4

Coomologia

Chiacchiere.

4.1 Richiami di algebra omologica

In questa sezione riportiamo una serie di definizioni e risultati generali che saranno utili in seguito.

Definizione 4.1.1. Una successione

$$\cdots \longrightarrow V_{j-1} \xrightarrow{f_j} V_j \xrightarrow{f_{j+1}} V_{j+1} \longrightarrow \cdots$$

di omomorfismi (applicazioni lineari, eccetera) di gruppi abeliani (spazi vettoriali, eccetera) è *esatta in* V_j se $\operatorname{Ker} f_{j+1} = \operatorname{Im} f_j$; ed è *esatta* se lo è in tutti i suoi elementi.

In particolare, una successione esatta della forma

$$O \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow O \tag{4.1}$$

sarà detta *successione esatta corta.*

Osservazione 4.1.2. Nel seguito useremo la parola "morfismo" per indicare un'applicazione fra due insiemi con struttura che conserva la struttura. Per esempio, un morfismo fra gruppi sarà un omomorfismo, un morfismo fra spazi vettoriali sarà un'applicazione lineare, e così via.

Osservazione 4.1.3. Dire che una successione della forma

$$O \longrightarrow U \xrightarrow{f} V$$

è esatta è equivalente a dire che $f\colon U \to V$ è iniettiva; e dire che una successione della forma

$$V \xrightarrow{g} W \longrightarrow O$$

è esatta equivale a dire che $g: V \to W$ è surgettiva. In particolare, in una successione esatta corta (4.1) il morfismo f è iniettivo, il morfismo g è surgettivo e W è isomorfo al quoziente $V/f(U)$.

Definizione 4.1.4. Un gruppo abeliano (spazio vettoriale, eccetera) C è *graduato* su $\mathbb{N}$ se si può scrivere come somma diretta di sottogruppi (sottospazi, eccetera) nella forma

$$C = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} C^k \; ;$$

Una *k-cocatena* (o *cocatena* di *grado* k) è un elemento di C^k. In modo analogo si definisce un gruppo abeliano (spazio vettoriale, eccetera) graduato su $\mathbb{Z}$.

Un *morfismo graduato* di *grado* $d \in \mathbb{Z}$ fra gruppi (spazi vettoriali, eccetera) graduati è un morfismo $F: C \to D$ che modifica la graduazione di d livelli, cioè tale che $F(C^k) \subseteq D^{k+d}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se $d = 0$ parleremo di *morfismo graduato.*

Definizione 4.1.5. Un *complesso differenziale* (o *complesso di cocatene*) è una coppia (C, d) composta da un gruppo abeliano (spazio vettoriale, eccetera) graduato $C = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} C^k$ e da un morfismo graduato $d: C \to C$ di grado 1, detto *differenziale,* tale che

$$d \circ d = O \; .$$

A volte scriveremo d^k al posto di $d|_{C^k}$.

Un *k-cociclo* è un elemento di $Z^k(C) = \operatorname{Ker} d^k \subseteq C^k$; un *$k$-cobordo* è un elemento di $B^k(C) = \operatorname{Im} d^{k-1} \subseteq C^k$ (dove per convenzione poniamo $B^0 = \{O\}$). La condizione $d \circ d = O$ implica che $B^k \subseteq Z^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; il k-esimo *gruppo di coomologia* $H^k(C)$ del complesso differenziale è allora definito come il quoziente $H^k(C) = Z^k(C)/B^k(C)$. Infine, la *coomologia* del complesso è il gruppo (spazio vettoriale, eccetera) graduato $H^\bullet(C) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^k(C)$. Indicheremo con $[c] \in H^q(C)$ la classe del cociclo $c \in Z^q(C)$.

Esempio 4.1.6. Sia M una varietà. Allora la coppia $\big(A^\bullet(M), \mathrm{d}\big)$, dove

$$A^\bullet(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A^k(M)$$

(con $A^k(M) = (O)$ se $k > \dim M$) e d è il differenziale esterno, è un complesso differenziale la cui coomologia è proprio la coomologia di de Rham. Un k-cociclo è una k-forma chiusa; un k-cobordo è una k-forma esatta.

Osservazione 4.1.7. Un *complesso di catene* si definisce in modo analogo, ma con un differenziale di grado -1, cioè tale che $d(C^k) \subseteq C^{k-1}$.

Definizione 4.1.8. Siano (A, d_A) e (B, d_B) due complessi differenziali. Un *morfismo di cocatene* è un morfismo graduato $F\colon A \to B$ che commuta con i differenziali: $F \circ d_A = d_B \circ F$.

Esempio 4.1.9. Se $F\colon M \to N$ è un'applicazione differenziabile fra varietà, allora $F^*\colon A^\bullet(N) \to A^\bullet(M)$ è un morfismo di cocatene.

Se $F\colon A \to B$ è un morfismo di cocatene, chiaramente abbiamo

$$F\bigl(Z^k(A)\bigr) \subseteq Z^k(B) \qquad \text{e} \qquad F\bigl(B^k(A)\bigr) \subseteq B^k(B)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi F induce un morfismo graduato $F^*\colon H^\bullet(A) \to H^\bullet(B)$ semplicemente ponendo $F^*([c]) = [F(c)]$ per ogni $c \in Z^q(A)$. In particolare, una successione di morfismi di cocatene

$$A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} C$$

induce una successione di morfismi graduati

$$H^\bullet(A) \xrightarrow{F^*} H^\bullet(B) \xrightarrow{G^*} H^\bullet(C) .$$

Esempio 4.1.10. In particolare, un'applicazione differenziabile $F\colon M \to N$ fra varietà induce un morfismo di cocatene $F^*\colon H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$, detto *pullback*.

Il primo risultato importante è che partendo da una successione esatta corta di morfismi di cocatene otteniamo in coomologia qualcosa di più di una successione esatta corta di morfismi graduati:

Teorema 4.1.11. *Sia*

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} C \longrightarrow O \tag{4.2}$$

una successione esatta corta di morfismi di cocatene. Allora esiste un morfismo graduato $d^*\colon H^\bullet(C) \to H^\bullet(A)$ di grado 1 tale che la successione

$$\cdots \longrightarrow H^k(A) \xrightarrow{F^*} H^k(B) \xrightarrow{G^*} H^k(C) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(A) \longrightarrow \cdots \tag{4.3}$$

sia esatta.

Dimostrazione. Il fatto che (4.2) sia una sequenza esatta corta di morfismi di cocatene equivale a dire che il seguente diagramma è commutativo a righe esatte:

$$\begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} & \\
O \arrow[r] & A^{k+1} \arrow[u] \arrow[r, "F"] & B^{k+1} \arrow[u] \arrow[r, "G"] & C^{k+1} \arrow[u] \arrow[r] & O \\
O \arrow[r] & A^{k} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "F"] & B^{k} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "G"] & C^{k} \arrow[u, "d"] \arrow[r] & O \\
 & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Sia $c \in Z^k(C)$. Siccome G è surgettiva, troviamo $b \in B^k$ tale che $G(b) = c$. La commutatività del diagramma ci dice che $G(db) = dG(b) = dc = O$; quindi $db \in \operatorname{Ker} G = \operatorname{Im} F$, per cui esiste un unico $a \in A^{k+1}$ tale che $F(a) = db$. Inoltre, $F(da) = dF(a) = d(db) = O$; essendo F iniettiva troviamo $da = O$, cioè $a \in Z^{k+1}(A)$. Se poi $b' \in B^q$ è un'altra cocatena tale che $G(b') = c$, sia $a' \in Z^{k+1}(A)$ l'unica cocatena tale che $F(a') = db'$. Siccome $G(b - b') = O$, esiste un unico $a'' \in A^k$ tale che $b' - b = F(a'')$. Quindi $db' = db + dF(a'') = F(a + da'')$ da cui segue che $a' = a + da''$. In altre parole, $a' - a \in B^{k+1}(A)$, e la classe di coomologia $[a] \in H^{k+1}(A)$ dipende solo da $c \in Z^k(C)$ e non dalla scelta di $b \in B^k$. Per far vedere che abbiamo definito un morfismo da $H^k(C)$ a $H^{k+1}(A)$ rimane da verificare che se $c \in B^k(C)$ allora $a \in B^{k+1}(A)$. Ma infatti se $c = dc'$ per qualche $c' \in C^{k-1}$, scriviamo $c' = G(b'')$ con $b'' \in B^{k-1}$; allora $c = dG(b'') = G(db'')$, per cui possiamo prendere $b = db''$, che implica $db = O$ e $a = O \in B^{k+1}(A)$ come voluto.

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, mapsto] & da \arrow[r, mapsto, "F"] & ddb = O & & \\
O \arrow[r, mapsto] & a,\, a' \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto, "F"] & db,\, db' \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto, "G"] & dc = O \arrow[r, mapsto] & O \\
O \arrow[r, mapsto] & a'' \arrow[u, mapsto, "d"] \arrow[r, mapsto, "F"] & b,\, b' \arrow[u, mapsto, "d"] \arrow[r, mapsto, "G"] & c \arrow[u, mapsto, "d"] \arrow[r, mapsto] & O \\
 & & b'' \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto, "G"] & c' \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & O
\end{tikzcd}$$

In questo modo abbiamo definito un morfismo $d^*\colon H^k(C) \to H^{k+1}(A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; rimane da verificare che (4.3) è esatta.

Esattezza in $H^k(B)$: sia $[b] \in H^k(B)$ tale che $G^*([b]) = O$. Questo significa che esiste $c \in C^{k-1}$ tale che $G(b) = dc$, dove $b \in Z^k(B)$ è un qualsiasi rappresentante di $[b]$. Scegliamo $b' \in B^{k-1}$ tale che $G(b') = c$; siccome $G(db') = dG(b') = dc = G(b)$, otteniamo che $b - db' \in \operatorname{Ker} G = \operatorname{Im} F$, per cui esiste $a \in A^k$ tale che $b - db' = F(a)$. Inoltre $F(da) = dF(a) = db - ddb' = O$, per cui $da = O$, cioè $a \in Z^k(A)$. Mettendo il tutto insieme abbiamo $[b] = F^*([a])$, per cui $\operatorname{Ker} G^* \subseteq \operatorname{Im} F^*$. Per il viceversa, se $a \in Z^k(A)$ abbiamo $G\bigl(F(a)\bigr) = O$, e quindi $\operatorname{Im} F^* \subseteq \operatorname{Ker} G^*$, come voluto.

