Capitolo 1

Algebra multilineare

1.1 Prodotto tensoriale

Se V e W sono due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, indicheremo con $\mathrm{Hom}(V,W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\mathbb{K}$-lineari da V in W. In particolare, lo *spazio duale* di V è lo spazio vettoriale $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K})$. Inoltre, useremo spesso il *delta di Kronecker,* che è il simbolo

$$\delta_{hk} = \delta^h_k = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k, \\ 0 & \text{se } h \neq k. \end{cases}$$

Ricordiamo alcune proprietà fondamentali degli spazi $\mathrm{Hom}(V,W)$ e V^*:

Proposizione 1.1.1: *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, e $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V. Allora:*

(i) *L'applicazione che a ogni $L \in \mathrm{Hom}(V,W)$ associa la n-upla $\big(L(v_1),\dots,L(v_n)\big) \in W^n$ è un isomorfismo fra $\mathrm{Hom}(V,W)$ e W^n. In particolare, $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = (\dim V)(\dim W)$, e $\dim V^* = \dim V$.*

(ii) *Se indichiamo con $v^h \in V^*$ l'elemento definito da $v^h(v_k) = \delta^h_k$, allora $\mathcal{B}^* = \{v^1,\dots,v^n\}$ è una base di V^*, detta base duale di V^*.*

(iii) *L'applicazione $\Phi\colon V \to (V^*)^*$ data da $\Phi(v)(\varphi) = \varphi(v)$ è un isomorfismo canonico fra V e il biduale $(V^*)^*$.*

(iv) *Se $(\cdot\,,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{K}$ è un prodotto scalare non degenere, allora l'applicazione $\Psi\colon V \to V^*$ data da $\Psi(v) = (\cdot, v)$ è un isomorfismo.*

Esercizio 1.1.1. Dimostra la Proposizione 1.1.1.

In particolare, ogni elemento di $\mathrm{Hom}(V,W)$ è univocamente determinato dai valori che assume su una base. Data una n-pla $(w_1,\dots,w_n) \in W^n$, l'elemento L di $\mathrm{Hom}(V,W)$ che soddisfa la condizione $L(v_j) = w_j$ per $j = 1,\dots,n$ è definito da

$$L(\lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^n v_n) = \lambda^1 w_1 + \cdots + \lambda^n w_n$$

per ogni $\lambda^1,\dots,\lambda^n \in \mathbb{K}$.

Vogliamo introdurre costruzioni analoghe e ottenere risultati simili per applicazioni multilineari.

Definizione 1.1.1: Siano $V_1,\dots,V_n$, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione $\Phi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ si dice *multilineare* (o *n-lineare*) se è lineare separatamente in ciascuna variabile. L'insieme $M(V_1,\dots,V_n;W)$ delle applicazioni multilineari da $V_1 \times \cdots \times V_n$ in W è chiaramente uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Per capire meglio il contenuto della prossima proposizione, premettiamo un'osservazione.

Osservazione 1.1.1. Supponiamo dati n numeri interi $d_1,\dots,d_n \in \mathbb{N}^*$ e uno spazio vettoriale W di dimensione d. Allora lo spazio vettoriale $W^{d_1\cdots d_n}$ può essere descritto come lo spazio delle "matrici" a n indici, i cui elementi sono vettori di W, e in cui il j-esimo indice varia fra 1 e d_j (per $j = 1,\dots,n$). In altre parole, ogni vettore $\mathbf{w} \in W^{d_1\cdots d_n}$ può essere scritto come

$$\mathbf{w} = (w^{\mu_1\cdots\mu_n})_{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\{1,\dots,d_1\}\times\cdots\times\{1,\dots,d_n\}}$$

con $w^{\mu_1\cdots\mu_n} \in W$ per ogni n-upla $(\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \{1,\ldots,d_1\} \times \cdots \times \{1,\ldots,d_n\}$. In particolare, data una base $\{w_1,\ldots,w_d\}$ di W otteniamo una base di $W^{d_1\cdots d_n}$ considerando i vettori $\mathbf{w}_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu}$ al variare di $\nu_1 \in \{1,\ldots d_1\},\ldots,\nu_n \in \{1,\ldots,d_n\}, \nu \in \{1,\ldots,d\}$, dove l'elemento di posto $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ di $\mathbf{w}_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu}$ è dato da

$$(\mathbf{w}_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu})^{\mu_1\cdots\mu_n} = \delta^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots\delta^{\mu_n}_{\nu_n} w_\nu. \tag{1.1.1}$$

In particolare, il vettore $\mathbf{e}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ della base canonica di $\mathbb{K}^{d_1\cdots d_n}$, che ha un 1 al posto $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ e 0 altrove, ha come $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$-esimo elemento il numero

$$(\mathbf{e}_{\nu_1\ldots\nu_n})^{\mu_1\cdots\mu_n} = \delta^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots\delta^{\mu_n}_{\nu_n}.$$

Proposizione 1.1.2: *Siano $V_1,\ldots,V_n$ e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, di dimensione rispettivamente $d_1,\ldots,d_n,d$. Per $j = 1,\ldots,n$ scegliamo una base $\mathcal{B}_j = \{v_{j,1},\ldots,v_{j,d_j}\}$ di V_j, e sia $\{w_1,\ldots,w_d\}$ una base di W. Allora l'applicazione $A\colon M(V_1,\ldots,V_n;W) \to W^{d_1\cdots d_n}$ data da*

$$A(\Phi) = \big(\Phi(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n})\big)_{(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\{1,\ldots,d_1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,d_n\}}$$

è un isomorfismo. In particolare,

$$\dim M(V_1,\ldots,V_n;W) = (\dim V_1)\cdots(\dim V_n)\cdot(\dim W),$$

e una base di $M(V_1,\ldots,V_n;W)$ è $\{\Phi^{\nu_1,\ldots,\nu_n}_\nu\}_{(\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu)\in\{1,\ldots,d_1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,d_n\}\times\{1,\ldots,d\}}$, dove $\Phi^{\nu_1,\ldots,\nu_n}_\nu$ è definita da

$$\Phi^{\nu_1,\ldots,\nu_n}_\nu(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n}) = \delta^{\nu_1}_{\mu_1}\cdots\delta^{\nu_n}_{\mu_n} w_\nu.$$

Dimostrazione: L'applicazione A è chiaramente lineare. Ora, per ogni applicazione $\Phi \in M(V_1,\ldots,V_n;W)$ e ogni $v_j = \sum_{\mu=1}^{d_j} a^\mu_j v_{j,\mu} \in V_j$, si ha

$$\Phi(v_1,\ldots,v_n) = \sum_{\mu_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\mu_n=1}^{d_n} a^{\mu_1}_1\cdots a^{\mu_n}_n \Phi(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n});$$

in particolare, $A(\Phi) = O$ implica $\Phi = O$, e quindi A è iniettiva. Viceversa, se scegliamo arbitrariamente $w_{\mu_1\ldots\mu_n} \in W$ possiamo definire una $\Phi \in M(V_1,\ldots,V_n;W)$ tale che $\Phi(v_{1,\mu_1},\ldots,v_{n,\mu_n}) = w_{\mu_1\ldots\mu_n}$ ponendo

$$\Phi(v_1,\ldots,v_n) = \sum_{\mu_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{\mu_n=1}^{d_n} a^{\mu_1}_1\cdots a^{\mu_n}_n w_{\mu_1\ldots\mu_n}, \tag{1.1.2}$$

per cui A è surgettiva. Infine, una base di $M(V_1,\ldots,V_n;W)$ si ottiene applicando A^{-1} a una base di $W^{d_1\cdots d_n}$; l'ultima affermazione segue quindi da (1.1.1). □

In altre parole, anche le applicazioni multilineari sono completamente determinate dai valori che assumono su n-uple di elementi delle basi. Quando in seguito costruiremo un'applicazione multilineare prescrivendo il suo valore sulle basi e poi invocando questo risultato, diremo che stiamo *estendendo per multilinearità.*

Esercizio 1.1.2. Siano $V_1,\ldots,V_n$ W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Dimostra che gli spazi $M(V_1,\ldots,V_n;W)$, $\mathrm{Hom}\big(V_1, M(V_2,\ldots,V_n;W)\big)$ e $M\big(V_1,\ldots,V_{n-1};\mathrm{Hom}(V_n,W)\big)$ sono canonicamente isomorfi. [*Suggerimento:* se $\Phi \in M(V_1,\ldots,V_n;W)$, considera $\hat\Phi \in \mathrm{Hom}\big(V_1, M(V_2,\ldots,V_n;W)\big)$ e $\tilde\Phi \in M\big(V_1,\ldots,V_{n-1};\mathrm{Hom}(V_n,W)\big)$ definite da

$$\hat\Phi(v_1)(v_2,\ldots,v_n) = \tilde\Phi(v_1,\ldots,v_{n-1})(v_n) = \Phi(v_1,\ldots,v_n) \in W$$

per ogni $v_1 \in V_1,\ldots,v_n \in V_n$.]

