}. Questo vuol dire che esistono al più una quantità numerabile di foglie accessibili da p; ma la discussione precedente mostra che ogni foglia che interseca N è accessibile da p, e abbiamo finito. □

E infine, ecco il *Teorema di Frobenius globale:*

Teorema 3.4.9: *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva in una varietà M. Allora la collezione di tutte le sottovarietà integrali massimali di $\mathcal{D}$ forma una foliazione di M.*

Dimostrazione: Per ogni $p \in M$ indichiamo con L_p l'unione di tutte le sottovarietà integrali connesse di $\mathcal{D}$ che contengono p; grazie al lemma precedente, L_p è una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$, chiaramente massimale. Se $L_p \cap L_{p'} \neq \varnothing$, allora $L_p \cup L_{p'}$ è ancora una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$, e quindi per massimalità $L_p = L_{p'}$. Quindi le sottovarietà integrali connesse massimali di $\mathcal{D}$ formano una partizione di M.

Se (U, φ) è una carta locale piatta per $\mathcal{D}$, allora $L_p \cap U$ è unione al più numerabile di aperti di foglie di U, per la Proposizione 3.4.7. Se per una di tali foglie S si avesse $L_p \cap S \neq S$, allora $L_p \cup S$ sarebbe una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ contenente propriamente L_p, contro la massimalità. Quindi $L_p \cap U$ è sempre unione di una quantità al più numerabile di foglie di U, per cui $\{L_p \mid p \in M\}$ è una foliazione. $\square$

3.5 Forme differenziali e differenziale esterno

In questo paragrafo raccoglieremo alcune proprietà fondamentali delle forme differenziali.

Prima di tutto, se $\eta \in A^r(M)$ e $\omega \in A^s(M)$ sono rispettivamente una r-forma e una s-forma su una varietà M, è chiaro che possiamo definire la $(r+s)$-forma $\eta \wedge \omega \in A^{r+s}(M)$ ponendo

$$\forall p \in M \qquad \eta \wedge \omega(p) = \eta(p) \wedge \omega(p);$$

in questo modo otteniamo su

$$A^\bullet(M) = \bigoplus_{r=0}^{\dim M} A^r(M)$$

una naturale struttura di algebra associativa e anticommutativa.

Abbiamo notato nel Paragrafo 3.3 che, in generale, è difficile trasportare campi vettoriali da una varietà a un'altra usando applicazioni differenziabili. Uno dei vantaggi delle forme differenziali è che sono invece molto semplici da trasportare:

Definizione 3.5.1: Sia $\omega \in A^r(N)$ una r-forma sulla varietà N, e $F\colon M \to N$ un'applicazione di classe C^∞. Il *pull-back* di ω lungo F è la r-forma $F^*\omega \in A^r(M)$ definita da

$$F^*\omega_p(v_1, \ldots, v_r) = \omega_{F(p)}\big(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_r)\big)$$

per ogni $v_1, \ldots, v_r \in T_pM$. Si verifica subito (esercizio) che $F^*\omega$ è r-lineare, alternante e di classe C^∞, per cui è effettivamente una r-forma su M. Se $\iota\colon M \hookrightarrow N$ è una sottovarietà, scriveremo anche $\omega|_M$ per $\iota^*\omega$.

Esercizio 3.5.1. Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà. Dimostra che

(i) $F^*\colon A^r(N) \to A^r(M)$ è lineare per ogni $r \geq 0$;
(ii) $F^*(\eta \wedge \omega) = F^*\eta \wedge F^*\omega$ per ogni η, $\omega \in A^\bullet(N)$;
(iii) se

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1 \ldots i_r} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}$$

è l'espressione in coordinate locali $(y^1, \ldots, y^n)$ di una r-forma $\omega \in A^r(N)$, allora

$$F^*\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} (\omega_{i_1 \ldots i_r} \circ F)\, d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_r} \circ F).$$

In particolare, se M ed N hanno entrambi dimensione n, $(x^1, \ldots, x^n)$ sono coordinate locali su un aperto U di M, $(y^1, \ldots, y^n)$ sono coordinate locali su un aperto V di N con $F(U) \subseteq V$, e $f \in C^\infty(V)$, allora dimostra che

$$F^*(f\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (f \circ F) \det(dF)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Se $f \in C^\infty(M)$ è una funzione differenziabile su M (ovvero una 0-forma), il differenziale df induce un'applicazione $C^\infty(M)$-lineare $df: \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, cioè, grazie alla Proposizione 3.2.1.(i), una 1-forma differenziale. Quindi abbiamo un'applicazione lineare $d: A^0(M) \to A^1(M)$ data in coordinate locali da