Esattezza in $H^k(C)$: prima di tutto, se $[c] = G^*([b])$ con $b \in Z^k(B)$, abbiamo $db = O$ e quindi la costruzione del morfismo di connessione implica subito che $d^*[c] = O$, cioè $\operatorname{Im} G^* \subseteq \operatorname{Ker} d^*$. Viceversa, se $[c] \in H^k(C)$ è tale che $d^*[c] = O$, necessariamente si deve avere $c = G(b)$ con $b \in Z^k(B)$; quindi $[c] = G^*([b])$, per cui $\operatorname{Ker} d^* \subseteq \operatorname{Im} G^*$, come voluto.

Esattezza in $H^{k+1}(A)$: se $[a] = d^*[c] \in H^{k+1}(A)$, per costruzione abbiamo $F(a) \in B^{k+1}(B)$, cioè $F^*([a]) = O$ e $\operatorname{Im} d^* \subseteq \operatorname{Ker} F^*$. Infine, prendiamo $[a] \in H^{k+1}(A)$ tale che $F^*([a]) = O$. Questo vuol dire che se $a \in Z^{k+1}(A)$ è un rappresentante di $[a]$, abbiamo $F(a) = db$ per un opportuno $b \in B^k$. Sia $c = G(b)$; siccome $dc = dG(b) = G(db) = G\bigl(F(a)\bigr) = O$, abbiamo $c \in Z^k(C)$, e per costruzione $d^*[c] = [a]$. Quindi $\operatorname{Ker} F^* \subseteq \operatorname{Im} d^*$, e abbiamo finito. □

Osservazione 4.1.12. La tecnica utilizzata in questa dimostrazione si chiama *inseguimento nel diagramma* (in inglese, *diagram chasing*).

Definizione 4.1.13. La successione (4.3) è detta *successione esatta lunga in coomologia* indotta dalla successione esatta corta (4.2), e il morfismo d^* è chiamato *morfismo di connessione.*

Definizione 4.1.14. Siano F, $G\colon A \to B$ due morfismi di cocatene. Diremo che F e G sono *omotopi* se esiste un *operatore d'omotopia* fra F e G, cioè un morfismo graduato $K\colon A \to B$ di grado -1 tale che

$$F - G = d_B \circ K \pm K \circ d_A \ .$$

Proposizione 4.1.15. *Due morfismi di cocatene omotopi inducono lo stesso morfismo in coomologia.*

Dimostrazione. Sia $K\colon A \to B$ un operatore d'omotopia fra due morfismi di cocatene F, $G\colon A \to B$. Se $a \in Z^k(A)$ abbiamo

$$F(a) = G(a) + (d_B \circ K \pm K \circ d_A)(a) = G(a) + d_B\bigl(K(a)\bigr) \ ,$$

per cui $[F(a)] = [G(a)]$. □

Corollario 4.1.16. *Sia (A, d) un complesso differenziale tale che esista un morfismo graduato $K\colon A \to A$ di grado -1 tale che $d \circ K \pm K \circ d = \mathrm{id}$. Allora $H^\bullet(A) = O$.*

Dimostrazione. Infatti K è un operatore di omotopia fra l'identità e il morfismo nullo, e la tesi segue dalla Proposizione 4.1.15. □

Un ultimo risultato generale molto utile è il seguente:

Lemma 4.1.17 (dei cinque). *Sia dato il seguente diagramma commutativo di morfismi con le righe esatte:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\ A' \arrow[r, "f'_1"'] & B' \arrow[r, "f'_2"'] & C' \arrow[r, "f'_3"'] & D' \arrow[r, "f'_4"'] & E' \end{tikzcd}$$

Supponiamo che β e δ siano degli isomorfismi. Allora:

(i) *se α è surgettivo allora γ è iniettivo.*

(ii) *se ϵ è iniettivo allora γ è surgettivo.*

In particolare, se α, β, δ ed ϵ sono degli isomorfismi, anche γ è un isomorfismo.

Dimostrazione. (i) Sia $c \in C$ tale che $\gamma(c) = O$. Essendo il diagramma commutativo, abbiamo $\delta\big(f_3(c)\big) = f'_3\big(\gamma(c)\big) = O$; siccome δ è un isomorfismo, otteniamo $f_3(c) = O$. L'esattezza della riga superiore implica $c = f_2(b)$ per qualche $b \in B$; inoltre $O = \gamma\big(f_2(b)\big) = f'_2\big(\beta(b)\big)$. L'esattezza della riga inferiore ci dice che esiste $a' \in A'$ tale che $\beta(b) = f'_1(a')$. Essendo α surgettivo, troviamo $a \in A$ tale che $a' = \alpha(a)$; quindi $\beta(b) = f'_1\big(\alpha(a)\big) = \beta\big(f_1(a)\big)$. Ma β è un isomorfismo; quindi $b = f_1(a)$ e $c = f_2(b) = f_2\big(f_1(a)\big) = O$ per l'esattezza della riga superiore, per cui γ è iniettivo.

(ii) Sia $c' \in C'$. Essendo δ un isomorfismo, esiste un unico $d \in D$ tale che $\delta(d) = f'_3(c')$. La commutatività del diagramma e l'esattezza della riga inferiore ci dicono che $\epsilon\big(f_4(d)\big) = f'_4\big(\delta(d)\big) = f'_4\big(f'_3(c')\big) = O$; essendo ϵ iniettivo, troviamo $f_4(d) = O$. Quindi esiste $c \in C$ tale che $f_3(C) = D$. Applicando di nuovo la commutatività del diagramma troviamo $f'_3(c') = \delta(d) = \delta\big(f_3(c)\big) = f'_3\big(\gamma(c)\big)$; quindi $c' - \gamma(c) \in \operatorname{Ker} f'_3$. L'esattezza ci dice che esiste $b' \in B'$ tale che $f'_2(b') = c' - \gamma(c)$; essendo β un isomorfismo troviamo $b \in B$ tale che $b' = \beta(b)$. Infine, la commutatività del diagramma assicura che $\gamma\big(f_2(b)\big) = f'_2\big(\beta(b)\big) = f'_2(b') = c' - \gamma(c)$, per cui $c' = \gamma\big(c + f_2(b)\big)$, e γ è surgettiva. □

4.2 La successione di Mayer-Vietoris

Un esempio di utilizzo della successione esatta lunga di coomologia è la successione di Mayer-Vietoris, uno degli strumenti più utili per il calcolo della coomologia.

Sia $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ un ricoprimento aperto di una varietà M composto di due soli aperti $U_0, U_1 \subseteq M$. Indichiamo con $U_0 \bigsqcup U_1$ l'unione disgiunta di U_0 e U_1, con $\iota_j \colon U_0 \cap U_1 \to U_0 \bigsqcup U_1$ l'inclusione di $U_0 \cap U_1$ in U_j (con $j = 0, 1$), e con $\jmath \colon U_0 \bigsqcup U_1 \to M$ l'inclusione. Abbiamo quindi una successione di inclusioni

$$M \xleftarrow{\jmath} U_0 \bigsqcup U_1 \underset{\iota_1}{\overset{\iota_0}{\leftleftarrows}} U_0 \cap U_1$$

che induce una successione di restrizioni di forme

$$A^\bullet(M) \xrightarrow{\jmath^*} A^\bullet(U_0) \oplus A^\bullet(U_1) \underset{\iota_1^*}{\overset{\iota_0^*}{\rightrightarrows}} A^\bullet(U_0 \cap U_1) .$$

Prendendo la differenza degli ultimi due morfismi otteniamo la *successione di Mayer-Vietoris:*

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & A^\bullet(M) & \xrightarrow{\jmath^*} & A^\bullet(U_0) \oplus A^\bullet(U_1) & \xrightarrow{\iota_1^* - \iota_0^*} & A^\bullet(U_0 \cap U_1) & \longrightarrow & O \\ & & & & (\omega, \tau) & \longmapsto & \tau - \omega & & \end{array} \tag{4.4}$$

Teorema 4.2.1. *Sia* $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ *un ricoprimento aperto di una varietà* M*. Allora la successione di Mayer-Vietoris* (4.4) *è esatta, e quindi induce una successione esatta lunga in coomologia*

$$\cdots \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U_0) \oplus H^k(U_1) \to H^k(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots \tag{4.5}$$

Dimostrazione. L'esattezza di (4.4) è evidente tranne all'ultimo punto. Sia $\{\rho_0, \rho_1\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$. Data $\omega \in A^\bullet(U_0 \cap U_1)$, notiamo che $\rho_1\omega$ è ben definita come forma su U_0; analogamente $\rho_0\omega \in A^\bullet(U_1)$. Infine

$$(\iota_1^* - \iota_0^*)(-\rho_1\omega, \rho_0\omega) = (\rho_0 + \rho_1)\omega = \omega ,$$

per cui (4.4) è esatta. L'ultima affermazione segue dal Teorema 4.1.11. □

Osservazione 4.2.2. Calcoliamo esplicitamente il morfismo di connessione d^* in (4.5). Sia $\{\rho_0, \rho_1\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\{U_0, U_1\}$, e sia $[\omega] \in H^k(U_0 \cap U_1)$ rappresentata dalla forma chiusa $\omega \in Z^k(U_0 \cap U_1)$. La forma ω è immagine tramite $\iota_1^* - \iota_0^*$ della coppia $(-\rho_1\omega, \rho_0\omega)$, il cui differenziale esterno è $\big(-\mathrm{d}(\rho_1\omega), \mathrm{d}(\rho_0\omega)\big)$. Notiamo che

$$\mathrm{d}(\rho_j\omega) = \mathrm{d}\rho_j \wedge \omega$$

in quanto ω è chiusa, e che $\mathrm{d}\rho_0 + \mathrm{d}\rho_1 \equiv O$ in $U_0 \cap U_1$; quindi

$$d^*[\omega] = \begin{cases} -[\mathrm{d}\rho_1 \wedge \omega] & \text{in } U_0 , \\ [\mathrm{d}\rho_0 \wedge \omega] & \text{in } U_1 . \end{cases}$$

In particolare, il supporto di $d^*[\omega]$ è contenuto in $U_0 \cap U_1$.

Esempio 4.2.3. Calcoliamo la coomologia di $\mathbb{R}$. Le 0-forme sono funzioni. L'unica 0-forma esatta è la funzione nulla; una 0-forma f è chiusa se e solo se $\mathrm{d}f \equiv 0$, cioè se e solo se è costante. Quindi $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Le 1-forme su $\mathbb{R}$ sono tutte (banalmente) chiuse; vogliamo mostrare che sono anche esatte. Infatti, data $\omega = f\,\mathrm{d}x \in A^1(\mathbb{R})$, poniamo

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

allora si vede subito che $\mathrm{d}g = \omega$. Riassumendo,

$$H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0\ , \\ O & \text{se } k > 0\ . \end{cases}$$

Osservazione 4.2.4. Il ragionamento fatto all'inizio dell'esempio precedente mostra che $H^0(M) = \mathbb{R}^c$ per ogni varietà M, dove $c \geq 1$ è il numero di componenti connesse di M.