Vogliamo descrivere ora una procedura che ci permette di trasformare un'applicazione multilineare in una lineare cambiando opportunamente il dominio.

Teorema 1.1.3: *Dati $V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$, poniamo $T = M(V_1^*, \ldots, V_n^*; \mathbb{K})$. Sia inoltre $F \in M(V_1, \ldots, V_n; T)$ data da*

$$F(v_1, \ldots, v_n)(\varphi^1, \ldots, \varphi^n) = \varphi^1(v_1) \cdots \varphi^n(v_n),$$

per ogni $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n, \varphi^1 \in V_1^*, \ldots, \varphi^n \in V_n^*$. Allora:

(i) *Per ogni spazio vettoriale W su $\mathbb{K}$ e ogni applicazione multilineare $\Phi: V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{\Phi}: T \to W$ tale che $\Phi = \tilde{\Phi} \circ F$ (proprietà universale del prodotto tensoriale).*

(ii) *Se (T', F') è un'altra coppia soddisfacente (i) allora esiste un unico isomorfismo $\Psi: T \to T'$ tale che $F' = \Psi \circ F$ (unicità del prodotto tensoriale).*

Dimostrazione: (i) Per $j = 1, \ldots, n$ scegliamo una base $\mathcal{B}_j = \{v_{j,1}, \ldots, v_{j,d_j}\}$ di V_j, dove $d_j = \dim V_j$, e sia $\mathcal{B}_j^* = \{v_j^1, \ldots, v_j^{d_j}\}$ la corrispondente base duale. Poniamo $\varphi_{\mu_1 \ldots \mu_n} = F(v_{1,\mu_1}, \ldots, v_{n,\mu_n}) \in T$; siccome

$$\varphi_{\mu_1 \ldots \mu_n}(v_1^{\nu_1}, \ldots, v_n^{\nu_n}) = \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \cdots \delta_{\mu_n}^{\nu_n},$$

la Proposizione 1.1.2 e l'Osservazione 1.1.1 ci dicono che $\{\varphi_{\mu_1 \ldots \mu_n}\}$ è una base di T. Ora, se $\tilde{\Phi}$ esiste si deve avere

$$\tilde{\Phi}(\varphi_{\mu_1 \ldots \mu_n}) = \tilde{\Phi}\big(F(v_{1,\mu_1}, \ldots, v_{n,\mu_n})\big) = \Phi(v_{1,\mu_1}, \ldots, v_{n,\mu_n});$$

quindi la Proposizione 1.1.1.(i) ci assicura che esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{\Phi}$ con le proprietà richieste.

(ii) Se applichiamo (i) alla $F': V_1 \times \cdots \times V_n \to T'$ otteniamo una $\Psi: T \to T'$ tale che $\Psi \circ F = F'$. Rovesciando i ruoli di T e T' otteniamo una $\Psi': T' \to T$ tale che $\Psi' \circ F' = F$. Quindi $(\Psi' \circ \Psi) \circ F = F$; ma anche $\mathrm{id}_T \circ F = F$, e l'unicità in (i) implica $\Psi' \circ \Psi = \mathrm{id}_T$. Analogamente si dimostra che $\Psi \circ \Psi' = \mathrm{id}_{T'}$, e ci siamo. □

Definizione 1.1.2: Diremo che due coppie (T_1, F_1) e (T_2, F_2), con T_j spazi vettoriali e $F_j: V_1 \times \cdots \times V_n \to T_j$ applicazioni n-lineari, sono *isomorfe* se esiste un isomorfismo $\Psi: T_1 \to T_2$ tale che $F_2 = \Psi \circ F_1$.

Definizione 1.1.3: Una coppia (T, F) soddisfacente le proprietà del Teorema 1.1.3.(i) verrà detta *prodotto tensoriale* di $V_1, \ldots, V_n$, e indicata con $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$; il Teorema 1.1.3.(ii) ci assicura che il prodotto tensoriale è ben definito a meno di isomorfismi. Gli elementi della forma $F(v_1, \ldots, v_n)$, detti *indecomponibili*, verranno indicati con la scrittura $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$.

Osservazione 1.1.2. La dimostrazione del Teorema 1.1.3.(ii) mostra chiaramente come l'unicità del prodotto tensoriale sia conseguenza della proprietà universale.

Osservazione 1.1.3. Il Teorema 1.1.3 e la Proposizione 1.1.2 chiaramente implicano che

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = (\dim V_1) \cdots (\dim V_n).$$

Esercizio 1.1.3. Dimostra che $V \otimes \mathbb{K}$ e $\mathbb{K} \otimes V$ sono canonicamente isomorfi a V per ogni spazio vettoriale V di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$.

Ci possono essere altre realizzazioni concrete del prodotto tensoriale di spazi vettoriali (vedi per esempio l'Esercizio 1.1.5); ma noi lo penseremo sempre come spazio di applicazioni multilineari. In particolare, presi $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ allora $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ agisce su $V_1^* \times \cdots \times V_n^*$ con la seguente regola:

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n(\varphi^1, \ldots, \varphi^n) = \varphi^1(v_1) \cdots \varphi^n(v_n)$$

per ogni $\varphi^1 \in V_1^*, \ldots, \varphi^n \in V_n^*$.

Osservazione 1.1.4. Se $\mathcal{B}_j = \{v_{j,1}, \ldots, v_{j,d_j}\}$ è una base di V_j, per $j = 1, \ldots, n$, allora una base di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ è composta dagli elementi indecomponibili della forma $v_{1,\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{n,\mu_n}$. In particolare, gli elementi indecomponibili formano un sistema di generatori di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, ma attenzione: non tutti gli elementi di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ sono indecomponibili. Per esempio, tutti gli elementi indecomponibili di $V \otimes V$ sono applicazioni bilineari degeneri (dato $v_1 \otimes v_2 \in V \otimes V$, se prendiamo $\varphi^1 \in V^*$ non nullo tale che $\varphi^1(v_1) = O$, allora $v_1 \otimes v_2(\varphi^1, \cdot) \equiv O$, per cui $v_1 \otimes v_2$ è degenere), e quindi nessuna applicazione bilineare non degenere di $V^* \times V^*$ in $\mathbb{K}$ può essere rappresentata da un singolo elemento indecomponibile.

Osservazione 1.1.5. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$, la multilinearità di F implica che

$$\lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (\lambda v_1) \otimes \cdots \otimes v_n = \cdots = v_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda v_n).$$

Analogamente, se $v_j', v_j'' \in V_j$ si ha

$$v_1 \otimes \cdots \otimes (v_j' + v_j'') \otimes \cdots \otimes v_n = v_1 \otimes \cdots \otimes v_j' \otimes \cdots \otimes v_n + v_1 \otimes \cdots \otimes v_j'' \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Queste regole determinano completamente la manipolazione algebrica degli elementi del prodotto tensoriale, come vedremo nell'Esercizio 1.1.5.

Esercizio 1.1.4. Dato un insieme S, indichiamo con $\mathbb{K}\langle S\rangle$ l'insieme

$$\mathbb{K}\langle S\rangle = \{f\colon S \to \mathbb{K} \mid f(s) \neq 0 \text{ solo per un numero finito di elementi } s \in S\}.$$

(i) Dimostra che $\mathbb{K}\langle S\rangle$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, detto *spazio vettoriale libero generato* da S.
(ii) Identificando ogni $s \in S$ con la funzione in $\mathbb{K}\langle S\rangle$ che vale 1 in s e 0 altrove, dimostra che S è una base di $\mathbb{K}\langle S\rangle$, e quindi che ogni elemento $v \in \mathbb{K}\langle S\rangle$ si scrive in modo unico come combinazione lineare formale finita di elementi di S a coefficienti in $\mathbb{K}$, cioè nella forma

$$v = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j s_j$$

per opportuni $k \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^k \in \mathbb{K}$ e $s_1, \ldots, s_k \in S$.
(iii) Dimostra che per ogni funzione $\alpha\colon S \to V$ a valori in uno spazio vettoriale V qualsiasi esiste un'unica applicazione lineare $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}\langle S\rangle, V)$ tale che $A|_S = \alpha$ (*proprietà universale dello spazio vettoriale libero*).
(iv) Dimostra che se (W, ι) è una coppia composta da uno spazio vettoriale W e un'applicazione iniettiva $\iota\colon S \to W$ tale che per ogni funzione $\alpha\colon S \to V$ a valori in uno spazio vettoriale V qualsiasi esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{A} \in \mathrm{Hom}(W, V)$ tale che $\tilde{A} \circ \iota = \alpha$ allora esiste un isomorfismo $T\colon \mathbb{K}\langle S\rangle \to W$ tale che $T|_S = \iota$.