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j.$$

Una delle principali proprietà delle forme differenziali è che possiamo estendere quest'applicazione d a tutto $A^\bullet(M)$, cioè possiamo definire in maniera coerente il differenziale di qualsiasi forma differenziale:

Teorema 3.5.1: *Sia M una n-varietà. Allora esiste un'unica applicazione lineare $d: A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ soddisfacente le quattro condizioni seguenti:*

(a) $d\big(A^r(M)\big) \subseteq A^{r+1}(M)$ *per ogni* $r \in \mathbb{N}$;
(b) *se* $f \in C^\infty(M) = A^0(M)$ *allora* $df \in A^1(M)$ *è il differenziale di* f;
(c) *se* $\omega \in A^r(M)$ *e* $\eta \in A^s(M)$ *allora*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta;$$

(d) $d \circ d = O$.

Questa applicazione soddisfa anche le seguenti proprietà:

(i) *d è locale: se $\omega \equiv \omega'$ su un aperto U di M, allora $(d\omega)|_U \equiv (d\omega')|_U$;*
(ii) *d commuta con la restrizione: se $U \subseteq M$ è aperto, allora $d(\omega|_U) = (d\omega)|_U$;*
(iii) *più in generale, d commuta con i pull-back: se $F: M \to N$ è di classe C^∞ e $\omega \in A^r(N)$, allora $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$;*
(iv) *se $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ è una 1-forma e $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, allora*

$$d\omega(X,Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega([X,Y]);$$

(v) *se $(x^1, \dots, x^n)$ sono coordinate locali in un aperto di M, allora*

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \omega_{i_1\dots i_r}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} d\omega_{i_1\dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1\dots i_r}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Dimostrazione: Iniziamo con il caso particolare in cui esista una carta globale (M,φ), con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, e definiamo $d: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ per ogni $r \in \mathbb{N}$ con la (3.5.1); in particolare, $d|_{A^r(M)} \equiv O$ per ogni $r \ge n$. Chiaramente d è lineare e soddisfa (a) e (b); dobbiamo dimostrare che soddisfa (c) e (d). Per far ciò introduciamo la seguente notazione: se $I = (i_1, \dots, i_r)$ è un multiindice, scriveremo dx^I per $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Inoltre, useremo il simbolo $\sum_I'$ per indicare la somma su tutti multiindici $I = (i_1, \dots, i_r)$ crescenti, cioè tali che $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$. Quindi con queste notazioni la (3.5.1) diventa

$$d\left({\sum_I}' \omega_I\, dx^I\right) = {\sum_I}' d\omega_I \wedge dx^I.$$

In particolare, abbiamo $d(f\, dx^I) = df \wedge dx^I$ per ogni multiindice crescente I, e quindi (perché?) per ogni multiindice I, anche non crescente.

Per dimostrare (c), grazie alla linearità possiamo supporre $\omega = f\, dx^I$ e $\eta = g\, dx^J$. Allora

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg\, dx^I \wedge dx^J) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge g\, dx^J + dg \wedge f\, dx^I \wedge dx^J = (df \wedge dx^I) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge (dg \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

dove il fattore $(-1)^r$ compare perché dg è una 1-forma mentre dx^I è una r-forma.

Per dimostrare (d), supponiamo prima $r = 0$. Allora

$$d(df) = d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,dx^i \wedge dx^j = \sum_{1\le i<j\le n}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right] dx^i \wedge dx^j = O.$$

Sia ora $r > 0$ qualsiasi. Allora usando il caso $r = 0$ e la proprietà (c) otteniamo

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left({\sum_J}' d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}\right) \\ &= {\sum_J}' d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} + {\sum_J}' \sum_{i=1}^r (-1)^i\, d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge d(dx^{j_i}) \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} = O. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto un'applicazione lineare soddisfacente (a)–(d), e chiaramente valgono anche (i), (ii) e (v); si possono anche dimostrare le proprietà (iii) e (iv), ma lo rimandiamo al caso generale.

Vediamo ora l'unicità della d, sempre in questo caso particolare. Supponiamo che $\tilde{d}: A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ sia un'altra applicazione lineare che soddisfa (a)–(d). Presa $\omega = {\sum_J}' \omega_J\, dx^J \in A^r(M)$, usando (b), (c) e (d) troviamo

$$\begin{aligned} \tilde{d}\omega &= {\sum_J}' \tilde{d}\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} + (-1)^0 {\sum_J}' \omega_J \tilde{d}(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}) \\ &= {\sum_J}' d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} + {\sum_J}' \omega_J \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{d}(dx^{j_i}) \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \\ &= d\omega + {\sum_J}' \omega_J \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{d}(\tilde{d}x^{j_i}) \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} = d\omega, \end{aligned}$$

come voluto. In particolare, *$d\omega$ non dipende dalla carta globale usata in* (3.5.1).