Esempio 4.2.5. Calcoliamo la coomologia di S^1. Grazie all'osservazione precedente abbiamo $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. Sia $\{U_0, U_1\}$ il ricoprimento aperto di S^1 dato da $U_0 = (-1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)$ e $U_1 = (1/2 - \varepsilon, 3/2 + \varepsilon)$, dove $\varepsilon \in (0, 1/2)$ e ovviamente stiamo identificando S^1 con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Siccome U_0 e U_1 sono diffeomorfi a $\mathbb{R}$, sappiamo che $H^0(U_j) = \mathbb{R}$ e $H^k(U_j) = O$ per $j = 0$, 1 e ogni $k > 0$. Inoltre $U_0 \cap U_1$ consiste di due intervalli aperti, per cui $H^0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{R}^2$ e $H^k(U_0 \cap U_1) = O$ per $k > 0$. La successione (4.5) diventa quindi

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\ \delta\ } \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\ d^*\ } H^1(S^1) \longrightarrow O$$

per cui $H^1(S^1) \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/\operatorname{Im}\delta$, dove $\delta\colon H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \to H^0(U_0 \cap U_1)$ è il morfismo indotto in coomologia da $\iota_1^* - \iota_0^*$. Chiaramente, $\delta(a, b) = (b - a, b - a)$; quindi $\dim \operatorname{Im}\delta = 1$. Riassumendo,

$$H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0,\ 1\ ; \\ O & \text{se } k > 1\ . \end{cases}$$

Possiamo anche trovare un generatore di $H^1(S^1)$. Sia $\alpha = (1, 0) \in H^0(U_0 \cap U_1)$; chiaramente $\alpha \notin \operatorname{Im}\delta$, per cui $d^*\alpha$ è un generatore di $H^1(S^1)$. Ricordando l'Osservazione 4.2.2, $d^*\alpha$ è rappresentato dalla 1-forma

$$\omega = \begin{cases} \mathrm{d}\rho_0 & \text{su } (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)\ , \\ O & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\{\rho_0, \rho_1\}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{U_0, U_1\}$.

4.3 Il teorema di Stokes

Per dimostrare il fondamentale teorema di Stokes dobbiamo introdurre il concetto di varietà con bordo.

Definizione 4.3.1. Il *semispazio superiore* $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione n è

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\} .$$

Il *bordo* $\partial\mathbb{H}^n$ di $\mathbb{H}^n$ è l'iperpiano $\{x^n = 0\}$; l'*interno* di $\mathbb{H}^n$ è $\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$.

Definizione 4.3.2. Una *varietà con bordo* di *dimensione* n è data da una coppia $(M, \mathcal{A})$, dove M è un insieme e $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è una famiglia di applicazioni bigettive $\varphi_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha$, dove V_α è un aperto di $\mathbb{H}^n$, compatibili a due a due e tali che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Se $V_\alpha \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \varnothing$ diremo che $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è una *n-carta di bordo;* se invece $V_\alpha \cap \partial\mathbb{H}^n = \varnothing$ diremo che $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è una *carta interna.* L'insieme dei punti $p \in M$ che appartengono a $\varphi_\alpha^{-1}(\partial\mathbb{H}^n)$ per una carta di bordo $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è il *bordo* ∂M di M; il complementare del bordo è detto *interno* della varietà con bordo M. A volte, le varietà nel senso della Definizione 2.1.5 sono dette *varietà senza bordo.*

Osservazione 4.3.3. Carte interne sono chiaramente carte locali nel senso visto finora. Quando parliamo di compatibilità fra due carte di bordo $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) intendiamo che $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sono aperti di $\mathbb{H}^n$ (non necessariamente di $\mathbb{R}^n$!) e che $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ è un diffeomorfismo di classe C^∞ come applicazione fra sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, e quindi ammette un'estensione C^∞ a un intorno aperto (in $\mathbb{R}^n$) di $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. In particolare, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è un'applicazione aperta, per cui manda il bordo nel bordo; di conseguenza (perché?) il bordo di una varietà con bordo è ben definito (cioè se $p \in \varphi_\alpha^{-1}(\partial\mathbb{H}^n)$ per qualche carta di bordo allora $p \in \varphi_\beta^{-1}(\partial\mathbb{H}^n)$ per tutte le carte di bordo in p). Inoltre, la restrizione di $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ a $\partial\mathbb{H}^n$ è ancora C^∞; quindi le restrizioni a ∂M delle carte di bordo formano un atlante di ∂M di dimensione $n-1$ (dove stiamo identificando $\partial\mathbb{H}^n$ con $\mathbb{R}^{n-1}$ nel modo ovvio); quindi ∂M ha una struttura naturale di varietà $(n-1)$-dimensionale.

Definizione 4.3.4. Un *atlante orientato* di una varietà con bordo è un atlante in cui i determinanti jacobiani dei cambiamenti di coordinate sono tutti positivi. Una varietà con bordo con un atlante orientato è detta *orientata.*

Vogliamo far vedere che il bordo di una varietà orientata è automaticamente orientato. Per farlo ci serve il seguente

Lemma 4.3.5. *Siano $U_0, U_1 \subseteq \mathbb{H}^n$ aperti di $\mathbb{H}^n$ con $\tilde{U}_j \neq \varnothing$ per $j = 0, 1$, dove $\tilde{U}_j = U_j \cap \partial\mathbb{H}^n$. Sia $F: U_0 \to U_1$ un diffeomorfismo con determinante jacobiano sempre positivo. Allora il determinante jacobiano di $\tilde{F} = F|_{\tilde{U}_0}: \tilde{U}_0 \to \tilde{U}_1$, visto come diffeomorfismo di aperti di $\mathbb{R}^{n-1}$, è sempre positivo*

Dimostrazione. Scriviamo $x = (x', x^n)$, con $x' = (x^1, \ldots, x^{n-1})$, e analogamente $F = (F', F^n)$, con $F' = (F^1, \ldots, F^{n-1})$; dunque $\tilde{F}(x') = F'(x', 0)$. Per ogni $(x', 0) \in U_0 \cap \partial\mathbb{H}^n$ abbiamo

$$0 < \det \operatorname{Jac} F(x', 0) = \det \begin{vmatrix} \operatorname{Jac} \tilde{F}(x') & \frac{\partial F'}{\partial x^n}(x', 0) \\ \frac{\partial F^n}{\partial x'}(x', 0) & \frac{\partial F^n}{\partial x^n}(x', 0) \end{vmatrix} .$$

Ora, $F(\tilde U_0)\subseteq \tilde U_1$ implica $F^n(x',0)\equiv 0$; quindi

$$0<\det \operatorname{Jac} F(x',0)=\frac{\partial F^n}{\partial x^n}(x',0)\cdot \det\operatorname{Jac}\tilde F(x')\ .$$

Infine, siccome F manda $U_0\cap\mathbb{H}^n$ in $U_1\cap\mathbb{H}^n$, otteniamo $\frac{\partial F^n}{\partial x^n}(x',0)>0$, e la tesi segue. □

Questo lemma ci assicura che l'atlante di ∂M indotto da un'atlante orientato di M è ancora orientato; possiamo quindi introdurre la seguente

Definizione 4.3.6. Sia M una varietà con bordo di dimensione n, orientata da un atlante orientato $\mathcal{A}$, e indichiamo con $\partial\mathcal{A}$ l'atlante orientato indotto da $\mathcal{A}$ su ∂M. L'*orientazione indotta* su ∂M è allora quella data da $\partial\mathcal{A}$ se n è pari, quella opposta se n è dispari.

Osservazione 4.3.7. La differenza di orientazione fra pari e dispari è necessaria per ottenere l'enunciato del teorema di Stokes senza segni.

Osservazione 4.3.8. Sia M una varietà con bordo, di dimensione n. È chiaramente possibile dare un senso anche allo spazio tangente a un punto del bordo di M, che però risulta essere uno spazio di dimensione $n-1$. Di conseguenza, una n-forma su M (pensata come applicazione n-lineare alternante applicata ai campi vettoriali) si annulla quando ristretta a ∂M. Invece, una $(n-1)$-forma su M ristretta a ∂M può essere non nulla. Inoltre, su una varietà orientata con bordo M possiamo definire l'integrale di una n-forma a supporto compatto esattamente come nel caso di varietà senza bordo (le dimostrazioni funzionano identiche); infine, se η è una $(n-1)$-forma su M, possiamo definire $\int_{\partial M}\eta$ come l'integrale su ∂M (orientato con l'orientazione indotta) della restrizione $\eta|_{\partial M}$.

Teorema 4.3.9 (Stokes). *Sia M una varietà orientata di dimensione n con bordo, e consideriamo ∂M con l'orientazione indotta. Sia ω una $(n-1)$-forma con supporto compatto in M. Allora*

$$\int_M \mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega\ . \tag{4.6}$$

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrarlo quando $M=\mathbb{R}^n$. Per linearità, e a meno di permutare le coordinate, possiamo supporre $\omega=f\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n-1}$. Quindi $\mathrm{d}\omega=(-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x^n}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$. Il teorema di Fubini allora ci dice che

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}\omega=(-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x^n}\,\mathrm{d}x^n\right)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{n-1}\ .$$

Ma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x^n}(x',x^n)\,\mathrm{d}x^n=\lim_{t\to+\infty}[f(x',t)-f(x',-t)]=0$$

perché f ha supporto compatto. Quindi $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\omega = 0$; essendo $\mathbb{R}^n$ senza bordo, abbiamo dimostrato (4.6) in questo caso.

Consideriamo ora il caso $M = \mathbb{H}^n$, e scriviamo

$$\omega = \sum_{j=1}^n g_j(x', x^n)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \ ,$$

dove l'accento circonflesso indica che quell'elemento è assente. Allora

$$\mathrm{d}\omega = \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{g_j}{\partial x^j}(x', x^n)\right] \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \ .$$

Ora, se $1 \le j \le n-1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} & \frac{\partial g_j}{\partial x^j}(x', x^n)\,\mathrm{d}x^j \\ &= \lim_{x^j \to +\infty} [g_j(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^n) - g_j(x^1, \ldots, -x^j, \ldots, x^n)] = 0\end{aligned}$$

perché g_j è a supporto compatto in $\mathbb{H}^n$. Quindi per $j = 1, \ldots, n-1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} & \frac{\partial g_j}{\partial x^j}(x', x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \\ = & \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g_j}{\partial x^j}(x', x^n)\,\mathrm{d}x^j\right) \mathrm{d}x^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x^j} \cdots \mathrm{d}x^{n-1}\right) \mathrm{d}x^n \\ = & \ 0 \ .\end{aligned}$$

Inoltre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_n}{\partial x^n}(x', x^n)\,\mathrm{d}x^n = \lim_{t \to +\infty} g_n(x', t) - g_n(x', 0) = -g_n(x', 0) \ ,$$

sempre perché g_n è a supporto compatto in $\mathbb{H}^n$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\omega &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial g_n}{\partial x^n}(x', x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_n}{\partial x^n}(x', x^n)\,\mathrm{d}x^n\right) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_n(x', 0)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1} = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega \ ,\end{aligned}$$

dove l'ultima eguaglianza segue dall'orientazione indotta su $\partial\mathbb{H}^n$ e dal fatto che ogni $(n-1)$-forma contenente $\mathrm{d}x^n$ si annulla identicamente su $\partial\mathbb{H}^n$.