Esercizio 1.1.5. Siano $V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, e indichiamo con $\mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_n\rangle$ lo spazio vettoriale libero generato da $V_1 \times \cdots \times V_n$ (vedi l'esercizio precedente). Sia $\mathcal{R}$ il sottospazio di $\mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_n\rangle$ generato dagli elementi della forma

$$\lambda(v_1, \ldots, v_n) - (v_1, \ldots, \lambda v_j, \ldots, v_n),$$
$$(v_1, \ldots, v_j', \ldots, v_n) + (v_1, \ldots, v_j'', \ldots, v_n) - (v_1, \ldots, v_j' + v_j'', \ldots, v_n),$$

e sia $T = \mathbb{R}\langle V_1 \times \cdots \times V_n\rangle/\mathcal{R}$ lo spazio quoziente. Infine, sia $\pi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to T$ l'applicazione che associa a ciascun elemento di $V_1 \times \cdots \times V_n$ la sua classe d'equivalenza in T. Dimostra che (T, π) soddisfa la proprietà universale del prodotto tensoriale, e deduci quindi che se $V_1, \ldots, V_n$ hanno dimensione finita allora (T, π) è isomorfo al prodotto tensoriale $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, F)$.

La seguente proposizione contiene degli utili isomorfismi canonici fra prodotti tensoriali (e spazi di applicazioni lineari):

Proposizione 1.1.4: *Siano V, W, $V_1, \ldots, V_n$, V_j' spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Allora*

(i) *Sia σ una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$, e $\tilde{F}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}$ data da*

$$\tilde{F}(v_1, \ldots, v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Allora $(V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}, \tilde{F})$ è isomorfo a $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, F)$.
(ii) *Scelto $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, sia $\tilde{F}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_j) \otimes (V_{j+1} \otimes \cdots \otimes V_n)$ data da*

$$\tilde{F}(v_1, \ldots, v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes (v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Allora $\big((V_1\otimes\cdots\otimes V_j)\otimes(V_{j+1}\otimes\cdots\otimes V_n),\tilde F\big)$ *è isomorfo a* $(V_1\otimes\cdots\otimes V_n,F)$.

(iii) *Sia* $\tilde F\colon V_1\times\cdots\times(V_j\oplus V_j')\times\cdots\times V_n\to(V_1\otimes\cdots\otimes V_j\otimes\cdots\otimes V_n)\oplus(V_1\otimes\cdots\otimes V_j'\otimes\cdots\otimes V_n)$ *data da*

$$\tilde F(v_1,\dots,(v_j,v_j'),\dots,v_n)=(v_1\otimes\cdots\otimes v_j\otimes\cdots\otimes v_n,v_1\otimes\cdots\otimes v_j'\otimes\cdots\otimes v_n).$$

Allora $\big((V_1\otimes\cdots\otimes V_j\otimes\cdots\otimes V_n)\oplus(V_1\otimes\cdots\otimes V_j'\otimes\cdots\otimes V_n),\tilde F\big)$ *è isomorfo a* $\big(V_1\otimes\cdots\otimes(V_j\oplus V_j')\otimes\cdots\otimes V_n,F\big)$.

(iv) *Sia* $\tilde F\colon V^*\times W^*\to(V\otimes W)^*$ *data da*

$$\tilde F(\varphi,\psi)(v\otimes w)=\varphi(v)\psi(w).$$

Allora $\big((V\otimes W)^*,\tilde F\big)$ *è isomorfo a* $(V^*\otimes W^*,F)$.

(v) *Sia* $\tilde F\colon V^*\times W\to\mathrm{Hom}(V,W)$ *data da*

$$\tilde F(\varphi,w)(v)=\varphi(v)w.$$

Allora $\big(\mathrm{Hom}(V,W),\tilde F\big)$ *è isomorfo a* $(V^*\otimes W,F)$.

(vi) *L'applicazione* $A\colon M(V_1,V_2;W)\to\mathrm{Hom}(V_1\otimes V_2,W)$ *data da*

$$A(\Phi)(v_1\otimes v_2)=\Phi(v_1,v_2)$$

ed estesa per linearità, è un isomorfismo fra $M(V_1,V_2;W)$ *e* $\mathrm{Hom}(V_1\otimes V_2,W)$.

Dimostrazione: (i) Essendo $\tilde F$ un'applicazione n-lineare, la proprietà universale del prodotto tensoriale ci fornisce una $A\colon V_1\otimes\cdots\otimes V_n\to V_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{\sigma(n)}$ lineare e tale che $\tilde F=A\circ F$. Ora, l'immagine di A è un sottospazio vettoriale di $V_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{\sigma(n)}$ che include $\tilde F(V_1\times\cdots\times V_n)$; siccome quest'ultimo insieme, contenendo tutti i vettori indecomponibili, genera $V_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{\sigma(n)}$, l'applicazione A è necessariamente surgettiva. Ma $V_1\otimes\cdots\otimes V_n$ e $V_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{\sigma(n)}$ hanno la stessa dimensione, e quindi A è l'isomorfismo cercato.

(ii), (iii) e (iv) si dimostrano in modo assolutamente analogo (esercizio).

Anche la (v) si può dimostrare nello stesso modo, ma possiamo anche scrivere in maniera esplicita l'isomorfismo $A\colon V^*\otimes W\to\mathrm{Hom}(V,W)$. Infatti, si verifica subito (esercizio) che estendendo per linearità la

$$A(\varphi\otimes w)(v)=\varphi(v)w$$

otteniamo un isomorfismo che soddisfa $\tilde F=A\circ F$. Nota che, a meno di identificare gli spazi vettoriali con i loro biduali, questo è esattamente l'isomorfismo dell'Esercizio 1.1.2 applicato a $V^*\otimes W=M(V,W^*;\mathbb{K})$.

(vi) L'applicazione A è lineare e iniettiva fra spazi vettoriali della stessa dimensione, per cui è un isomorfismo, che realizza esplicitamente la proprietà universale del prodotto tensoriale. □

Osservazione 1.1.6. In particolare, combinando gli ultimi tre isomorfismi vediamo che $M(V_1,V_2;W)$ è canonicamente isomorfo a $V_1^*\otimes V_2^*\otimes W$. Più in generale, con la stessa tecnica si verifica che $M(V_1,\dots,V_n;W)$ è canonicamente isomorfo a $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_n^*\otimes W$, che a sua volta è canonicamente isomorfo a $M(V_1,\dots,V_n;\mathbb{K})\otimes W$.

Esempio 1.1.1. Uno dei misteri dell'algebra lineare elementare è come mai due nozioni piuttosto diverse, quali le applicazioni lineari fra due spazi vettoriali e le forme bilineari a valori nel campo base, vengono rappresentate dallo stesso tipo di oggetti (le matrici). La soluzione del mistero è la Proposizione 1.1.4.(v). Infatti, dati due spazi vettoriali V e W di dimensione n ed m rispettivamente, la scelta di due basi fornisce un isomorfismo fra lo spazio delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$ e lo spazio delle applicazioni lineari $\mathrm{Hom}(V,W)$. Grazie alla Proposizione 1.1.4, quest'ultimo è canonicamente isomorfo a $V^*\otimes W$, cioè allo spazio delle applicazioni bilineari $M(V,W^*;\mathbb{K})$. Ma la scelta delle basi fornisce anche un isomorfismo di W^* con W, e quindi di $M(V,W^*;\mathbb{K})$ con $M_{m,n}(\mathbb{K})$, per cui siamo passati dalle matrici come applicazioni lineari alle matrici come forme bilineari.

Vi è un'altra interpretazione del prodotto tensoriale in termini matriciali. Dati $u\in\mathbb{K}^m$ e $v\in\mathbb{K}^n$, l'elemento indecomponibile $u\otimes v$ è un'applicazione bilineare di $(\mathbb{K}^m)^*\times(\mathbb{K}^n)^*$ in $\mathbb{K}$, che è rappresentata da una matrice $m\times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. È facile vedere (esercizio) che questa matrice è esattamente $u\cdot v^T$.

Definizione 1.1.4: Dati $u \in \mathbb{K}^m$ e $v \in \mathbb{K}^n$, diremo *prodotto di Kronecker* di u e v la matrice $u \otimes v \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ data da $u \otimes v = u \cdot v^T$, il cui elemento di posto (i,j) è $u^i v^j$. Più in generale, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{h,k}(\mathbb{K})$ sono due matrici, diremo *prodotto di Kronecker* di A e B la matrice

$$A \otimes B = \begin{vmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{1n}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B^T & \cdots & a_{mn}B^T \end{vmatrix} \in M_{mk,nh}(\mathbb{K}).$$

Esercizio 1.1.6. (i) Dimostra che ogni matrice in $M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango 1 è della forma $u \otimes v$ per opportuni $u \in \mathbb{K}^m$ e $v \in \mathbb{K}^n$.

(ii) Dimostra che ogni matrice in $M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango $d \geq 1$ è somma di d matrici di rango 1.

(iii) Interpreta il prodotto di Kronecker di matrici in termini di prodotti tensoriali.