Ora sia M una varietà qualsiasi. Se $U \subseteq M$ è il dominio di una carta locale, la discussione precedente ci fornisce un'applicazione lineare $d_U: A^\bullet(U) \to A^\bullet(U)$ che soddisfa (a)–(d), (i), (ii) e (v). Sull'intersezione $U \cap U'$ dei domini di due carte locali abbiamo

$$(d_U\omega)|_{U\cap U'} = d_{U\cap U'}\omega = (d_{U'}\omega)|_{U\cap U'},$$

grazie a (ii) e all'unicità di d_U e $d_{U'}$. Quindi possiamo definire un'applicazione lineare $d: A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ ponendo

$$(d\omega)_p = d_U(\omega|_U)_p$$

per ogni $\omega \in A^r(M)$, $p \in M$ e carta (U, φ) in p, e d soddisfa (a)–(d), (i), (ii) e (v).

Dimostriamo ora l'unicità nel caso generale. Sia $\tilde{d}: A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ un'altra applicazione lineare che soddisfa (a)–(d). Cominciamo col dimostrare che $\tilde{d}$ soddisfa anche (i). Chiaramente basta far vedere che se $\eta \in A^r(M)$ è tale che $\eta|_U \equiv O$ per un qualche aperto $U \subseteq M$, allora $(d\eta)|_U \equiv O$. Sia $p \in U$ qualunque, e sia $g \in C^\infty(M)$ una funzione con $g \equiv 1$ in un intorno di p e $g|_{M\setminus U} \equiv 0$ (vedi la Proposizione 2.3.1). Allora $g\eta \equiv O$ su tutto M, per cui

$$O = \tilde{d}(g\eta)_p = dg_p \wedge \eta_p + g(p)\tilde{d}\eta_p = \tilde{d}\eta_p.$$

Essendo p generico, otteniamo $\tilde{d}\eta|_U \equiv O$.

Sia ora (U, φ) una carta locale qualsiasi, e definiamo un'applicazione lineare $\tilde{d}_U: A^\bullet(U) \to A^\bullet(U)$ ponendo $(\tilde{d}_U\omega)_p = (\tilde{d}\tilde{\omega})_p$ per ogni $p \in U$ e $\omega \in A^r(U)$, dove $\tilde{\omega} \in A^r(M)$ è una r-forma globale che coincide con ω in un intorno di p. L'estensione $\tilde{\omega}$ esiste grazie all'Esercizio 3.2.4, e $\tilde{d}_U\omega$ non dipende dall'estensione scelta grazie alla proprietà (i) di $\tilde{d}$. Chiaramente, $\tilde{d}_U$ soddisfa (a)–(d); ma allora, per quanto già visto, $\tilde{d}_U = d_U$.

In particolare, se $\omega \in A^r(M)$, $p \in M$ e (U, φ) è una carta in p, possiamo usare ω stessa come estensione di $\omega|_U$ e quindi

$$(d\omega)_p = (d_U \omega|_U)_p = (\tilde{d}_U \omega|_U)_p = (\tilde{d}\omega)_p.$$

Essendo p e ω generici, otteniamo $\tilde{d} \equiv d$, e l'unicità è dimostrata.

Passiamo ora a verificare (iii). Grazie a (i), ci basta dimostrare (iii) nell'intorno di ciascun punto, per cui possiamo supporre di avere coordinate globali $(x^1, \ldots, x^n)$. Per linearità, possiamo anche supporre che ω sia della forma $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Allora l'Esercizio 3.5.1 dà

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) = d(f \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_r} \circ F) \\ &= d\big((f \circ F)\, d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_r} \circ F)\big) = d(F^*\omega), \end{aligned}$$

come voluto.

Infine, dobbiamo verificare (iv). Grazie alla linearità e alla proprietà (i), ci basta (perché?) considerare il caso $\omega = u\, dv$. Allora

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= du \wedge dv(X, Y) = du(X)dv(Y) - du(Y)dv(X) = X(u)Y(v) - X(v)Y(u) \\ &= X(u)Y(v) + uX\big(Y(v)\big) - Y(u)X(v) - uY\big(X(v)\big) - u\big(X\big(Y(v)\big) - Y\big(X(v)\big)\big) \\ &= X\big(uY(v)\big) - Y\big(uX(v)\big) - u[X, Y](v) \\ &= X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega([X, Y]), \end{aligned}$$

e abbiamo finito. □

Definizione 3.5.2: L'applicazione lineare $d\colon A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ la cui esistenza è dimostrata nel Teorema 3.5.1 è detta *differenziale esterno* di M.