Infine, sia M qualsiasi, e scegliamo un atlante orientato $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ con $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ per ogni α, e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{A}$. Scriviamo $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$; per linearità, basta quindi dimostrare

(4.6) per ciascun $\rho_\alpha\omega$, che è una forma a supporto compatto contenuto in U_α. Ma allora

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{d}(\rho_\alpha\omega) &= \int_{U_\alpha} \mathrm{d}(\rho_\alpha\omega) = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi^{-1})^*\mathrm{d}(\rho_\alpha\omega) \\ &= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \mathrm{d}(\varphi^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) = \int_{\partial\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) \\ &= \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\partial M)} (\varphi^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) = \int_{\partial M} \rho_\alpha\omega \;,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato (4.6) per $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{H}^n$. □

Osservazione 4.3.10. In $\mathbb{R}^2$, se $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ allora $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, per cui il classico Teorema di Gauss-Green diventa un caso particolare del Teorema di Stokes.

In $\mathbb{R}^3$, se $\omega = f_3\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 + f_1\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 + f_2\,\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1$ è una 2-forma allora $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$; quindi identificando ω con il campo vettoriale di coordinate (f_1, f_2, f_3) vediamo che anche il classico teorema della divergenza è un caso particolare del teorema di Stokes.

Osservazione 4.3.11. Se f è una funzione C^∞ in un aperto di $\mathbb{R}^3$, allora $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3$, per cui in un certo senso (saremo più precisi quando introdurremo le metriche Riemanniane) possiamo identificare $\mathrm{d}f$ con il gradiente di f. Viceversa, a un campo vettoriale $X = (f_1, f_2, f_3)$ possiamo associare la 1-forma $\eta = f_1\,\mathrm{d}x^1 + f_2\,\mathrm{d}x^2 + f_3\,\mathrm{d}x^3$. In questo caso abbiamo $\mathrm{d}\eta = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}\right)\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1$, per cui $\mathrm{d}\eta$ rappresenta il rotore del campo X. Infine, se al campo X associamo anche la 2-forma $\omega = f_3\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 + f_1\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 + f_2\,\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1$, allora $\mathrm{d}\omega$ rappresenta chiaramente la divergenza di X.

In particolare, la relazione $d\circ d = O$ ha come casi particolari i fatti ben noti che il rotore di un gradiente o la divergenza di un rotore sono identicamente nulli.

4.4 Il lemma di Poincaré

In questa sezione calcoleremo la coomologia di $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 0$, come conseguenza della seguente proposizione:

Proposizione 4.4.1. *Sia M una varietà. Indichiamo con $\pi\colon M\times\mathbb{R}\to M$ la proiezione sul primo fattore, e con $\sigma\colon M\to M\times\mathbb{R}$ la sezione $\sigma(p) = (p, t_0)$, dove $t_0\in\mathbb{R}$ è fissato. Allora $\pi^*\colon H^\bullet(M)\to H^\bullet(M\times\mathbb{R})$ è un isomorfismo, con inversa data da $\sigma^*\colon H^\bullet(M\times\mathbb{R})\to H^\bullet(M)$.*

Dimostrazione. Da $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}$ segue subito $\sigma^*\circ\pi^*=\mathrm{id}$; dobbiamo dimostrare che $\pi^*\circ\sigma^*=\mathrm{id}$ a livello di coomologia, tenendo presente che $\sigma\circ\pi\neq\mathrm{id}$ e che $\pi^*\circ\sigma^*\neq\mathrm{id}$ al livello delle forme. Per avere la tesi costruiremo allora un operatore d'omotopia fra id e $\pi^*\circ\sigma^*$, e applicheremo la Proposizione 4.1.15.

Ogni forma differenziale in $M\times\mathbb{R}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei seguenti due tipi di forme:

$$f\,\pi^*\eta \qquad \text{e} \qquad f\,\pi^*\eta\wedge \mathrm{d}t\;,$$

dove $f\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$ e $\eta\in A^\bullet(M)$. Per ogni $k\geq 0$ definiamo allora $K\colon A^k(M\times\mathbb{R})\to A^{k-1}(M\times\mathbb{R})$ ponendo

$$K(f\,\pi^*\eta)=O \qquad \text{e} \qquad K(f\,\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t)=(-1)^{k-1}\left(\int_{t_0}^s f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\eta\;;$$

dobbiamo verificare che K è un operatore d'omotopia.

Cominciamo con $\omega\in A^k(M\times\mathbb{R})$ della forma $\omega=f\,\pi^*\eta$ con $\eta\in A^k(M)$. Prima di tutto notiamo che possiamo scrivere

$$\mathrm{d}f=\psi+\frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t\;,$$

dove ψ in coordinate locali è data da $\psi=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^j}\,\pi^*(\mathrm{d}x^j)$, e quindi è combinazione lineare di forme del primo tipo. Quindi

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}K-K\mathrm{d})\omega&=-K\mathrm{d}\omega=-K\left(f\mathrm{d}(\pi^*\eta)+\mathrm{d}f\wedge\pi^*\eta\right)\\&=-K\left(f\pi^*(\mathrm{d}\eta)+\psi\wedge\pi^*\eta+(-1)^k\frac{\partial f}{\partial t}\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t\right)\\&=\left(\int_{t_0}^s\frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\eta=f\,\pi^*\eta-f(\cdot,t_0)\pi^*\eta\\&=(\mathrm{id}-\pi^*\circ\sigma^*)\omega\;,\end{aligned}$$

per cui in questo caso ci siamo.

Prendiamo adesso $\omega=f\,\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t$ con $\eta\in A^{k-1}(M)$. Notando che $\sigma^*(\mathrm{d}t)=\mathrm{d}(\sigma^*t)=\mathrm{d}(t\circ\sigma)=\mathrm{d}t_0=O$ e che

$$\begin{aligned}\mathrm{d}K\omega&=(-1)^{k-1}\mathrm{d}\left[\left(\int_{t_0}^s f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\eta\right]\\&=K(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t)+\omega+(-1)^{k-1}\left(\int_{t_0}^s f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\pi^*\eta\;,\end{aligned}$$

troviamo

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}K-K\mathrm{d})\omega&=\mathrm{d}K\omega-K(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t+f\mathrm{d}(\pi^*\eta)\wedge\mathrm{d}t)\\&=K(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t)+\omega+(-1)^{k-1}\left(\int_{t_0}^s f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\pi^*\eta\\&\quad-K(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t)-(-1)^{k-1}\left(\int_{t_0}^s f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\pi^*\eta\\&=\omega=(\mathrm{id}-\pi^*\circ s^*)\omega\;,\end{aligned}$$

e ci siamo. □

Corollario 4.4.2 (Lemma di Poincaré). *La coomologia di* $\mathbb{R}^n$ *è data da*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{se } k = 0\ , \\ O & \textit{se } k > 0\ . \end{cases}$$

Dimostrazione. Segue subito dall'Esempio 4.2.3 e dalla Proposizione 4.4.1, ragionando per induzione su n. □

Esempio 4.4.3. La coomologia di S^n. Scriviamo $S^n = U_0 \cup U_1$, dove

$$U_0 = \{x \in S^n \mid x^{n+1} > -\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{e} \qquad U_1 = \{x \in S^n \mid x^{n+1} < \varepsilon\}$$

per qualche $\varepsilon > 0$. Nota che $U_0 \cap U_1$ è diffeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$; quindi la Proposizione 4.4.1 implica $H^\bullet(U_0 \cap U_1) = H^\bullet(S^{n-1})$. Inoltre U_0 e U_1 sono diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$, per cui $H^\bullet(U_0) = H^\bullet(U_1) = H^\bullet(\mathbb{R}^n)$. La successione di Mayer-Vietoris

$$H^k(U_0) \oplus H^k(U_1) \to H^k(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(S^n) \longrightarrow H^{k+1}(U_0) \oplus H^{k+1}(U_1)$$

diventa

$$O \longrightarrow H^k(S^{n-1}) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(S^n) \longrightarrow O$$

per $k \geq 1$ e

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\iota_1^* - \iota_0^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H^1(S^n) \longrightarrow O$$

per $k = 1$, dove $(\iota_1^* - \iota_0^*)(\lambda, \mu) = \mu - \lambda$, per cui $\iota_1^* - \iota_0^*$ è surgettiva. L'esattezza di questa successione implica allora (perché?) $H^1(S^n) = O$, mentre la successione precedente ci dice che $H^k(S^n) = H^{k-1}(S^{n-1})$ per ogni $k \geq 2$. Ragionando per induzione e usando l'Esempio 4.2.5 otteniamo quindi

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0,\ n\ , \\ O & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostriamo ora un'altra proprietà importante della coomologia di de Rham: l'invarianza per omotopia.

Definizione 4.4.4. Un'*omotopia liscia* fra due applicazioni differenziabili F_0, $F_1\colon M \to N$ è un'applicazione differenziabile $H\colon M \times \mathbb{R} \to N$ tale che $F_0 = H(\cdot, 0)$ e $F_1 = H(\cdot, 1)$. In tal caso diremo che F_0 e F_1 sono C^∞*-omotope.*

Proposizione 4.4.5. *Due applicazioni* C^∞*-omotope inducono lo stesso morfismo in coomologia.*

Dimostrazione. Sia $H: M \times \mathbb{R} \to N$ un'omotopia liscia fra due applicazioni differenziabili F_0, $F_1: M \to N$. Indichiamo con $\pi: M \times \mathbb{R} \to M$ la proiezione sul primo fattore, e con σ_0, $\sigma_1: M \to M \times \mathbb{R}$ le sezioni $\sigma_j(p) = (p, j)$ per $j = 0$, 1. Notiamo che $\sigma_0^* = \sigma_1^*$ in coomologia, in quanto (Proposizione 4.4.1) sono entrambe uguali a $(\pi^*)^{-1}$; inoltre, $F_j = H \circ \sigma_j$ per $j = 0$, 1. Quindi

$$F_0^* = (H \circ \sigma_0)^* = \sigma_0^* \circ H^* = \sigma_1^* \circ H^* = (H \circ \sigma_1)^* = F_1^* \, .$$

□

Definizione 4.4.6. Diremo che due varietà M e N sono C^∞*-omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni differenziabili $F: M \to N$ e $G: N \to M$ tali che $F \circ G$ e $G \circ F$ siano C^∞-omotope all'identità di N, rispettivamente M. Una varietà C^∞-omotopicamente equivalente a un punto è detta C^∞*-contraibile.*

Osservazione 4.4.7. Si può dimostrare che due varietà sono C^∞-omotopicamente equivalenti se e solo se sono topologicamente omotopicamente equivalenti (cioè tramite omotopie solo continue). Questo perché ogni applicazione continua fra due varietà è topologicamente omotopa a un'applicazione differenziabile (vedi l'Esercizio **??**).