ESEMPIO 1.1.2. Se V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, si vede subito che $V \otimes \mathbb{K}$ è isomorfo a V (esercizio). Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ possiamo invece considerare $V \otimes \mathbb{C}$. Come spazio vettoriale reale, $V \otimes \mathbb{C}$ ha dimensione doppia rispetto a V; ma la cosa interessante è che $V \otimes \mathbb{C}$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, con dimensione (complessa) uguale alla dimensione (reale) di V. Infatti, ogni elemento di $V \otimes \mathbb{C}$ è somma di un numero finito di elementi della forma $v_j \otimes \lambda_j$, con $v_j \in V$ e $\lambda_j \in \mathbb{C}$; quindi possiamo definire il prodotto di un numero complesso λ per un elemento di $V \otimes \mathbb{C}$ ponendo

$$\lambda \cdot \sum_{j=1}^{r} v_j \otimes \lambda_j = \sum_{j=1}^{r} v_j \otimes (\lambda \lambda_j),$$

ed è facile verificare che in questo modo si ottiene uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. In particolare, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, una base su $\mathbb{R}$ di $V \otimes \mathbb{C}$ è data da $\{v_1 \otimes 1, v_1 \otimes i, \ldots, v_n \otimes 1, v_n \otimes i\}$, mentre una base su $\mathbb{C}$ è semplicemente data da $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1\}$.

Definizione 1.1.5: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Lo spazio vettoriale complesso $V \otimes \mathbb{C}$ viene detto *complessificazione* di V, e indicato con $V^{\mathbb{C}}$.

1.2 L'algebra tensoriale

In geometria differenziale sono particolarmente utili alcuni spazi ottenuti tramite prodotti tensoriali.

Definizione 1.2.1: Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora possiamo costruire i seguenti spazi vettoriali:

$$T_0^0(V) = T_0(V) = T^0(V) = \mathbb{K}, \qquad T^1(V) = T_0^1(V) = V, \qquad T_1(V) = T_1^0(V) = V^*,$$
$$T^p(V) = T_0^p(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ volte}}, \qquad T_q(V) = T_q^0(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q \text{ volte}}, \qquad T_q^p(V) = T^p(V) \otimes T_q(V),$$
$$T^\bullet(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(V), \qquad T(V) = \bigoplus_{p,q \geq 0} T_q^p(V), \qquad T_\bullet(V) = \bigoplus_{q \geq 0} T_q(V).$$

Chiaramente, $\dim T_q^p(V) = (\dim V)^{p+q}$, mentre $T(V)$ ha dimensione infinita. Un elemento di $T_q^p(V)$ è detto *tensore p-controvariante e q-covariante,* o *tensore di tipo* $\binom{p}{q}$, mentre, per motivi che vedremo fra un attimo, lo spazio $T(V)$ è detto *algebra tensoriale* di V.

Osservazione 1.2.1. Ricordo che $T_q^p(V)$ è lo spazio delle applicazioni multilineari da $(V^*)^p \times V^q$ a $\mathbb{K}$, e in particolare l'azione degli elementi indecomponibili è data da

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^q(\eta^1, \ldots, \eta^p, v_1, \ldots, v_q) = \eta^1(u_1) \cdots \eta^p(u_p) \cdot \omega^1(v_1) \cdots \omega^q(v_q),$$

dove $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q \in V$ e $\omega^1, \ldots, \omega^q, \eta^1, \ldots, \eta^p \in V^*$. Inoltre, l'Esercizio 1.1.2 implica che $T_q^p(V)$ è isomorfo allo spazio delle applicazioni multilineari da $(V^*)^p \times V^{q-1}$ a V^*, e a quello delle applicazioni multilineari da $(V^*)^{p-1} \times V^q$ a V. In particolare, $T_1^1(V)$ è isomorfo a $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Ora vogliamo definire su $T(V)$ un prodotto. Se $\alpha \in T^{p_1}_{q_1}(V)$ e $\beta \in T^{p_2}_{q_2}(V)$ definiamo $\alpha \otimes \beta \in T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}(V)$ ponendo

$$\alpha \otimes \beta(\eta^1, \ldots, \eta^{p_1+p_2}, v_1, \ldots, v_{q_1+q_2}) = \alpha(\eta^1, \ldots, \eta^{p_1}, v_1, \ldots, v_{q_1})\beta(\eta^{p_1+1}, \ldots, \eta^{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \ldots, v_{q_1+q_2}).$$

Siccome ogni elemento di $T(V)$ è somma di un numero finito di elementi di questo tipo, per distributività possiamo allora definire un prodotto $\otimes: T(V) \times T(V) \to T(V)$, e $\bigl(T(V), +, \otimes\bigr)$ risulta (esercizio) essere un anello con unità $1 \in T^0_0(V)$. Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e v, $w \in T(V)$ abbiamo

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w),$$

e quindi $\bigl(T(V), +, \otimes, \cdot\bigr)$ è un'algebra, giustificandone il nome.

Osservazione 1.2.2. Attenzione: il prodotto in $T(V)$ *non* è commutativo. Per esempio, sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{e_1, e_2\}$ e base duale $\{e^1, e^2\}$. Allora $e_1 \otimes e_2$ ed $e_2 \otimes e_1$ appartengono a $T^2_0(\mathbb{R}^2)$, e quindi sono applicazioni bilineari su $(\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^*$. Ma

$$e_1 \otimes e_2(e^1, e^2) = e^1(e_1)e^2(e_2) = 1 \neq 0 = e^1(e_2)e^2(e_1) = e_2 \otimes e_1(e^1, e^2),$$

per cui $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$.

Osservazione 1.2.3. Spazi vettoriali isomorfi hanno algebre tensoriali isomorfe. Infatti, sia $L: V \to W$ un isomorfismo fra spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$, e indichiamo con $L^*: W^* \to V^*$ l'isomorfismo duale. Allora $(L^*)^{-1}: V^* \to W^*$ è ancora un isomorfismo, e possiamo definire $T(L): T(V) \to T(W)$ ponendo

$$T(L)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^q) = L(v_1) \otimes \cdots \otimes L(v_p) \otimes (L^*)^{-1}(\omega^1) \otimes \cdots \otimes (L^*)^{-1}(\omega^q)$$

ed estendendo per linearità. Si vede subito che $T(L)$ è un isomorfismo di algebre che conserva il tipo.

Esercizio 1.2.1. Dimostra che per ogni applicazione lineare $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ esistono un unico omomorfismo di algebre $T^\bullet(L): T^\bullet(V) \to T^\bullet(W)$ e un unico omomorfismo di algebre $T_\bullet(L): T_\bullet(W) \to T_\bullet(V)$ che conservano il tipo e tali che $T^\bullet(L)|_V = L$ e $T_\bullet(L)|_{W^*} = L^*$.

Capita spesso che strutture definite sullo spazio vettoriale V possano essere estese all'intera algebra tensoriale. Un esempio tipico è quello del prodotto scalare:

Proposizione 1.2.1: *Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare definito positivo su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Allora esiste un unico prodotto scalare definito positivo $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle: T(V) \times T(V) \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) *$T^p_q(V)$ è ortogonale a $T^h_k(V)$ se $p \neq h$ o $q \neq k$;*
(ii) *$\langle\!\langle\lambda, \mu\rangle\!\rangle = \lambda\mu$ per ogni λ, $\mu \in \mathbb{R} = T^0(V)$;*
(iii) *$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle = \langle v, w\rangle$ per ogni v, $w \in T^1(V) = V$;*
(iv) *$\langle\!\langle v^*, w^*\rangle\!\rangle = \langle v, w\rangle$ per ogni v, $w \in T^1(V)$, dove v^*, $w^* \in T_1(V)$ sono dati da $v^* = \langle\cdot, v\rangle$ e $w^* = \langle\cdot, w\rangle$;*
(v) *$\langle\!\langle\alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\alpha_1, \beta_1\rangle\!\rangle \cdot \langle\!\langle\alpha_2, \beta_2\rangle\!\rangle$ per ogni α_1, $\beta_1 \in T^{p_1}_{q_1}(V)$ e α_1, $\beta_2 \in T^{p_2}_{q_2}(V)$.*

Dimostrazione: Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V ortonormale rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$; in particolare, $\{v_1^*, \ldots, v_2^*\}$ è la base duale di V^*. Una base di $T^p_q(V)$ è allora composta da tutti i possibili tensori della forma

$$v_I = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v^*_{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes v^*_{i_{p+q}} \tag{1.2.1}$$

al variare di $I = (i_1, \ldots, i_{p+q}) \in \{1, \ldots, n\}^{p+q}$.

Ora, supponiamo che un prodotto scalare $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ che soddisfi (i)–(v) esista. Allora si vede subito che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ sono ortonormali rispetto a $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$, e quindi

$$\begin{aligned}\left\langle\!\!\left\langle \sum_I \lambda_I v_I, \sum_J \mu_J v_J \right\rangle\!\!\right\rangle &= \sum_I \sum_J \lambda_I \mu_J \langle\!\langle v_I, v_J\rangle\!\rangle = \sum_I \sum_J \lambda_I \mu_J \langle\!\langle v_{i_1}, v_{j_1}\rangle\!\rangle \cdots \langle\!\langle v^*_{i_{p+q}}, v^*_{j_{p+q}}\rangle\!\rangle \\ &= \sum_I \lambda_I \mu_I,\end{aligned}$$

per cui $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot \rangle\!\rangle$ se esiste è unico.