Esercizio 3.5.2. Sia M una varietà, e $\omega \in A^r(M)$. Dimostra che

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{r+1}) = &\sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} X_j\big(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{r+1})\big) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{r+1}\big), \end{aligned}$$

per ogni $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathcal{T}(M)$, dove l'accento circonflesso indica elementi omessi dalla lista.

Esercizio 3.5.3. Sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un riferimento locale per il fibrato tangente TM di una n-varietà M sopra un aperto U, e indichiamo con $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}$ il riferimento locale duale di T^*M sopra U. Siano inoltre $c_{ij}^k \in C^\infty(U)$ tali che

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k E_k$$

per i, j, $k = 1, \ldots, n$. Dimostra che

$$d\epsilon^k = -\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^k\, \epsilon^i \wedge \epsilon^j$$

per $k = 1, \ldots, n$.

Definizione 3.5.3: Diremo che una k-forma $\omega \in A^k(M)$ è *chiusa* se $d\omega = O$; diremo che è *esatta* se esiste una $(k-1)$-forma $\eta \in A^{k-1}(M)$ tale che $d\eta = \omega$. Indicheremo con $Z^k(M)$ il sottospazio delle k-forme chiuse, e con $B^k(M)$ il sottospazio delle k-forme esatte. Siccome $d \circ d \equiv O$, ogni forma esatta è chiusa, cioè $B^k(M) \subseteq Z^k(M)$. Il *k-esimo gruppo di coomologia di de Rham* della varietà M è allora definito come il quoziente $H^k_{dR}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$.

Un risultato fondamentale che non dimostreremo è il *Teorema di de Rham,* che dice che i gruppi di coomologia di de Rham sono degli invarianti topologici della varietà:

Teorema 3.5.2: (de Rham) *Per ogni varietà M e ogni $k \in \mathbb{N}$ il gruppo di coomologia di de Rham $H^k_{dR}(M)$ è canonicamente isomorfo al k-esimo gruppo di coomologia singolare $H^k(M;\mathbb{R})$ di M a coefficienti in $\mathbb{R}$.*

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi che mostrano come introdurre il concetto di distribuzione liscia involutiva usando le forme differenziali invece dei campi vettoriali.

Esercizio 3.5.4. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{D}$ è liscia se e solo se per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno U di p e $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(U)$ tali che

$$\mathcal{D}_q = \mathrm{Ker}\omega^1_q \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\omega^{n-k}_q \tag{3.5.2}$$

per ogni $q \in U$.

Definizione 3.5.4: Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M, e $U \subseteq M$ aperto. Ogni $(n-k)$-upla di 1-forme $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(M)$ che soddisfano (3.5.2) saranno dette *forme di definizione locali* per $\mathcal{D}$. Diremo inoltre che una p-forma $\eta \in A^p(M)$ *annichila* $\mathcal{D}$ se $\eta(X_1, \ldots, X_p) \equiv O$ per ogni $X_1, \ldots, X_p \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(M)$. Indicheremo con $\mathcal{I}^p_M(\mathcal{D}) \subseteq A^p(M)$ il sottospazio delle p-forme che annichilano $\mathcal{D}$, e porremo $\mathcal{I}_M(\mathcal{D}) = \mathcal{I}^0_M(\mathcal{D}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}^n_M(\mathcal{D})$.

Esercizio 3.5.5. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che una p-forma $\eta \in A^p(M)$ annichila $\mathcal{D}$ se e solo se ogni volta che esistono delle forme di definizione locali $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(U)$ per $\mathcal{D}$ su un aperto $U \subseteq M$ allora

$$\eta|_U = \sum_{i=1}^{n-k} \omega^i \wedge \beta^i$$

per opportune $(p-1)$-forme $\beta^1, \ldots, \beta^{n-k} \in A^{p-1}(U)$.

Esercizio 3.5.6. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se per ogni aperto $U \subseteq M$ si ha $d\big(\mathcal{I}^1_U(\mathcal{D})\big) \subseteq \mathcal{I}^2_U(\mathcal{D})$.

Esercizio 3.5.7. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se per ogni aperto $U \subseteq M$ e ogni $(n-k)$-upla di forme di definizione locali $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in A^1(U)$ per $\mathcal{D}$ sopra U esistono delle 1-forme $\alpha^i_j \in A^1(U)$ tali che

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-k} \omega^j \wedge \alpha^i_j$$

per $i = 1, \ldots, n-k$.

Definizione 3.5.5: Un *ideale* di $A^\bullet(M)$ è un sottospazio vettoriale $\mathcal{I} \subseteq A^\bullet(M)$ tale che $\omega \wedge \eta \in \mathcal{I}$ per ogni $\omega \in A^\bullet(M)$ e ogni $\eta \in \mathcal{I}$.