Definizione 4.4.8. Una *retrazione liscia* di una varietà M su una sottovarietà S è un'applicazione differenziabile $r: M \to S$ che sia l'identità su S, cioè tale che $r \circ \iota: S \to S$ sia l'identità di S, dove $\iota: S \to M$ è l'inclusione. Se esiste una retrazione liscia r di M su S diremo che S è un *retratto liscio* di M. Se inoltre la composizione $\iota \circ r: M \to M$ è C^∞-omotopa all'identità di M diremo che S è un *retratto di deformazione liscio* di M. Chiaramente in questo caso M e S sono C^∞-omotopicamente equivalenti.

Corollario 4.4.9. *Due varietà C^∞-omotopicamente equivalenti hanno uguale coomologia di de Rham. In particolare, se S è un retratto di deformazione di M allora $H^\bullet(M) = H^\bullet(S)$.*

Dimostrazione. Segue subito dalla Proposizione 4.4.5. □

Corollario 4.4.10. *Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M. Allora $H^\bullet(E) = H^\bullet(M)$.*

Dimostrazione. Identifichiamo M con l'immagine della sezione nulla; per il precedente corollario ci basta dimostrare che la sezione nulla è un retratto di deformazione di E. Sia $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\rho|_{(-\infty,0]} \equiv 0$, $\rho|_{[1,+\infty)} \equiv 1$, e $\rho|_{[0,1]}: [0,1] \to [0,1]$ è un diffeomorfismo. Definiamo $H: E \times \mathbb{R} \to E$ ponendo $H(v,t) = \rho(t)v$; si vede subito che H è un'omotopia liscia fra $\iota \circ r$ e l'identità, dove $r(v) = O_{\pi(v)}$ è la retrazione ovvia di E sulla sezione nulla, e ι è l'inclusione della sezione nulla in E. □

4.5 Coomologia a supporto compatto

Introduciamo ora un altro tipo di coomologia.

Definizione 4.5.1. Sia M una varietà. Il *supporto* $\mathrm{supp}(\omega)$ di una forma $\omega \in A^\bullet(M)$ è la chiusura dell'insieme dei $p \in M$ per cui $\omega_p \neq O$. Indichiamo con $A^\bullet_c(M) \subseteq A^\bullet(M)$ l'insieme delle forme a supporto compatto in M. A volte scriveremo $C^\infty_c(M)$ al posto di $A^0_c(M)$.

La restrizione $\mathrm{d}\colon A^\bullet_c(M) \to A^\bullet_c(M)$ del differenziale esterno ad $A^\bullet_c(M)$ è chiaramente ancora un differenziale sul complesso graduato $A^\bullet_c(M)$. Poniamo $Z^\bullet_c(M) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}|_{A^\bullet_c(M)}$ e $B^\bullet_c(M) = \mathrm{Im}\,\mathrm{d}|_{A^\bullet_c(M)}$; la corrispondente coomologia $H^\bullet_c(M) = Z^\bullet_c(M)/B^\bullet_c(M)$ è detta *coomologia a supporto compatto* di M.

Osservazione 4.5.2. Chiaramente $H^\bullet_c(M) = H^\bullet(M)$ per ogni varietà compatta M; ma su varietà non compatte le due coomologie possono essere diverse. Infatti, una forma a supporto compatto è chiusa se e solo se è chiusa come forma *tout-court,* cioè $Z^\bullet_c(M) = Z^\bullet(M) \cap A^\bullet_c(M)$; ma una forma a supporto compatto esatta come forma non è detto che sia esatta come forma a supporto compatto, in quanto potrebbe essere il differenziale esterno solo di forme *non* a supporto compatto. In particolare, $B^\bullet_c(M)$ potrebbe essere diverso da $B^\bullet(M) \cap A^\bullet_c(M)$.

Esempio 4.5.3. Calcoliamo la coomologia a supporto compatto di $\mathbb{R}$. Le 0-forme sono funzioni. L'unica 0-forma esatta è la funzione nulla; una 0-forma f è chiusa se e solo se $\mathrm{d}f \equiv 0$, cioè se e solo se è costante. Ma l'unica funzione costante a supporto compatto in $\mathbb{R}$ è la funzione nulla; quindi $H^0_c(\mathbb{R}) = O$.

Le 1-forme a supporto compatto su $\mathbb{R}$ sono tutte (banalmente) chiuse; vogliamo capire quando sono esatte come forme a supporto compatto. Supponiamo che $\omega = \mathrm{d}f$, con $f \in A^0_c(\mathbb{R})$; allora

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t = 0 ,$$

perché f è a supporto compatto. Quindi l'integrale su $\mathbb{R}$ definisce un'applicazione lineare $\int_{\mathbb{R}}\colon H^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, chiaramente surgettiva; dimostriamo che è anche iniettiva. Sia $\omega = g\,\mathrm{d}t \in A^1_c(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$. Allora $g \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ ha supporto compatto, contenuto diciamo nell'intervallo $[a, b]$. Poniamo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s ;$$

essendo $\int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}t = 0$, segue che f ha supporto compatto contenuto in $[a, b]$, e chiaramente $\mathrm{d}f = \omega$. Quindi $\int_{\mathbb{R}}\colon H^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un isomorfismo, e in particolare $H^1_c(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Riassumendo,

$$H^k_c(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 1 , \\ O & \text{se } k \neq 1 . \end{cases}$$

Nota che il generatore naturale di $H^1_c(\mathbb{R})$ è rappresentato da una qualsiasi 1-forma a supporto compatto con integrale 1.

Osservazione 4.5.4. Il ragionamento fatto all'inizio dell'esempio precedente mostra che $H^0_c(M) = \mathbb{R}^c$ per ogni varietà M, dove $c \geq 0$ è il numero di componenti connesse *compatte* di M.

Vogliamo ora introdurre una successione di Mayer-Vietoris per la coomologia a supporto compatto. Lo strumento principale è l'operatore di estensione, che non era disponibile per la coomologia usuale.

Definizione 4.5.5. Sia $U \subseteq M$ un aperto di una varietà M, e indichiamo con $j\colon U \hookrightarrow M$ l'inclusione. L'*operatore di estensione* $j_*\colon A^\bullet_c(U) \to A^\bullet_c(M)$ è l'operatore che associa a una forma ω a supporto compatto in U la forma $j_*\omega$ a supporto compatto in M ottenuta estendendo a zero ω fuori da U.

Sia $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ un ricoprimento aperto di una varietà M composto di due soli aperti $U_0, U_1 \subseteq M$. Usando l'operatore di estensione possiamo definire la *successione di Mayer-Vietoris a supporto compatto*

$$O \longleftarrow A^\bullet_c(M) \xleftarrow{s_*} A^\bullet_c(U_0) \oplus A^\bullet_c(U_1) \xleftarrow{\delta} A^\bullet_c(U_0 \cap U_1) \longleftarrow O , \qquad (4.7)$$

dove $s_*\colon A^\bullet_c(U_0) \oplus A^\bullet_c(U_1) \to A^*_c(M)$ è definita da $s_*(\omega_0, \omega_1) = j_*\omega_0 + j_*\omega_1$, e $\delta\colon A^\bullet_c(U_0 \cap U_1) \to A^\bullet_c(U_0) \oplus A^\bullet_c(U_1)$ è definita da $\delta(\eta) = (-j_*\eta, j_*\eta)$.

Teorema 4.5.6. *Sia $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ un ricoprimento aperto di una varietà M. Allora la successione di Mayer-Vietoris a supporto compatto* (4.7) *è esatta, e quindi induce una successione esatta lunga in coomologia*

$$\cdots \longleftarrow H^k_c(M) \longleftarrow H^k_c(U_0) \oplus H^k_c(U_1) \leftarrow H^k_c(U_0 \cap U_1) \xleftarrow{d_*} H^{k-1}_c(M) \longleftarrow \cdots \qquad (4.8)$$

Dimostrazione. L'esattezza di (4.7) è evidente tranne al primo punto. Sia $\{\rho_0, \rho_1\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$. Data $\omega \in A^\bullet_c(M)$, notiamo che $\rho_0\omega$ è ben definita come forma a supporto compatto in U_0; analogamente $\rho_1\omega \in A^\bullet_c(U_0)$. Inoltre,

$$s_*(\rho_0\omega, \rho_1\omega) = (\rho_0 + \rho_1)\omega = \omega ,$$

per cui (4.7) è esatta. L'ultima affermazione segue dal Teorema 4.1.11. □

Osservazione 4.5.7. Calcoliamo esplicitamente il morfismo di connessione d_* in (4.8). Sia $\{\rho_0, \rho_1\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\{U_0, U_1\}$, e sia $[\omega] \in H^{k-1}_c(M)$ rappresentata dalla forma chiusa $\omega \in Z^{k-1}_c(M)$. La forma ω è immagine tramite s_* della coppia $(\rho_0\omega, \rho_1\omega)$, il cui differenziale esterno è $\big(\mathrm{d}(\rho_0\omega), \mathrm{d}(\rho_1\omega)\big)$. Notiamo che

$$\mathrm{d}(\rho_j\omega) = \mathrm{d}\rho_j \wedge \omega$$

in quanto ω è chiusa, e che $\mathrm{d}\rho_j \equiv O$ in $M \setminus (U_0 \cap U_1)$; quindi le forme $\mathrm{d}(\rho_j\omega)$ sono a supporto compatto in $U_0 \cap U_1$, e $\mathrm{d}(\rho_0\omega) = -\mathrm{d}(\rho_1\omega)$ in $U_0 \cap U_1$. Dunque $d_*[\omega]$ è rappresentato dalla forma chiusa $\tau \in A_c^\bullet(U_0 \cap U_1)$ data da

$$\tau = \mathrm{d}\rho_1 \wedge \omega = -\mathrm{d}\rho_0 \wedge \omega \; .$$

Per arrivare a calcolare la coomologia a supporto compatto di $\mathbb{R}^n$ ci serve un risultato analogo alla Proposizione 4.4.1:

Proposizione 4.5.8. *Per ogni varietà M, i gruppi di coomologia a supporto compatto $H_c^\bullet(M \times \mathbb{R})$ e $H_c^{\bullet-1}(M)$ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Iniziamo definendo un morfismo $e_*\colon H_c^\bullet(M) \to H_c^{\bullet+1}(M \times \mathbb{R})$. Sia $e = e(t)\,\mathrm{d}t \in A_c^1(\mathbb{R})$ un generatore della coomologia a supporto compatto di $\mathbb{R}$; per quanto visto nell'Esempio 4.5.3 questo vuol dire che $e \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} e(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Definiamo $e_\#\colon A_c^\bullet(M) \to A_c^{\bullet+1}(M \times \mathbb{R})$ ponendo

$$e_\#(\eta) = \eta \wedge e \; .$$

Essendo e una forma chiusa, $\mathrm{d} \circ e_\# = e_\# \circ \mathrm{d}$, per cui $e_\#$ induce un morfismo graduato in coomologia $e_*\colon H_c^\bullet(M) \to H_c^{\bullet+1}(M \times \mathbb{R})$.