Per l'esistenza, indichiamo con $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot \rangle\!\rangle$ l'unico prodotto scalare definito positivo su $T(V)$ rispetto a cui gli elementi della forma (1.2.1) formano una base ortonormale. Chiaramente, (i)–(iv) sono soddisfatte; dobbiamo verificare (v). Ma infatti abbiamo

$$\begin{aligned}\left\langle\!\!\left\langle \left(\sum_{I_1}\lambda^1_{I_1}v_{I_1}\right)\otimes\left(\sum_{I_2}\lambda^2_{I_2}v_{I_2}\right), \left(\sum_{J_1}\mu^1_{J_1}v_{J_1}\right)\otimes\left(\sum_{J_2}\mu^2_{J_2}v_{J_2}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle \hspace{-12em}&\\ &= \sum_{I_1,I_2,J_1,J_2}\lambda^1_{I_1}\lambda^2_{I_2}\mu^1_{J_1}\mu^2_{J_2}\langle\!\langle v_{I_1}\otimes v_{I_2}, v_{J_1}\otimes v_{J_2}\rangle\!\rangle\\ &= \sum_{I_1,I_2}\lambda^1_{I_1}\lambda^2_{I_2}\mu^1_{I_1}\mu^2_{I_2}\\ &= \left\langle\!\!\left\langle \sum_{I_1}\lambda^1_{I_1}v_{I_1}, \sum_{J_1}\mu^1_{J_1}v_{J_1}\right\rangle\!\!\right\rangle\cdot\left\langle\!\!\left\langle \sum_{I_2}\lambda^2_{I_2}v_{I_2}, \sum_{J_2}\mu^2_{J_2}v_{J_2}\right\rangle\!\!\right\rangle,\end{aligned}$$

e ci siamo. □

Concludiamo questo paragrafo introducendo una famiglia di applicazioni lineari tipiche dell'algebra tensoriale:

Definizione 1.2.2: La *contrazione* su $T^p_q(V)$ di tipo $\binom{i}{j}$ con $1\le i\le p$ e $1\le j\le q$ è l'applicazione lineare $\mathcal{C}^i_j\colon T^p_q(V)\to T^{p-1}_{q-1}(V)$ definita sugli elementi indecomponibili da

$$\mathcal{C}^i_j(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\omega^q)=\omega^j(v_i)\,v_1\otimes\cdots\otimes\widehat{v_i}\otimes\cdots\otimes v_p\otimes\omega^1\otimes\cdots\otimes\widehat{\omega^j}\otimes\cdots\otimes\omega^q$$

(dove l'accento circonflesso indica elementi omessi nel prodotto tensoriale), ed esteso per linearità.

Per esempio, $\mathcal{C}^1_1\colon T^1_1(V)\to\mathbb{K}$ è data sugli elementi indecomponibili da

$$\mathcal{C}^1_1(v\otimes\omega)=\omega(v),$$

mentre $\mathcal{C}^1_2\colon T^2_2(V)\to T^1_1(V)$ è data sugli elementi indecomponibili da

$$\mathcal{C}^1_2(v_1\otimes v_2\otimes\omega^1\otimes\omega^2)=\omega^2(v_1)\,v_2\otimes\omega^1.$$

1.3 Algebra esterna

L'Osservazione 1.2.3 ci dice che ogni automorfismo L di uno spazio vettoriale T induce un automorfismo $T(L)$ dell'algebra tensoriale $T(V)$. I sottospazi di $T(V)$ che sono mandati in se stessi da ogni automorfismo del tipo $T(L)$ sono chiaramente intrinsecamente associati allo spazio vettoriale V (e non a una sua particolare realizzazione), e quindi ci aspettiamo che siano particolarmente interessanti.

Definizione 1.3.1: Un sottospazio vettoriale S di $T(V)$ che sia invariante sotto l'azione di $T(L)$ per ogni automorfismo L di V, cioè tale che $T(L)(S)=S$ per ogni automorfismo L di V, è detto *spazio tensoriale.*

I principali esempi di spazi tensoriali sono dati dall'insieme dei tensori simmetrici e dall'insieme dei tensori alternanti. *Attenzione:* da qui in poi assumeremo sempre che *il campo* $\mathbb{K}$ *abbia caratteristica zero* (e gli esempi principali da tenere in mente sono $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Osservazione 1.3.1. Indicheremo con $\mathfrak{S}_p$ il *gruppo simmetrico* su p elementi, cioè il gruppo delle permutazioni di $\{1,\dots,p\}$. È noto che ogni permutazione $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ si può scrivere come prodotto di trasposizioni; questa scrittura non è unica, ma la parità del numero delle trasposizioni necessarie per scrivere σ lo è. In altre parole, se $\sigma=\tau_1\cdots\tau_r$ è una decomposizione di $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ come prodotto di trasposizioni, il *segno* $\operatorname{sgn}(\sigma)$ di σ dato da

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^r\in\{+1,-1\}$$

è indipendente dalla particolare decomposizione di σ come prodotto di trasposizioni. In particolare si ha $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ e $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$ per ogni σ, $\tau\in\mathfrak{S}_p$.

Definizione 1.3.2: Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione p-lineare $\varphi\colon V \times \cdots \times V \to W$ è *simmetrica* se

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \varphi(v_1, \ldots, v_p)$$

per ogni p-upla $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ e ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, p\}$. Lo *spazio tensoriale* $S_p(V)$ (rispettivamente, $S^p(V)$) dei *tensori simmetrici p-covarianti* (rispettivamente, *p-controvarianti*) è allora il sottospazio di $T_p(V)$ (rispettivamente, $T^p(V)$) costituito dalle applicazioni multilineari simmetriche a valori in $\mathbb{K}$.

Definizione 1.3.3: Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione p-lineare $\varphi\colon V \times \cdots \times V \to W$ è *alternante* (o *antisimmetrica*) se

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \varphi(v_1, \ldots, v_p)$$

per ogni p-upla $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ e ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, p\}$. Lo *spazio tensoriale* $\bigwedge_p(V)$ (rispettivamente, $\bigwedge^p(V)$) dei *tensori alternanti p-covarianti* (rispettivamente, *p-controvarianti*) è allora il sottospazio di $T_p(V)$ (rispettivamente, $T^p(V)$) costituito dalle applicazioni multilineari alternanti a valori in $\mathbb{K}$.

Esercizio 1.3.1. Dimostra che per ogni applicazione p-lineare $\varphi\colon V \times \cdots \times V \to W$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) φ è simmetrica;

(ii) il valore di φ non cambia scambiando due argomenti, cioè

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = \varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$ e $1 \le i < j \le p$;

(iii) se $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ sono le coordinate di φ rispetto alla base $\{v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_p}\}$ di $T_p(V)$, dove $\{v^1, \ldots, v^n\}$ è una base di V^*, allora $\varphi_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = \varphi_{i_1 \ldots i_p}$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Esercizio 1.3.2. Dimostra che per ogni applicazione p-lineare $\varphi\colon V \times \cdots \times V \to W$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) φ è alternante;

(ii) il valore di φ cambia di segno scambiando due argomenti, cioè

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$ e $1 \le i < j \le p$;

(iii) φ si annulla ogni volta che due argomenti sono uguali, cioè

$$\varphi(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_p) = 0$$

per ogni $v_1, \ldots, v, \ldots, v_p \in V$;

(iv) $\varphi(v_1, \ldots, v_p) = 0$ non appena i vettori $v_1, \ldots, v_p \in V$ sono linearmente dipendenti;

(v) se $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ sono le coordinate di φ rispetto alla base $\{v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_p}\}$ di $T_p(V)$, dove $\{v^1, \ldots, v^n\}$ è una base di V^*, allora $\varphi_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Esercizio 1.3.3. Dimostra che gli spazi $S^p(V)$, $S_p(V)$, $\bigwedge^p(V)$ e $\bigwedge_p(V)$ sono effettivamente spazi tensoriali.

Ora, il prodotto tensoriale di due tensori simmetrici o alternanti non è necessariamente simmetrico o alternante.

Esempio 1.3.1. Sia $V = \mathbb{R}^2$, e indichiamo con $\{e_1, e_2\}$ la base canonica, e con $\{e^1, e^2\}$ la corrispondente base duale. Chiaramente, e_1, $e_2 \in V = \bigwedge^1 V = S^1(V) = V$, mentre $e_1 \otimes e_2 \notin \bigwedge^2 V \cup S^2(V)$. Infatti,

$$e_1 \otimes e_2(e^1, e^2) = e^1(e_1)e^2(e_2) = 1 \neq 0 = \pm e^1(e_2)e^2(e_1) = \pm e_1 \otimes e_2(e^2, e^1).$$

Esercizio 1.3.4. Dimostra che $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \in \bigwedge^2 V$ e che $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \in S^2(V)$ per ogni coppia v_1, $v_2 \in V$ di elementi di uno spazio vettoriale V.

Quest'ultimo esercizio fa sospettare che sia possibile definire un prodotto sui tensori alternanti (o simmetrici) in modo da ottenere un tensore alternante (o simmetrico). Per introdurlo, cominciamo con lo studiare meglio i tensori alternanti e simmetrici.