Esercizio 3.5.8. Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k-dimensionale liscia su una n-varietà M. Dimostra che $\mathcal{I}_M(\mathcal{D})$ è un ideale di $A^\bullet(M)$, e che $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se $d\big(\mathcal{I}_M(\mathcal{D})\big) \subseteq \mathcal{I}_M(\mathcal{D})$.

3.6 Orientabilità

Scopo di questo paragrafo è dare una definizione di orientabilità adatta a varietà di dimensione qualunque.

Definizione 3.6.1: Diremo che una varietà connessa M è *orientabile* se esiste una n-forma $\nu \in A^n(M)$ che non si annulla mai. Diremo che due n-forme mai nulle ν_1, $\nu_2 \in A^n(M)$ *determinano la stessa orientazione* se esiste una funzione $f \in C^\infty(M)$ sempre positiva tale che $\nu_2 = f\nu_1$. Una n-forma mai nulla su M è detta *forma* (o *elemento*) *di volume* di M. Una varietà su cui sia stata fissata una forma di volume è detta *varietà orientata*.

Definizione 3.6.2: Sia M una varietà orientata da una forma di volume $\nu \in A^n(M)$. Diremo che una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di T_pM è *positiva* se $\nu_p(v_1, \dots, v_n) > 0$; *negativa* altrimenti (nota che $\nu_p(v_1, \dots, v_n)$ è necessariamente diverso da zero; perché?). Una carta (U, φ) sarà detta *orientata* se esiste una funzione $f \in C^\infty(U)$ sempre positiva tale che $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = f\,\nu|_U$, dove $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ come al solito. In altre parole, (U, φ) è orientata se e solo se $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ è una base positiva di T_pM per ogni $p \in U$ (perché?).

Definizione 3.6.3: Diremo che due carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) di una varietà M sono *equiorientate* se il determinante del differenziale del cambiamento di coordinate $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è positivo in tutti i punti di $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è *orientato* se ogni coppia di carte in $\mathcal{A}$ è equiorientata.

Proposizione 3.6.1: *Sia M una varietà connessa n-dimensionale. Allora M è orientabile se e solo se ammette un atlante orientato.*

Dimostrazione: Supponiamo che M sia orientabile, e sia $\nu \in A^n(M)$ una n-forma mai nulla. Prendiamo un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ con ciascun U_α connesso. Allora $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n \in A^n(U_\alpha)$ è una n-forma locale mai nulla; siccome $\bigwedge^n M$ ha rango 1, deve esistere una funzione $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ mai nulla tale che $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = f_\alpha\,\nu|_{U_\alpha}$. Essendo U_α connesso, la funzione f_α ha segno costante; quindi a meno di modificare φ_α scambiando le ultime due coordinate possiamo supporre che tutte le f_α siano positive. Vogliamo dimostrare che l'atlante $\mathcal{A}$ così ottenuto è orientato. Infatti l'Esempio 3.2.3 ci dà

$$f_\alpha\,\nu|_{U_\alpha \cap U_\beta} = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) f_\beta\,\nu|_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

per cui $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ e dunque $\det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) > 0$ come voluto.

Viceversa, sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante orientato, e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a questo atlante. Poniamo

$$\nu = \sum_\alpha \rho_\alpha\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Le proprietà delle partizioni dell'unità ci assicurano (perché) che $\nu \in A^n(M)$ è globalmente definita; dobbiamo dimostrare che non è mai nulla. Ora, ciascuna $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ non si annulla mai; inoltre

$$dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = \det\left(\frac{\partial x_\alpha^h}{\partial x_\beta^k}\right) dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n$$

su $U_\alpha \cap U_\beta$, per cui $dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ e $dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n$ differiscono per un fattore moltiplicativo strettamente positivo in quanto l'atlante è orientato. Quindi nell'intorno di ogni punto ν è somma di un numero finito di termini che sono tutti un multiplo positivo l'uno dell'altro, per cui ν non si può mai annullare. □

Dunque una varietà è orientabile se e solo se possiamo orientare coerentemente tutti gli spazi tangenti.

Esempio 3.6.1. Una varietà con un atlante costituito da una sola carta (esempio: un grafico) o da due carte che abbiano intersezione connessa (esempio: la sfera) è chiaramente orientabile.

Esercizio 3.6.1. Sia $F: M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà di dimensione n. Dimostra che se $\nu \in \mathcal{A}^n(N)$ è una forma di volume su N allora $F^*\nu$ è una forma di volume su M.