Per trovare un morfismo in direzione opposta, notiamo che ogni forma differenziale a supporto compatto in $M \times \mathbb{R}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei seguenti due tipi di forme:

$$f\,\pi^*\eta \qquad \text{e} \qquad f\,\pi^*\eta \wedge \mathrm{d}t \; ,$$

con $f \in C_c^\infty(M \times \mathbb{R})$ e $\eta \in A^\bullet(M)$, dove $\pi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ è la proiezione sul primo fattore. Definiamo $\pi_\#\colon A_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \to A_c^{\bullet-1}(M)$ ponendo

$$\pi_\#(f\,\pi^*\eta) = O \qquad \text{e} \qquad \pi_\#(f\,\pi^*\eta \wedge \mathrm{d}t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\eta \; .$$

Prima di tutto osserviamo che $\pi_\#$ commuta con d. Infatti, notiamo che possiamo scrivere

$$\mathrm{d}f = \psi + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t \; ,$$

dove ψ in coordinate locali è data da $\psi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\pi^*(\mathrm{d}x^j)$, e quindi è combinazione lineare di forme del primo tipo. Dunque se $f\pi^*\eta \in A_c^k(M \times \mathbb{R})$ è una forma del primo tipo otteniamo

$$\begin{aligned}\pi_\#\bigl(\mathrm{d}(f\,\pi^*\eta)\bigr) &= \pi_\#(\psi \wedge \pi^*\eta) + (-1)^k \pi_\#\left(\frac{\partial f}{\partial t}\pi^*\eta \wedge \mathrm{d}t\right)\\ &= (-1)^k \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\eta = O = \mathrm{d}\pi_\#(f\,\pi^*\eta) \; ,\end{aligned}$$

in quanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\bigl(f(p,t) - f(p,-t)\bigr) = 0 \tag{4.9}$$

perché f è a supporto compatto. Analogamente, se $\omega = f\,\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t \in A_c^k(M\times\mathbb{R})$ è una forma del secondo tipo, otteniamo

$$\begin{aligned}\pi_\#(\mathrm{d}\omega) &= \pi_\#(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t + f\pi^*\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}t)\\ &= \mathrm{d}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\cdot,t)\,\mathrm{d}t\right)\wedge\eta + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\pi_\#(\omega)\;.\end{aligned}$$

Quindi $\pi_\#\circ\mathrm{d} = \mathrm{d}\circ\pi_\#$, e, come preannunciato, $\pi_\#$ induce un morfismo graduato in coomologia $\pi_*\colon H_c^\bullet(M\times\mathbb{R})\to H_c^{\bullet-1}(M)$.

Vogliamo dimostrare che e_* e π_* sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro. Per costruzione, $\pi_\#\circ e_\# = \mathrm{id}$, e quindi $\pi_*\circ e_* = \mathrm{id}$. Dunque per far vedere che $e_*\circ\pi_* = \mathrm{id}$, ci basta costruire un operatore di omotopia $K\colon A_c^\bullet(M\times\mathbb{R})\to A_c^{\bullet-1}(M\times\mathbb{R})$ fra id e $e_\#\circ\pi_\#$.

Per ogni $k\ge 0$ definiamo $K\colon A^k(M\times\mathbb{R})\to A^{k-1}(M\times\mathbb{R})$ ponendo $K(f\,\pi^*\eta) = O$ e

$$K(f\,\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t) = (-1)^{k-1}\left(\int_{-\infty}^{s} f(p,t)\,\mathrm{d}t - E(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\eta\;,$$

dove

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} e(s)\,\mathrm{d}s\;;$$

dobbiamo verificare che K è un operatore d'omotopia.

Cominciamo con $\omega\in A^k(M\times\mathbb{R})$ della forma $\omega = f\,\pi^*\eta$ con $\eta\in A^k(M)$. Allora

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}K - K\mathrm{d})\omega &= -K\mathrm{d}\omega = -K\left(f\mathrm{d}(\pi^*\eta) + \mathrm{d}f\wedge\pi^*\eta\right)\\ &= -K\left(f\pi^*(\mathrm{d}\eta) + \psi\wedge\pi^*\eta + (-1)^k\frac{\partial f}{\partial t}\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t\right)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{s}\frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\eta = f\,\pi^*\eta = \omega\\ &= (\mathrm{id} - e_\#\circ\pi_\#)\omega\;,\end{aligned}$$

per cui in questo caso ci siamo.

Prendiamo adesso $\omega = f\,\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t$ con $\eta\in A^{k-1}(M)$. Allora

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} - e_\#\circ\pi_\#)\omega &= f\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\wedge e\;;\\ \mathrm{d}K\omega &= (-1)^{k-1}\mathrm{d}\left[\left(\int_{-\infty}^{s} f(p,t)\,\mathrm{d}t - E(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\eta\right]\\ &= (-1)^{k-1}\left(\int_{-\infty}^{s} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\mathrm{d}\eta + f\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^{k-1}E(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\mathrm{d}\eta \\
&-\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\eta\wedge e + K(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t)\ ; \\
K\mathrm{d}\omega &= K(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t + f\pi^*\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}t) \\
&= K(\psi\wedge\pi^*\eta\wedge\mathrm{d}t) + (-1)^{k-1}\left(\int_{-\infty}^{s} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\mathrm{d}\eta \\
&-(-1)^{k-1}E(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(p,t)\,\mathrm{d}t\right)\pi^*\mathrm{d}\eta\ ,
\end{aligned}
$$

e ci siamo. □

Corollario 4.5.9 (Lemma di Poincaré per la coomologia a supporto compatto). *La coomologia a supporto compatto di $\mathbb{R}^n$ è data da*

$$
H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & se\ k = n\ , \\ O & se\ k \neq n\ . \end{cases}
$$

Dimostrazione. Segue subito dall'Esempio 4.5.3 e dalla Proposizione 4.5.8, ragionando per induzione su n. □

4.6 La dualità di Poincaré

Il ragionamento fatto nell'Esempio 4.4.3 suggerisce che, usando la successione di Mayer-Vietoris, potrebbe essere possibile ricostruire la coomologia di una varietà partendo dalla combinatoria di un atlante con domini delle carte diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$ e con intersezioni controllate. Lo strumento tecnico che permette di realizzare questo programma è quello di buon ricoprimento.

Definizione 4.6.1. Un *buon ricoprimento* (o *ricoprimento di Leray*) di una varietà n-dimensionale M è un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M tale che ogni intersezione finita non vuota $U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_r}$ sia diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Una varietà con un buon ricoprimento finito sarà detta *di tipo finito*.

Definizione 4.6.2. Un *insieme diretto* è un insieme I con un ordine parziale $<$ tale che per ogni a, $b \in I$ esiste $c \in I$ con $c < a$ e $c < b$. Un sottoinsieme $J \subseteq I$ è *cofinale* se per ogni $i \in I$ esiste $j \in J$ tale che $j < i$.

Esempio 4.6.3. L'insieme dei ricoprimenti aperti di uno spazio topologico è un insieme diretto rispetto all'ordine parziale $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ se e solo se $\mathcal{V}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$, perché due ricoprimenti aperti $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ e $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ hanno $\mathcal{U}\cap\mathcal{V} = \{U_\alpha \cap V_\beta\}$ come raffinamento comune.

Esempio 4.6.4. Un altro esempio di insieme diretto che ci servirà in seguito è dato dalla famiglia degli intorni aperti di un punto in uno spazio topologico, rispetto all'ordine parziale dato dall'inclusione. In particolare, un sistema fondamentale di intorni è esattamente un sottoinsieme cofinale.

Il risultato tecnico che ci servirà è il seguente:

Teorema 4.6.5. *Ogni varietà ha un buon ricoprimento (e in particolare le varietà compatte sono di tipo finito). Più precisamente, i buoni ricoprimenti sono cofinali nell'insieme di tutti i ricoprimenti aperti di una varietà.*

Vedremo la dimostrazione completa di questo teorema solo più in là, quando introdurremo delle tecniche di geometria Riemanniana. In breve, introdurremo il concetto di aperti *geodeticamente convessi,* che si comportano come i convessi di $\mathbb{R}^n$ (rispetto alle geodetiche della varietà Riemanniana invece che ai segmenti); in particolare, l'intersezione di due aperti geodeticamente convessi è ancora geodeticamente convesso, un aperto geodeticamente convesso è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, e ogni punto di una varietà ha un sistema fondamentale d'intorni geodeticamente convessi. È quindi chiaro che ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento costrituito da aperti geodeticamente convessi, e che un ricoprimento aperto costituito da aperti geodeticamente convessi è un buon ricoprimento.