Proposizione 1.3.1: *Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, e $\phi\colon \mathcal{B}^p \to W$ una qualsiasi applicazione a valori in un altro spazio vettoriale W. Allora ϕ si può estendere a una applicazione p-lineare alternante (rispettivamente, simmetrica) $\Phi\colon V \times \cdots \times V \to W$ se e solo se*

$$\phi(v_{\mu_{\sigma(1)}}, \ldots, v_{\mu_{\sigma(p)}}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\phi(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p}) \tag{1.3.1}$$

(rispettivamente, $\phi(v_{\mu_{\sigma(1)}}, \ldots, v_{\mu_{\sigma(p)}}) = \phi(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p})$) per ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, p\}$, e ogni p-upla $(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p})$ di elementi di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione: Per la Proposizione 1.1.2, ogni $\phi\colon \mathcal{B}^p \to W$ si estende in modo unico a un'applicazione p-lineare a valori in W tramite la (1.1.2), dove $w_{\mu_1 \ldots \mu_p} = \phi(v_{\mu_1}, \ldots, v_{\mu_p})$, ed è chiaro che l'estensione è alternante se e solo se vale la (1.3.1). Il ragionamento nel caso simmetrico è identico. □

Osservazione 1.3.2. In questo paragrafo d'ora in poi tratteremo solo i tensori alternanti e simmetrici controvarianti; risultati del tutto analoghi valgono anche per i tensori alternanti e simmetrici covarianti, in quanto $S_p(V) = S^p(V^*)$ e $\bigwedge_p(V) = \bigwedge^p(V^*)$. Inoltre, saremo principalmente interessati al caso alternante.

La Proposizione 1.3.1 implica che una $\varphi \in \bigwedge^p V$ è completamente determinata dai valori che assume sulle p-uple della forma $(v^{i_1}, \ldots, v^{i_p})$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$, dove $\mathcal{B}^* = \{v^1, \ldots, v^n\}$ è una base di V^*. Analogamente, una $\phi \in S^p(V)$ è completamente determinata dai valori che assume sulle p-uple della forma $(v^{i_1}, \ldots, v^{i_p})$ con $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$. Quindi

Corollario 1.3.2: *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \ge 1$ sul campo $\mathbb{K}$, e $p \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\dim S^p(V) = \binom{n+p-1}{p},$$

$$\dim \bigwedge\nolimits^p V = \begin{cases} \binom{n}{p} & \textit{se } 0 \le p \le n, \\ 0 & \textit{se } p > n. \end{cases}$$

In particolare,

$$\dim \bigoplus_{0 \le p \le n} \bigwedge\nolimits^p V = 2^n.$$

Dimostrazione: Per quanto visto sopra, la dimensione di $\bigwedge^p V$ è uguale alla cardinalità dell'insieme delle p-uple $(i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$, cardinalità che è ben nota essere $\binom{n}{p}$ per $0 \le p \le n$ e 0 altrimenti. In particolare,

$$\dim \bigoplus_{0 \le p \le n} \bigwedge\nolimits^p V = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Per lo stesso motivo, la dimensione di $S^p(V)$ è uguale alla cardinalità dell'insieme delle p-uple $(i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$. Ora, si ha $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$ se e solo se

$$1 \le i_1 < i_2 + 1 < i_3 + 2 < \cdots < i_p + p - 1 \le n + p - 1.$$

Quindi l'insieme delle p-uple $(i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \le i_1 \le \cdots \le i_p \le n$ ha la stessa cardinalità dell'insieme delle p-uple $(j_1, \ldots, j_p)$ con $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n + p - 1$, e la tesi segue dal fatto che quest'ultimo insieme ha cardinalità $\binom{n+p-1}{p}$. □

Osservazione 1.3.3. In particolare, se V ha dimensione n allora $\dim \bigwedge^n V = 1$. Non è difficile trovare un generatore di $\bigwedge^n V$: fissata una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$, definiamo $\omega \in \bigwedge^n V$ ponendo

$$\omega(\varphi^1, \ldots, \varphi^n) = \det\bigl(\varphi^i(v_j)\bigr)$$

per ogni $\varphi^1, \ldots, \varphi^n \in V^*$. Siccome ω valutato sulla base duale di V^* è uguale al determinante della matrice identica, cioè 1, ne deduciamo che $\omega \neq O$; quindi ogni altro elemento di $\bigwedge^n V$ è un multiplo di ω.

Esercizio 1.3.5. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V, e $1 \leq p \leq n$. Preso un multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_p)$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, definiamo $v_I \in \bigwedge^p V$ ponendo

$$v_I(\varphi^1, \ldots, \varphi^p) = \det\bigl(\varphi^h(v_{i_k})\bigr)$$

per ogni $\varphi^1, \ldots, \varphi^p \in V^*$. Dimostra che la famiglia delle applicazioni p-alternanti v_I al variare di I è una base di $\bigwedge^p V$.

Definizione 1.3.4: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. L'*algebra esterna* di V è lo spazio tensoriale

$$\bigwedge V = \bigoplus_{0 \leq p \leq n} \bigwedge^p V,$$

mentre l'*algebra simmetrica* di V è lo spazio tensoriale

$$S(V) = \bigoplus_{p \geq 0} S^p(V).$$

Abbiamo già osservato che $\bigwedge V$ e $S(V)$ non sono sottoalgebre di $T(V)$. Vogliamo allora introdurre un nuovo prodotto su $\bigwedge V$ e un nuovo prodotto su $S(V)$ in modo da renderli delle algebre. Cominciamo con la

Definizione 1.3.5: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. L'*operatore di antisimmetrizzazione* è l'applicazione lineare $\mathcal{A}\colon T^\bullet(V) \to \bigwedge V$ definita da

$$\mathcal{A}(\alpha)(\phi^1, \ldots, \phi^p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(\phi^{\sigma(1)}, \ldots, \phi^{\sigma(p)})$$

per ogni $\alpha \in T^p(V)$, e $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$. Analogamente, l'*operatore di simmetrizzazione* $\mathcal{S}\colon T^\bullet(V) \to S(V)$ è dato da

$$\mathcal{S}(\alpha)(\phi^1, \ldots, \phi^p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \alpha(\phi^{\sigma(1)}, \ldots, \phi^{\sigma(p)})$$

per ogni $\alpha \in T^p(V)$, e $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$.

Per ogni $\tau \in \mathfrak{S}_p$ si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha)(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p)}) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(\phi^{\tau(\sigma(1))}, \ldots, \phi^{\tau(\sigma(p))}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}\rho)\, \alpha(\phi^{\rho(1)}, \ldots, \phi^{\rho(p)}) = \operatorname{sgn}(\tau) \mathcal{A}(\alpha)(\phi^1, \ldots, \phi^p),\end{aligned}$$

per cui l'immagine di $\mathcal{A}$ è effettivamente contenuta in $\bigwedge V$. È inoltre evidente che $\mathcal{A}$ è lineare, e che è l'identità ristretta a $\bigwedge V$.

Esercizio 1.3.6. Dimostra che $\mathcal{S}\colon T^\bullet(V) \to S(V)$ è lineare, ha immagine contenuta in $S(V)$, ed è l'identità ristretta a $S(V)$.

Esercizio 1.3.7. Dato $\alpha \in T^p(V)$ dimostra che $\mathcal{S}(\alpha)$ è l'unico tensore p-controvariante simmetrico tale che $\mathcal{S}(\alpha)(\phi, \ldots, \phi) = \alpha(\phi, \ldots, \phi)$ per tutti i $\phi \in V^*$.

Definizione 1.3.6: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$. Allora il *prodotto esterno* di α e β è il $(p+q)$-tensore alternante dato da

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) \in \bigwedge^{p+q} V.$$

Estendendo per bilinearità otteniamo il *prodotto esterno* $\wedge\colon \bigwedge V \times \bigwedge V \to \bigwedge V$. La quadrupla $(\bigwedge V, +, \wedge, \cdot)$ è detta *algebra esterna* di V.

Definizione 1.3.7: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, $\alpha \in S^p(V)$ e $\beta \in S^q(V)$. Allora il *prodotto simmetrico* di α e β è il $(p+q)$-tensore simmetrico dato da

$$\alpha \odot \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{S}(\alpha \otimes \beta) \in S^{p+q}(V).$$

Estendendo per bilinearità riusciamo a definire il *prodotto simmetrico* $\odot\colon S(V) \times S(V) \to S(V)$. La quadrupla $\big(S(V), +, \odot, \cdot\big)$ è detta *algebra simmetrica* di V.

Osservazione 1.3.4. Attenzione: in alcuni testi il prodotto esterno è definito dalla formula

$$\alpha \wedge \beta = \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) \in \textstyle\bigwedge^{p+q} V$$

per ogni $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$. Analogamente, in alcuni testi (non necessariamente gli stessi) il prodotto simmetrico è definito dalla formula $\alpha \odot \beta = \mathcal{S}(\alpha \otimes \beta)$.