Definizione 3.6.4: Sia $F: M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà orientate. Diremo che F *conserva l'orientazione* se $F^*\nu$ determina l'orientazione data su M per ogni forma di volume $\nu \in A^n(N)$ che determina l'orientazione data su N; altrimenti diremo che F *inverte l'orientazione.*

Esercizio 3.6.2. Sia $F: M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà orientate. Dimostra che F conserva l'orientazione se e solo se $\det \mathrm{Jac}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) > 0$ per ogni carta orientata (U, φ) di M e ogni carta orientata (V, ψ) di N tali che $F(U) \subseteq V$.

Esercizio 3.6.3. Sia $F: M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà orientate di dimensione n. Dimostra che F conserva l'orientazione se e solo se per ogni $p \in M$ l'immagine tramite dF_p di una base positiva di T_pM è una base positiva di $T_{F(p)}N$.

Esercizio 3.6.4. Dimostra che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è orientabile se e solo se n è dispari.

Esercizio 3.6.5. Dimostra che il prodotto di due varietà orientabili è orientabile.

Esercizio 3.6.6. Sia M una varietà tale che TM sia il fibrato banale. Dimostra che M è orientabile.

Esercizio 3.6.7. Posto $I = [0,1]$, sia $p: I \to S^1$ data da $p(t) = e^{2\pi it}$. Indichiamo inoltre con $\pi_1: I \times \mathbb{R} \to I$ la proiezione sul primo fattore. Sia $\sim$ la relazione d'equivalenza su $I \times \mathbb{R}$ che identifica i punti $(0,y) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ con i punti $(1,-y) \in \{1\} \times \mathbb{R}$. Poniamo $E = (I \times \mathbb{R})/\sim$. Siccome $p \circ \pi_1: I \times \mathbb{R} \to S^1$ è costante sulle classi d'equivalenza di $\sim$, otteniamo un'applicazione continua surgettiva $\pi: E \to S^1$. Dimostra che questo è un fibrato vettoriale di rango 1 su S^1 (detto *fibrato di Möbius*), che E è una varietà non orientabile, e deduci che E non è un fibrato banale.

Non tutte le varietà connesse sono orientabili (vedi gli Esercizi 3.6.4 e 3.6.7). Esiste però una procedura standard per ottenere una varietà orientabile a partire da una non orientabile:

Proposizione 3.6.2: *Sia M una varietà connessa non orientabile. Allora esiste un rivestimento liscio a due fogli $\pi: \tilde{M} \to M$ tale che $\tilde{M}$ sia una varietà connessa orientabile. Inoltre il gruppo di automorfismi del rivestimento è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, e se $F: \tilde{M} \to \tilde{M}$ è l'automorfismo diverso dall'identità allora F inverte l'orientazione di $\tilde{M}$.*

Dimostrazione: Per ogni $p \in M$ indichiamo con $+_p$ e $-_p$ le due possibili orientazioni su T_pM; inoltre, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di T_pM indichiamo con $[e_1 \ldots e_n]$ l'orientazione indotta da questa base. Infine, indichiamo con $\tilde{M}$ l'unione disgiunta delle coppie $(p, +_p)$ e $(p, -_p)$, cioè

$$\tilde{M} = \bigcup_{p \in M} \{(p, +_p), (p, -_p)\},$$

e sia $\pi: \tilde{M} \to M$ data da $\pi(p, \pm_p) = p$. Vogliamo definire su $\tilde{M}$ una struttura di varietà soddisfacente le richieste.

Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di M tale che ogni U_α sia connesso, e tale che per ogni $p \in M$ esistano due carte locali $(U_\alpha, \partial_\alpha)$, $(U_{\alpha'}, \partial_{\alpha'}) \in \mathcal{A}$ in p tali che $[\partial_{1,\alpha}|_p \ldots \partial_{n,\alpha}|_p] = +_p$ e $[\partial_{1,\alpha'}|_p \ldots \partial_{n,\alpha'}|_p] = -_p$. Per ogni $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ definiamo $\psi_\alpha: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \tilde{M}$ ponendo

$$\psi_\alpha(x) = \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x), [\partial_{1,\alpha}|_{\varphi_\alpha^{-1}(x)} \ldots \partial_{n,\alpha}|_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}]\bigr),$$

dove $p = \varphi_\alpha^{-1}(x)$. Ogni ψ_α è chiaramente iniettiva; la sua inversa è data da $\tilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha \circ \pi$, definita su $\tilde{U}_\alpha = \psi_\alpha\bigl(\varphi_\alpha(U_\alpha)\bigr)$. Allora $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$ è un atlante su $\tilde{M}$. Infatti, copre $\tilde{M}$ per l'ipotesi su $\mathcal{A}$, e le carte sono compatibili in quanto

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1} = \varphi_\alpha \circ \pi \circ \psi_\beta = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

Siccome $\varphi_\alpha \circ \pi \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} = \mathrm{id}$, la proiezione π è differenziabile e chiaramente surgettiva. Inoltre se $-\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{M}$ è definito da $(p, \pm_p) \in -\tilde{U}_\alpha$ se e solo se $(p, \mp_p) \in \tilde{U}_\alpha$, allora $\pi^{-1}(U_\alpha) = \tilde{U}_\alpha \cup (-\tilde{U}_\alpha)$, e π ristretto sia a $\tilde{U}_\alpha$ che a $-\tilde{U}_\alpha$ è un diffeomorfismo con U_α; quindi π è un rivestimento a due fogli.