Come primo esempio di applicazione della procedura di Mayer-Vietoris dimostriamo la seguente

Proposizione 4.6.6. *La coomologia di una varietà di tipo finito (per esempio, di una varietà compatta) è di dimensione finita.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{U} = \{U_0, \ldots, U_r\}$ un buon ricoprimento finito di M, e procediamo per induzione su r. Se $r = 1$, la varietà è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$, e la tesi segue dal lemma di Poincaré (Corollario 4.4.2). Supponiamo allora la tesi vera per tutte le varietà con un buon ricoprimento composto da $r - 1$ aperti. Poniamo $U = U_1 \cup \cdots \cup U_{r-1}$ e $V = U_r$. Per ipotesi induttiva, le coomologie di U e di V hanno dimensione finita. Inoltre, $\{U_1 \cap U_r, \ldots, U_{r-1} \cap U_r\}$ è un buon ricoprimento di $U \cap V$ composto da $r - 1$ aperti; quindi anche la coomologia di $U \cap V$ ha dimensione finita. Dalla successione di Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^k(U \cup V) \xrightarrow{r} H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow \cdots$$

deduciamo

$$H^k(U \cup V) \cong \operatorname{Ker} r \oplus \operatorname{Im} r \cong \operatorname{Im} d^* \oplus \operatorname{Im} r\ .$$

Siccome $H^k(U)$, $H^k(V)$ e $H^{k-1}(U \cap V)$ hanno dimensione finita, allora anche $H^k(U \cup V) = H^k(M)$ ha dimensione finita, ed è fatta. □

Definizione 4.6.7. Un'applicazione bilineare $\langle \cdot\,, \cdot \rangle \colon V \times W \to \mathbb{R}$ è *non degenere* se $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in W$ implica $v = O$, e $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $v \in V$ implica $w = O$.

Il nostro prossimo obiettivo è un'importante dualità fra la coomologia usuale e la coomologia a supporto compatto.

Lemma 4.6.8. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita, e $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon V\times W\to\mathbb{R}$ un'applicazione bilineare. Allora $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ è non degenere se e solo se l'applicazione $\psi\colon V\to W^*$ data da $\psi(v)=\langle v,\cdot\rangle$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ sia non degenere. Per definizione, ψ è iniettiva, per cui $\dim V\le\dim W^*$; per concludere la dimostrazione ci basta far vedere che $\dim V=\dim W^*$. La non-degenericità implica che anche l'applicazione $w\mapsto\langle\cdot,w\rangle$ è iniettiva; quindi $\dim W\le\dim V^*$, e ci siamo.

Viceversa, supponiamo che ψ sia un isomorfismo; in particolare, $\langle v,w\rangle=0$ per ogni $w\in W$ implica $v=O$, e $\dim V=\dim W^*$. Inoltre, anche $\psi^T\colon W=(W^*)^*\to V^*$ è un isomorfismo. Ora, $\psi^T(w)(v)=\psi(v)(w)=\langle v,w\rangle$; quindi $\psi^T(w)=\langle\cdot,w\rangle$, e l'iniettività di ψ^T conclude la dimostrazione della non-degenericità di $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. □

Vogliamo costruire un'applicazione bilineare non degenere definita su gruppi di coomologia. La prima osservazione è che l'identità

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta$$

valida per ogni $\omega\in A^k(M)$ e $\eta\in A^h(M)$ ci dice che il prodotto esterno di due forme chiuse è una forma chiusa, e che il prodotto esterno di una forma chiusa con una forma esatta (a supporto compatto) è una forma esatta (a supporto compatto). Di conseguenza, il prodotto esterno fra due classi di coomologia è ben definito, e otteniamo un prodotto $\wedge\colon H^k(M)\times H^h(M)\to H^{h+k}(M)$ che soddisfa tutte le proprietà del prodotto esterno usuale. Inoltre, è ben definito (perché?) anche il prodotto esterno di $\omega\in H^k(M)$ con $\eta\in H^h_c(M)$, e il risultato è una classe a supporto compatto $\omega\wedge\eta\in H^{h+k}_c(M)$.

Sia ora $\eta\in A^{n-1}_c(M)$ una forma a supporto compatto su una varietà n-dimensionale orientata M. Allora non è difficile (Esercizio 4.1) trovare un intorno $U\subset M$ del supporto di η tale che $\overline{U}$ sia una varietà con bordo compatta. Allora il Teorema di Stokes ci dice che

$$\int_M \mathrm{d}\eta=\int_{\overline{U}}\mathrm{d}\eta=\int_{\partial U}\eta=0\,.$$

Di conseguenza, l'integrazione di n-forme a supporto compatto induce un'operatore lineare $\int_M\colon H^n_c(M)\to\mathbb{R}$. In particolare, per ogni $0\le k\le n=\dim M$ otteniamo un'applicazione bilineare

$$\int\colon H^k(M)\otimes H^{n-k}_c(M)\to\mathbb{R}$$

data da

$$(\omega,\eta)\mapsto\int_M\omega\wedge\eta\,;$$

la dualità di Poincaré dirà che questa applicazione è non degenere. Per dimostrarlo ci serve la seguente

Proposizione 4.6.9. *Siano U, $V \subset M$ due aperti di una varietà n-dimensionale orientata M. Allora il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^k(U\cup V) & \longrightarrow & H^k(U)\oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U\cap V) & \xrightarrow{d^*} & H^{k+1}(U\cup V) & \longrightarrow \cdots \\
& \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & \\
\cdots \longleftarrow & H_c^{n-k}(U\cup V) & \xleftarrow{s_*} & H_c^{n-k}(U)\oplus H_c^{n-k}(V) & \xleftarrow{\delta} & H_c^{n-k}(U\cap V) & \xleftarrow{d_*} & H_c^{n-k-1}(U\cap V) & \longleftarrow \cdots \\
& \Big\downarrow \int_{U\cup V} & & \Big\downarrow \int_U + \int_V & & \Big\downarrow \int_{U\cap V} & & \Big\downarrow \int_{U\cup V} & \\
& \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} &
\end{array}$$

ottenuto mettendo insieme le due successioni di Mayer-Vietoris, è commutativo a meno del segno.

Dimostrazione. La commutatività nel quadrato a sinistra è conseguenza della formula

$$\int_{U\cap V} \omega \wedge (j_*\eta_1 + j_*\eta_2) = \int_U \omega|_U \wedge \eta_1 + \int_V \omega|_V \wedge \eta_2 \;,$$

che è chiaramente verificata per ogni $\omega \in H^k(U \cap V)$, $\eta_1 \in H_c^k(U)$ e $\eta_2 \in H_c^k(V)$.

La commutatività nel quadrato centrale è conseguenza della formula

$$\int_U \omega_1 \wedge (-j_*\eta) + \int_V \omega_2 \wedge j_*\eta = \int_{U\cap V} (\omega_2|_{U\cap V} - \omega_1|_{U\cap V}) \wedge \eta \;,$$

chiaramente valida per ogni $\omega_1 \in H^k(U)$, $\omega_2 \in H^k(V)$ ed $\eta \in H_c^k(U \cap V)$.

La commutatività a meno del segno nel quadrato a destra è conseguenza della formula

$$\int_{U\cap V} \omega \wedge d_*\eta = (-1)^{k+1} \int_{U\cup V} d^*\omega \wedge \eta \;,$$

per $\omega \in H^k(U \cap V)$ e $\eta \in H_c^{n-k-1}(U \cup V)$, che dobbiamo dimostrare. Sia $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U, V\}$. Quanto visto nell'Osservazione 4.5.7 ci dice che

$$\int_{U\cap V} \omega \wedge d_*\eta = \int_{U\cap V} \omega \wedge \mathrm{d}\rho_V \wedge \eta = (-1)^k \int_{U\cap V} \mathrm{d}\rho_V \wedge \omega \wedge \eta \;.$$

D'altra parte, l'Osservazione 4.2.2 ci dice che

$$\int_{U\cap V} d^*\omega \wedge \eta = -\int_{U\cap V} \mathrm{d}\rho_V \wedge \omega \wedge \eta \;,$$

e ci siamo. □

Teorema 4.6.10 (Dualità di Poincaré). *Sia M una varietà n-dimensionale orientata di tipo finito. Allora per ogni $0 \le k \le n$ l'applicazione bilineare $\int_M : H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \to \mathbb{R}$ è non degenere. In particolare,*

$$H^k(M) \cong H_c^{n-k}(M)^* \tag{4.10}$$

per ogni $0 \le k \le n$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento $\{U_1, \ldots, U_r\}$ di M. Se $r = 1$, la varietà M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$, per cui la tesi è ovvia per $k > 0$, grazie ai Corollari 4.4.2 e 4.5.9. Per $k = 0$, sia $\eta \in H_c^n(M)$ con $\int_M \eta = 1$; allora $\int_M : H^0(M) \times H_c^n(M) \to \mathbb{R}$ è data da

$$(a, b\eta) \mapsto a \int_M b\eta = ab \;,$$

che è chiaramente non degenere.

Supponiamo allora il teorema vero per tutte le varietà con un buon ricoprimento composto da $r-1$ aperti, e poniamo $U = U_1 \cup \cdots \cup U_{r-1}$ e $V = U_r$. Come nella dimostrazione della Proposizione 4.6.6 si verifica facilmente che U, V e $U \cap V$ hanno un buon ricoprimento costituito da al più $r-1$ aperti; quindi il Teorema è vero per U, V e $U \cap V$. La Proposizione 4.6.9 e il Lemma 4.6.8 ci forniscono allora un diagramma commutativo della forma

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(U)\oplus H^{k-1}(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(M) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U\cap V) \arrow[d] \\
H_c^{n-k+1}(U)^*\oplus H_c^{n-k+1}(V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k+1}(U\cap V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(M)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U)^*\oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cap V)^*
\end{tikzcd}$$

in cui la prima, seconda, quarta e quinta freccia verticale sono degli isomorfismi. Il Lemma 4.1.17 ci assicura allora che anche la terza freccia centrale è un isomorfismo, e la tesi segue subito dal Lemma 4.6.8. □

Possiamo spingere questo argomento anche più in là:

Teorema 4.6.11. *Sia M una varietà n-dimensionale orientata. Allora per ogni $0 \le k \le n$ l'applicazione $\int_M : H^k(M) \to H_c^{n-k}(M)^*$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Il teorema precedente ci dice che l'enunciato è vero per ogni varietà di tipo finito. Supponiamo che M sia l'unione disgiunta di una famiglia numerabile di varietà n-dimensionali orientate di tipo finito M_k; allora l'enunciato vale anche per M. Infatti, le restrizioni inducono chiaramente isomorfismi $r : H^\bullet(M) \to \prod_k H^\bullet(M_k)$ ed $s : H_c^\bullet(M) \to \bigoplus_k H_c^\bullet(M_k)$, e quindi (ricordando che il duale della somma diretta è il prodotto diretto dei duali; vedi la Proposizione **??**) un isomorfismo $s^* : \prod_k H_c^\bullet(M_k)^* \to H_c^\bullet(M)^*$. Usando il Teorema 4.6.10 troviamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
H^\bullet(M) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\int_M"'] & \prod_k H^\bullet(M_k) \arrow[d, "\prod_k \int_{M_k}"] \\
H_c^{n-\bullet}(M)^* & \prod_k H_c^{n-\bullet}(M_k)^* \arrow[l, "s^*"']
\end{tikzcd}$$

Quindi $\int_M = s^* \circ \left(\prod_k \int_{M_k}\right) \circ r$ è un isomorfismo, e la tesi segue in questo caso.