Proposizione 1.3.3: *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Allora la quadrupla $(\bigwedge V, +, \wedge, \cdot)$ è un'algebra con unità e anticommutativa, nel senso che è un'algebra con unità tale che*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \tag{1.3.2}$$

per ogni $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$.

Dimostrazione: La distributività di $\wedge$ rispetto alla somma e al prodotto per scalari seguono subito dalla definizione e dalla linearità di $\mathcal{A}$, ed è chiaro che $1 \in \bigwedge^0 V$ è un'unità. Rimangono da dimostrare l'associatività e l'anticommutatività (1.3.2).

Cominciamo con l'associatività. Prendiamo $\alpha \in \bigwedge^p V$, $\beta \in \bigwedge^q V$, $\gamma \in \bigwedge^r V$ e $\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r} \in V^*$. Allora

$$\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r}) \\
&= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!} \mathcal{A}\big((\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma\big)(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\tau)(\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\tau)(\alpha \wedge \beta)(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q)})\gamma(\phi^{\tau(p+q+1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!} \frac{1}{p!q!r!} \times \\
&\quad \times \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(\phi^{\sigma_\tau(1)}, \ldots, \phi^{\sigma_\tau(p)}) \beta(\phi^{\sigma_\tau(p+1)}, \ldots, \phi^{\sigma_\tau(p+q)}) \gamma(\phi^{\tau(p+q+1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q+r)}),
\end{aligned}$$

dove $\big(\sigma_\tau(1), \ldots, \sigma_\tau(p+q)\big)$ è ottenuta applicando la permutazione σ alla $(p+q)$-upla $\big(\tau(1), \ldots, \tau(p+q)\big)$. Ora, è chiaro che $\big(\sigma_\tau(1), \ldots, \sigma_\tau(p+q), \tau(p+q+1), \ldots, \tau(p+q+r)\big)$ è ancora una permutazione di $(1, \ldots, p+q+r)$, il cui segno è esattamente $\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$. Inoltre, ogni permutazione in $\mathfrak{S}_{p+q+r}$ può essere ottenuta tramite questo procedimento in esattamente $(p+q)!$ modi diversi; quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r}) \\
&\quad = \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\rho) \alpha(\phi^{\rho(1)}, \ldots, \phi^{\rho(p)}) \beta(\phi^{\rho(p+1)}, \ldots, \phi^{\rho(p+q)}) \gamma(\phi^{\rho(p+q+1)}, \ldots, \phi^{\rho(p+q+r)}).
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

In maniera analoga si dimostra che quest'ultima espressione è uguale a $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q+r})$, e l'associatività è verificata.

Rimane da dimostrare la anticommutatività. Se $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$ abbiamo

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\tau)\alpha(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(p)})\beta(\phi^{\tau(p+1)}, \ldots, \phi^{\tau(p+q)}), \\ &= (-1)^{pq} \frac{1}{p!q!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\rho)\alpha(\phi^{\rho(q+1)}, \ldots, \phi^{\rho(q+p)})\beta(\phi^{\rho(1)}, \ldots, \phi^{\rho(q)}) \\ &= (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha(\phi^1, \ldots, \phi^{p+q}),\end{aligned}$$

per ogni $\phi^1, \ldots, \phi^{p+q} \in V^*$, e ci siamo. □

Esercizio 1.3.8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Dimostra che la quadrupla $\big(S(V), +, \odot, \cdot\big)$ è un'algebra con unità commutativa.

Osservazione 1.3.5. Ripetendo il ragionamento che ha portato alla (1.3.3) si dimostra che per ogni r-upla $\alpha_1 \in \bigwedge^{k_1} V, \ldots, \alpha_r \in \bigwedge^{k_r} V$ e per ogni $\phi^1, \ldots, \phi^{k_1+\cdots+k_r} \in V^*$ si ha

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r(\phi^1, \ldots, \phi^{k_1+\cdots+k_r}) \\ &\quad = \frac{1}{k_1! \cdots k_r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{k_1+\cdots+k_r}} \operatorname{sgn}(\tau)\, \alpha_1(\phi^{\tau(1)}, \ldots, \phi^{\tau(k_1)}) \cdots \alpha_r(\phi^{\tau(k_1+\cdots+k_{r-1}+1)}, \ldots, \phi^{\tau(k_1+\cdots+k_r)}).\end{aligned}$$

In particolare,

$$\begin{aligned}v_1 \wedge \cdots \wedge v_p(\phi^1, \ldots, \phi^p) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau)\, \phi^{\tau(1)}(v_1) \cdots \phi^{\tau(p)}(v_p) \\ &= \det\big(\phi^h(v_k)\big)\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$ e $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$.

Esercizio 1.3.9. Dimostra che

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau)\, v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(p)}$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$.

Esercizio 1.3.10. Dimostra che il prodotto esterno è l'unica applicazione da $\bigwedge V \times \bigwedge V$ in $\bigwedge V$ che sia associativa, bilineare, anticommutativa e soddisfi (1.3.4).

Osservazione 1.3.6. L'anticommutatività implica che se $\alpha \in \bigwedge^p V$ con p dispari allora $\alpha \wedge \alpha = O$. Questo non è più vero se p è pari: per esempio, se $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ si ha

$$\alpha \wedge \alpha = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq O.$$

Avendo a disposizione il prodotto esterno non è difficile trovare una base dell'algebra esterna:

Proposizione 1.3.4: *Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora una base di $\bigwedge^p V$ è data da*

$$\mathcal{B}_p = \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}.$$

Dimostrazione: Siccome $\mathcal{B}_p$ contiene $\dim \bigwedge^p V$ elementi, ci basta dimostrare che sono linearmente indipendenti. Sia $\{v^1, \ldots, v^n\}$ la base duale di V^*; la Proposizione 1.1.2 ci dice che per vedere se gli elementi di $\mathcal{B}_p$ sono linearmente indipendenti basta calcolare il loro valore sulle p-uple di elementi della base duale e verificare che si ottengono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{K}^{n^p}$. Siccome i $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$ sono alternanti, è sufficiente calcolarne il valore su p-uple $(v^{j_1}, \dots, v^{j_p})$ con $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$. Usando (1.3.4) otteniamo quindi

$$\begin{aligned} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}(v^{j_1}, \dots, v^{j_p}) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau) v^{j_{\tau(1)}}(v_{i_1}) \cdots v^{j_{\tau(p)}}(v_{i_p}) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau) \delta_{i_1}^{j_{\tau(1)}} \cdots \delta_{i_p}^{j_{\tau(p)}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } (j_1, \dots, j_p) \ne (i_1, \dots, i_p), \\ 1 & \text{se } (j_1, \dots, j_p) = (i_1, \dots, i_p), \end{cases} \end{aligned}$$

in quanto $i_1 < \cdots < i_p$ e l'unica permutazione che conserva l'ordine è l'identità, e ci siamo. □

Esercizio 1.3.11. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V. Per ogni multi-indice $I = (i_1, \dots, i_p)$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ dimostra che $v_I = v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$, dove $v_I \in \bigwedge^p(V)$ è definito nell'Esercizio 1.3.5.

Osservazione 1.3.7. Sia $(v_1, \dots, v_p)$ una p-upla di elementi di uno spazio vettoriale V. Se due di questi elementi coincidono, l'anticommutatività implica che $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = O$. Più in generale, si vede subito (esercizio) che $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = O$ se $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente dipendenti. Viceversa, se $\{v_1, \dots, v_p\}$ sono linearmente indipendenti, possiamo completarli a una base di V e la Proposizione 1.3.4 ci assicura che $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \ne O$. In effetti, l'elemento $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ risulta essere univocamente determinato (a meno di una costante moltiplicativa non nulla) dal p-piano generato da $\{v_1, \dots, v_p\}$. Più precisamente, sia $\{w_1, \dots, w_p\}$ un'altra base dello stesso p-piano, e sia $A = (a_h^k) \in GL(p, \mathbb{K})$ la matrice tale che $w_h = a_h^1 v_1 + \cdots + a_h^p v_p$ per $h = 1, \dots, p$. Allora

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_p = (\det A)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p.$$

Infatti se $\phi^1, \dots, \phi^p \in V^*$ si ha

$$\begin{aligned} w_1 \wedge \cdots \wedge w_p(\phi^1, \dots, \phi^p) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau) \phi^{\tau(1)}(w_1) \cdots \phi^{\tau(p)}(w_p) \\ &= \sum_{j_1=1}^p \cdots \sum_{j_p=1}^p a_1^{j_1} \cdots a_p^{j_p} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\tau) \phi^{\tau(1)}(v_{j_1}) \cdots \phi^{\tau(p)}(v_{j_p}) \\ &= \sum_{j_1=1}^p \cdots \sum_{j_p=1}^p a_1^{j_1} \cdots a_p^{j_p} v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_p}(\phi^1, \dots, \phi^p) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \cdots a_p^{\sigma(p)} v_1 \wedge \cdots \wedge v_p(\phi^1, \dots, \phi^p) \\ &= \det(A) v_1 \wedge \cdots \wedge v_p(\phi^1, \dots, \phi^p), \end{aligned}$$

grazie all'anticommutatività.