Ora, se $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta \neq \varnothing$ allora $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ e in ogni punto di $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha $[\partial_{1,\alpha} \ldots \partial_{n,\alpha}] = [\partial_{1,\beta} \ldots \partial_{n,\beta}]$, per cui

$$\det \mathrm{Jac}(\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}) = \det \mathrm{Jac}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0,$$

e quindi $\tilde{A}$ è orientato.

Se $\tilde{M}$ non fosse connessa, la restrizione di π a ciascuna componente connessa sarebbe un rivestimento a un foglio, cioè un diffeomorfismo, e M sarebbe orientabile, contraddizione.

Essendo π un rivestimento a due fogli, il gruppo di automorfismi di π è necessariamente $\mathbb{Z}_2$. L'automorfismo F è dato da $F(p, \pm_p) = (p, \mp_p)$, e si verifica subito che F inverte l'orientazione. Infatti, preso $p \in M$, sia (U, φ) una carta in p tale che $[\partial_1 \ldots \partial_n] = +_p$, e indichiamo con (U, φ^-) la carta ottenuta invertendo le ultime due coordinate di φ. Allora

$$\tilde{\varphi}^- \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x) = \tilde{\varphi}^- \circ F\bigl(\varphi^{-1}(x), +_{\varphi^{-1}(x)}\bigr) = \tilde{\varphi}^-\bigl(\varphi^{-1}(x), -_{\varphi^{-1}(x)}\bigr) = \varphi^- \circ \varphi^{-1}(x) = (x^1, \ldots, x^n, x^{n-1}),$$

e la tesi segue dall'Esercizio 3.6.2. □

Corollario 3.6.3: *Ogni varietà connessa semplicemente connessa è orientabile.*

Dimostrazione: Se non fosse orientabile, per la proposizione precedente dovrebbe avere un rivestimento a due fogli e quindi non potrebbe essere semplicemente connessa. □

Esercizio 3.6.8. Sia E un fibrato vettoriale di rango r su una varietà n-dimensionale M. Indichiamo con $O_E \subset E$ l'immagine della sezione nulla, e poniamo $E_* = E \setminus O_E$. Il *proiettivizzato* $\mathbb{P}(E)$ è l'insieme ottenuto quozientando E_* rispetto alla relazione d'equivalenza $v \sim w$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tale che $v = \lambda w$. Dimostra che $\mathbb{P}(E)$ ha una naturale struttura di varietà di dimensione $r + n - 1$ tale che la proiezione naturale $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to M$ è C^∞. Inoltre, dimostra che $\pi^{-1}(p)$ è diffeomorfo a $\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{R})$ per ogni $p \in M$. Infine dimostra che la varietà $\tilde{M}$ introdotta nella Proposizione 3.6.2 è diffeomorfa a $\mathbb{P}(\Lambda^n M)$.

Esercizio 3.6.9. Sia M una varietà connessa di dimensione 1. Dimostra che M è necessariamente diffeomorfa a $\mathbb{R}$ oppure a S^1 nel seguente modo:

(i) Dimostra la tesi quando M è orientabile costruendo un campo vettoriale su M mai nullo e applicando l'Esercizio 3.3.1.
(ii) Dimostra che M è sempre orientabile, facendo vedere che il suo rivestimento universale è diffeomorfo a $\mathbb{R}$ e che ogni diffeomorfismo di $\mathbb{R}$ che inverte l'orientazione ha necessariamente un punto fisso.

Il motivo per cui una n-forma mai nulla si chiama forma di volume è che permette di integrare delle funzioni a supporto compatto su una varietà. Questo perché, come discuteremo fra un attimo, su una varietà orientata di dimensione n è sempre possibile integrare n-forme a supporto compatto; e allora se ν è una forma di volume e g è una funzione a supporto compatto, possiamo definire l'integrale di g come l'integrale di $g\nu$.

Ma andiamo per gradi.