Concludiamo questo paragrafo con una serie di esercizi.

Esercizio 1.3.12. Dimostra che per ogni $\omega \in \bigwedge^n V$, $T \in \operatorname{Hom}(V^*, V^*)$ e $\phi^1, \dots, \phi^n \in V^*$, dove $n = \dim V$, si ha $\omega\big(T(\phi^1), \dots, T(\phi^n)\big) = (\det T)\omega(\phi^1, \dots, \phi^n)$.

Esercizio 1.3.13. Dimostra che $T^2(V) = S^2(V) \oplus \bigwedge^2 V$, e che $e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \notin S^3(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.3.14. Se V e W sono spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, dimostra che ogni applicazione lineare $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$ si estende a un'applicazione lineare $\tilde{L} \in \operatorname{Hom}(\bigwedge V, \bigwedge W)$ tale che $\tilde{L}(1) = 1$ e $\tilde{L}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = L(v_1) \wedge \cdots \wedge L(v_p)$ per ogni $v_1, \dots, v_p \in V$.

Esercizio 1.3.15. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e $F\colon V^p \to \bigwedge^p V$ l'applicazione p-lineare alternante data da $F(v_1, \dots, v_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$. Dimostra che la coppia $(\bigwedge^p V, F)$ è l'unica coppia (a meno di isomorfismi) che soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni applicazione p-lineare alternante $A\colon V^p \to W$ a valori in uno spazio vettoriale W esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{A}\colon \bigwedge^p V \to W$ tale che $A = \tilde{A} \circ F$.

Esercizio 1.3.16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Dimostra che $(\bigwedge^p V)^*$ è isomorfo a $\bigwedge^p(V^*)$. (*Suggerimento:* Usa l'esercizio precedente e l'applicazione $\Phi\colon (V^*)^p \to (\bigwedge^p V)^*$ definita da

$$\Phi(\phi^1, \ldots, \phi^p)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \det\bigl(\phi^i(v_j)\bigr)$$

per $v_1, \ldots, v_p \in V$ e $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$.)

Esercizio 1.3.17. Se $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare sullo spazio vettoriale V, sia $\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$ il prodotto scalare su $T(V)$ costruito nella Proposizione 1.2.1. Dimostra che

$$\langle\!\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle\!\rangle = p! \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_p \in V$.

Esercizio 1.3.18. Enuncia e dimostra per l'algebra simmetrica $S(V)$ risultati analoghi a quelli contenuti nei quattro esercizi precedenti.

Esercizio 1.3.19. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dimostra che per ogni u, $w \in \mathbb{R}^3 = \bigwedge^1 \mathbb{R}^3$ le coordinate di $u \wedge v \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\{e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2\}$ sono esattamente le coordinate del classico prodotto vettore di u e v rispetto alla base canonica.

1.4 Tensori simplettici

Dedichiamo quest'ultimo paragrafo a un tipo particolare di 2-tensori covarianti alternanti, utili in diverse questioni di geometria differenziale e di fisica matematica. Di nuovo, lavoriamo su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero.

Definizione 1.4.1: Un 2-tensore covariante $\omega \in T_2(V)$ è detto *non degenere* se $\omega(v, w) = 0$ per ogni $w \in V$ implica $v = O$. Un *tensore simplettico* è un 2-tensore covariante alternante non degenere. Una coppia (V, ω) dove V è uno spazio vettoriale e $\omega \in \bigwedge_2 V$ è un tensore simplettico, è detta *spazio vettoriale simplettico.*

Esercizio 1.4.1. Sia $\omega \in T_2(V)$ un 2-tensore covariante su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) ω è non degenere.
(ii) L'applicazione $\tilde{\omega}\colon V \to V^*$ data da $\tilde{\omega}(v)(w) = \omega(v, w)$ per ogni v, $w \in V$ è un isomorfismo.
(iii) Scelta una base $\{v^1, \ldots, v^n\}$ di V^*, la matrice (ω_{hk}) delle coordinate di ω rispetto alla base $\{v^h \otimes v^k\}$ di $T_2(V)$ è invertibile.

Esempio 1.4.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2n$. Scegliamo una base $\{v_1, w_1, \ldots, v_n, w_n\}$, e indichiamo con $\{v^1, w^1, \ldots, v^n, w^n\}$ la corrispondente base duale. Sia allora $\omega \in \bigwedge_2 V$ dato da

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} v^j \wedge w^j. \tag{1.4.1}$$

Vogliamo dimostrare che ω è un tensore simplettico. Prima di tutto, la sua azione sugli elementi della base è data da

$$\omega(v_i, w_j) = -\omega(w_j, v_i) = \delta_{ij}, \qquad \omega(v_i, v_j) = \omega(w_i, w_j) = 0 \tag{1.4.2}$$

per ogni $1 \le i, j \le n$. Supponiamo allora che $v = \sum_i (a^i v_i + b^i w_i) \in V$ sia tale che $\omega(v, w) = 0$ per ogni $w \in V$. In particolare $0 = \omega(v, v_j) = -b^j$ e $0 = \omega(v, w_j) = a^j$ per $1 \le j \le n$; quindi $v = O$ e ω è non degenere.

Definizione 1.4.2: Sia (V, ω) uno spazio vettoriale simplettico. Il *complemento simplettico* di un sottospazio $W \subseteq V$ è il sottospazio

$$W^\perp = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W\}.$$

Contrariamente al caso dei complementi ortogonali, non è detto che $W \cap W^\perp = \{O\}$. Per esempio, se $\dim W = 1$ allora l'antisimmetria di ω implica che $W \subseteq W^\perp$. Questa osservazione suggerisce di classificare i sottospazi di uno spazio vettoriale simplettico come segue:

Definizione 1.4.3: Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico. Un sottospazio $W \subseteq V$ di V sarà detto *simplettico* se $W \cap W^\perp = \{O\}$; *isotropo* se $W \subseteq W^\perp$; *coisotropo* se $W \supseteq W^\perp$; *Lagrangiano* se $W = W^\perp$.

Esercizio 1.4.2. Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico, e $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Dimostra che:
(i) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.
(ii) $(W^\perp)^\perp = W$.
(iii) W è simplettico se e solo se $\omega|_{W\times W}$ è non degenere.
(iv) W è isotropo se e solo se $\omega|_{W\times W} = O$.
(v) W è Lagrangiano se e solo se $\omega|_{W\times W} = O$ e $\dim V = 2\dim W$.

L'unico risultato che dimostriamo sui tensori simplettici è che possono sempre essere espressi nella forma indicata dall'Esempio 1.4.2.

Proposizione 1.4.1: *Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico. Allora $\dim V = 2n$ è pari, ed esiste una base di V rispetto a cui ω è data da* (1.4.1).

Dimostrazione: Si verifica facilmente che ω è della forma (1.4.1) rispetto a una base $\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ di V se e solo se l'azione di ω sui vettori della base è data da (1.4.2). Dimostreremo allora che esiste una base per cui (1.4.2) vale procedendo per induzione su $m = \dim V$.

Per $m = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che (V,ω) sia uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $m \ge 1$, e che la proposizione sia vera per tutti gli spazi vettoriali simplettici di dimensione minore di m. Sia $v_1 \in V$ un vettore non nullo. Essendo ω non degenere, esiste un vettore $w_1 \in V$ tale che $\omega(v_1, w_1) \neq 0$; a meno di moltiplicare w_1 per una costante, possiamo anche supporre che $\omega(v_1, w_1) = 1$. Siccome ω è alternante, v_1 e w_1 sono linearmente indipendenti.

Sia W il sottospazio generato da v_1 e w_1. L'Esercizio 1.4.2.(i) ci assicura che $\dim W^\perp = m - 2$. Siccome $\omega|_{W\times W}$ è chiaramente non degenere, l'Esercizio 1.4.2.(iii) implica che W è simplettico; ma allora $W \cap W^\perp = \{O\}$ e quindi, grazie all'Esercizio 1.4.2.(ii), anche $W^\perp$ è simplettico. Per l'ipotesi induttiva, $\dim W^\perp$ è pari, ed esiste una base $\{v_2, w_2, \dots, v_n, w_n\}$ di $W^\perp$ che soddisfa (1.4.2). Ma allora $\{v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_n, w_n\}$ è una base di V che soddisfa (1.4.2), e ci siamo. □

Definizione 1.4.4: Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico. Una base $\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ di V rispetto a cui ω è data da (1.4.1) è detta *base simplettica* di V.

Esercizio 1.4.3. Sia (V,ω) uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$. Dimostra che per ogni sottospazio simplettico (rispettivamente, isotropo, coisotropo, Lagrangiano) W di V esiste una base simplettica $\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ di V tale che:
(i) se W è simplettico allora $W = \mathrm{Span}(v_1, w_1, \dots, v_k, w_k)$ per qualche $1 \le k \le n$;
(ii) se W è isotropo allora $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ per qualche $1 \le k \le n$;
(iii) se W è coisotropo allora $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k)$ per qualche $1 \le k \le n$;
(iv) se W è Lagrangiano allora $W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$. ⌋