Lemma 3.6.4: *Sia M una varietà n-dimensionale orientata, e $\omega \in A^n(M)$ una n-forma a supporto compatto. Supponiamo di avere due carte orientate (U, φ) e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ tali che il supporto di ω sia contenuto in $U \cap \tilde{U}$. Allora*
$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega.$$

Dimostrazione: Ricordo che se $\eta = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ è una n-forma con supporto compatto in un aperto V di $\mathbb{R}^n$ abbiamo per definizione
$$\int_V \eta = \int_V f\, dx^1 \cdots dx^n,$$
dove a secondo membro abbiamo l'usuale integrale di Lebesgue.

Scriviamo allora $(\varphi^{-1})^*\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ e $(\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = \tilde{f}\, d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n$, per opportune funzioni $f \in C^\infty\bigl(\varphi(U)\bigr)$ e $\tilde{f} \in C^\infty\bigl(\tilde{\varphi}(U)\bigr)$. Siccome
$$(\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^*(\varphi^{-1})^*\omega,$$
troviamo
$$\tilde{f} = f \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \det \mathrm{Jac}(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}).$$
Siccome le carte sono orientate, abbiamo $\det \mathrm{Jac}(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) > 0$, per cui la formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli ci dà
$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega &= \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} \tilde{f}\, d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \\ &= \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} f \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \det \mathrm{Jac}(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})\, d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \\ &= \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} f \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \bigl|\det \mathrm{Jac}(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})\bigr|\, d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^n \\ &= \int_{\varphi(U\cap\tilde{U})} f\, dx^1 \cdots dx^n = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.\end{aligned}$$

□

Quindi se $\omega \in A^n(M)$ è una n-forma con supporto compatto contenuto nel dominio di una carta orientata (U,φ) qualsiasi, possiamo definire $\int_M \omega$ ponendo

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

La definizione dell'integrale per forme a supporto compatto qualunque si ottiene allora usando le partizioni dell'unità:

Lemma 3.6.5: *Sia M una varietà n-dimensionale orientata, e scegliamo un atlante orientato $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinata a questo atlante. Allora per ogni n-forma $\omega \in A^n(M)$ a supporto compatto il numero*

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega \tag{3.6.1}$$

non dipende né dall'atlante orientato scelto né dalla partizione dell'unità scelta.

Dimostrazione: Prima di tutto notiamo che siccome il supporto di ω è compatto, e i supporti delle funzioni della partizione dell'unità formano un ricoprimento localmente finito, la somma in (3.6.1) contiene solo un numero finito di termini non nulli, per cui è ben definita.

Sia $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\beta, \tilde{\varphi}_\beta)\}$ un altro atlante orientato di M, e $\{\tilde{\rho}_\beta\}$ una partizione dell'unità a lui subordinata. Per ogni α abbiamo

$$\int_M \rho_\alpha \omega = \int_M \left(\sum_\beta \tilde{\rho}_\beta \right) \rho_\alpha \omega = \sum_\beta \int_M \tilde{\rho}_\beta \rho_\alpha \omega,$$

e sommando su α otteniamo

$$\sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_M \tilde{\rho}_\beta \rho_\alpha \omega.$$

L'integrando di ciascun addendo a secondo membro ha supporto compatto contenuto nel dominio di una singola carta (U_α oppure $\tilde{U}_\beta$, per esempio), per cui il valore di ciascun addendo non dipende dalla carta usata per calcolarlo.

In maniera analoga otteniamo

$$\sum_\beta \int_M \tilde{\rho}_\beta \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_M \rho_\alpha \tilde{\rho}_\beta \omega,$$

e la tesi segue. □

Definizione 3.6.5: Sia M una varietà orientata n-dimensionale. L'*integrale* $\int_M \omega$ di una n-forma $\omega \in A^n(M)$ a supporto compatto su M è definito dalla formula (3.6.1). In particolare, se $\nu \in A^n(M)$ è una forma di volume per M e $f \in C^\infty(M)$ è a supporto compatto, poniamo

$$\int_M f = \int_M f\,\nu.$$

Se M è compatta, diremo *ν-volume* di M il numero $\mathrm{vol}_\nu(M) = \int_M \nu$.

Non posso concludere questo capitolo senza citare un caso particolare (ma particolarmente importante) del fondamentale *Teorema di Stokes:*

Teorema 3.6.6: (Stokes) *Sia M una varietà compatta orientata n-dimensionale, e $\eta \in A^{n-1}(M)$. Allora*

$$\int_M d\eta = 0.$$

In generale, si può definire il concetto di varietà con bordo in modo che il bordo ∂M di una varietà M con bordo n-dimensionale orientata sia una varietà (senza bordo) orientata $(n-1)$-dimensionale. Allora il Teorema di Stokes generale dice che

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$$

per ogni $(n-1)$-forma η a supporto compatto in M.