Sia ora M orientata qualsiasi, e $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ un buon ricoprimento numerabile di M. Siccome M ha una base numerabile, e i buoni ricoprimenti sono cofinali nella famiglia dei ricoprimenti aperti, possiamo anche supporre che $\{U_\alpha\}$ sia una base della topologia di M.

Sia $f \in C^\infty(M)$ una esaustione (cioè $f^{-1}\big((-\infty, a]\big)$ è compatto per ogni $a \in \mathbb{R}$). Per ogni $m \in \mathbb{Z}$ poniamo

$$\begin{aligned} A_m &= \{p \in M \mid m \le f(p) \le m+1\} , \\ A'_m &= \{p \in M \mid m - \tfrac{1}{2} < f(p) < m + \tfrac{3}{2}\} . \end{aligned}$$

Siccome $\mathfrak{U}$ è una base, ogni punto di A_m appartiene a un elemento di $\mathfrak{U}$ contenuto in A'_m. Ma ciascun A_m è compatto; quindi possiamo ricoprire A_m con un numero finito di elementi di $\mathfrak{U}$ contenuti in A'_m. Sia $B_m \subseteq A'_m$ la loro unione; in particolare, B_m è di tipo finito.

Per costruzione, B_m può intersecare $B_{m'}$ solo se $m' = m \pm 1$ (perché?); quindi se poniamo

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_{2k} \qquad \text{e} \qquad V = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_{2k+1} ,$$

allora U e V sono unione disgiunta di varietà di tipo finito. In particolare, per quanto visto sopra, la tesi vale per U e V. Inoltre, $U \cap V$ è l'unione disgiunta delle varietà $B_{2k} \cap B_{2k+1}$ e $B_{2k} \cap B_{2k-1}$ con $k \in \mathbb{Z}$, che sono ancora di tipo finito (perché?); quindi la tesi vale anche per $U \cap V$. Allora l'argomento usato nella dimostrazione del Teorema 4.6.10 implica che la tesi vale anche per $U \cup V = M$, e abbiamo finito. $\square$

Osservazione 4.6.12. I gruppi di coomologia delle varietà di tipo finito hanno dimensione finita (Proposizione 4.6.6); quindi prendendo i duali si ha anche

$$H^k_c(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

per tutte le varietà orientabili di tipo finito. Questo non è necessariamente vero per le varietà non di tipo finito.

In realtà, si può dimostrare che $H^k(M) \cong H^{n-k}_c(M)^*$ vale per tutte le varietà, non solo quelle di tipo finito, mentre su varietà con coomologia di dimensione infinita non è detto che $H^k_c(M)$ sia isomorfo a $H^{n-k}(M)^*$.

Corollario 4.6.13. *Sia M una varietà compatta di dimensione n. Allora*
(i) *se M è orientabile allora $H^n(M) = \mathbb{R}$;*
(ii) *se M non è orientabile allora $H^n(M) = O$.*

Dimostrazione. La parte (i) segue subito da $H^n(M) \cong H^0(M)^* = \mathbb{R}$.

Per la parte (ii), sia $\pi: \tilde{M} \to M$ il rivestimento orientabile a due fogli, e $A: \tilde{M} \to \tilde{M}$ l'automorfismo non banale del rivestimento, che sappiamo invertire l'orientazione.

Sia $\omega \in A^n(M)$; dobbiamo dimostrare che è esatta. Sia $\tilde{\omega} = \pi^*\omega \in A^n(\tilde{M})$. Chiaramente, $\pi \circ A = \pi$ implica $A^* \circ \pi^* = \pi^*$; quindi $A^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$. D'altra parte, A inverte l'orientazione; quindi

$$\int_{\tilde{M}} \tilde{\omega} = -\int_{\tilde{M}} A^*\tilde{\omega} = -\int_{\tilde{M}} \tilde{\omega} \;,$$

da cui segue $\int_{\tilde{M}} \tilde{\omega} = 0$. La dualità di Poincaré implica allora che $\tilde{\omega}$ è esatta, per cui esiste $\eta \in A^{n-1}(\tilde{M})$ con $\tilde{\omega} = \mathrm{d}\eta$.

Poniamo $\tilde{\eta} = \frac{1}{2}(\eta + A^*\eta)$. Siccome il differenziale esterno commuta con i pull-back, $\mathrm{d}\tilde{\eta} = \tilde{\omega}$; inoltre, essendo $A^2 = \mathrm{id}_{\tilde{M}}$, si ha $A^*\tilde{\eta} = \tilde{\eta}$. Quest'ultima affermazione implica che esiste $\psi \in A^{n-1}(M)$ tale che $\tilde{\eta} = \pi^*\psi$. Infatti, sia $U \subset M$ un aperto ben rivestito; allora esistono esattamente due sezioni σ_0, $\sigma_1 \colon U \to \tilde{M}$ del rivestimento su U, collegate da $\sigma_1 = A \circ \sigma_0$. Quindi

$$\sigma_1^*\tilde{\eta} = \sigma_0^* A^*\tilde{\eta} = \sigma_0^*\tilde{\eta} \;;$$

dunque ponendo $\psi|_U = \sigma_0^*\tilde{\eta}$ definiamo una $(n-1)$-forma globale ψ su M. Infine,

$$\mathrm{d}\psi|_U = \mathrm{d}\sigma_0^*\tilde{\eta} = \sigma_0^*\mathrm{d}\tilde{\eta} = \sigma_0^*\tilde{\omega} = \sigma_0^*\pi^*\omega = \omega|_U \;,$$

in quanto $\pi \circ \sigma_0 = \mathrm{id}_U$, e quindi $\omega = \mathrm{d}\psi$, come voluto. □

4.7 Il principio di Mayer-Vietoris

Per estendere gli argomenti basati sulla successione di Mayer-Vietoris dal caso di ricoprimenti composti da due (o da un numero finito di) aperti al caso di ricoprimenti numerabili qualunque ci serviranno alcuni nuovi concetti di algebra omologica.

Definizione 4.7.1. Un *complesso doppio* è una tripla (K, d, δ) composta da un gruppo abeliano (spazio vettoriale, eccetera) K con una doppia graduazione, cioè che si decompone in una somma diretta

$$K = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} K^{p,q}$$

di sottogruppi (sottospazi, eccetera), e da due morfismi d, $\delta \colon K \to K$ che soddisfano le seguenti proprietà:

(i) $d(K^{p,q}) \subseteq K^{p,q+1}$ e $\delta(K^{p,q}) \subseteq K^{p+1,q}$ per ogni p, $q \in \mathbb{N}$;
(ii) $d \circ d = O$ e $\delta \circ \delta = O$;
(iii) $d \circ \delta = \delta \circ d$.

La *riga* q-esima di un complesso doppio è la successione di morfismi

$$K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} K^{2,q} \xrightarrow{\delta} K^{3,q} \longrightarrow \cdots$$

C'è un modo naturale per associare a un complesso doppio (K, d, δ) un complesso differenziale. Prima di tutto, consideriamo K con la graduazione $K = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K^n$ ottenuta ponendo

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \ .$$

Poi definiamo $D\colon K \to K$ ponendo

$$D|_{K^{p,q}} = \delta + (-1)^p d \ .$$

Allora $D(K^n) \subseteq K^{n+1}$, e per ogni $\phi \in K^{p,q}$ si ha

$$D\bigl(D(\phi)\bigr) = D\bigl(\delta\phi + (-1)^p d\phi\bigr) = \delta\delta\phi + (-1)^{p+1} d\delta\phi + (-1)^p \delta d\phi + dd\phi = O \ ;$$

quindi $D \circ D = O$ e (K, D) è un complesso differenziale.

Definizione 4.7.2. Sia (K, d, δ) un complesso doppio. Il complesso differenziale (K, D) appena definito è il *complesso differenziale indotto* da (K, d, δ). La *coomologia* del complesso doppio (K, d, δ) è per definizione la coomologia $H^\bullet_D(K)$ del complesso (K, D) indotto.

Osservazione 4.7.3. Un elemento $\phi \in K^n$ è, per definizione, una somma

$$\phi = \phi^{0,n} + \phi^{1,n-1} + \cdots + \phi^{n-1,1} + \phi^{n,0}$$

con $\phi^{p,q} \in K^{p,q}$. Quindi

$$D\phi = d\phi^{0,n} + (\delta\phi^{0,n} - d\phi^{1,n-1}) + \cdots + (\delta\phi^{n-1,1} + (-1)^n d\phi^{n,0}) + \delta\phi^{n,0} \ ,$$

per cui

$$(D\phi)^{p,q} = \begin{cases} d\phi^{0,n} & \text{se } p = 0 \text{ e } q = n+1 \ ; \\ \delta\phi^{p-1,q} + (-1)^p d\phi^{p,q-1} & \text{se } 0 < p < n+1 \text{ e } q = n+1-p \ ; \\ \delta\phi^{n,0} & \text{se } p = n+1 \text{ e } q = 0 \ . \end{cases}$$

In particolare,

$$D\phi = O \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} d\phi^{0,n} = O \ , \\ \delta\phi^{p,q} = (-1)^p \, d\phi^{p+1,q-1} & \text{per } 0 < p < n \ , \\ \delta\phi^{n,0} = O \ ; \end{cases} \tag{4.11}$$

e

$$\phi = D\eta \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \phi^{0,n} = d\eta^{0,n-1} \ , \\ \phi^{p,q} = \delta\eta^{p-1,q} + (-1)^p \, d\eta^{p,q-1} & \text{per } 0 < p < n \ , \\ \phi^{n,0} = \delta\eta^{n-1,0} \ . \end{cases} \tag{4.12}$$

Una utile conseguenza di queste formule è il

Lemma 4.7.4. *Sia (K, d, δ) un complesso doppio con righe esatte. Allora ogni classe di coomologia $[\omega] \in H^n_D(K)$ è rappresentata da un elemento $\omega \in K^{0,n}$ che è d-chiuso e δ-chiuso.*

Dimostrazione. Sia $\omega_0 = \omega^{0,n} + \cdots + \omega^{n,0} \in K^n$ un D-cociclo rappresentante $[\omega]$. Siccome $D\omega_0 = O$, la (4.11) ci dice che $\delta\omega^{n,0} = O$; l'esattezza delle righe implica quindi che esiste $\phi \in K^{n-1,0}$ tale che $\omega^{n,0} = \delta\phi$. Poniamo $\omega_1 = \omega_0 - D\phi$; allora ω_1 è ancora un D-cociclo rappresentante $[\omega]$, ma senza componente in $K^{n,0}$. La (4.11) dice allora che la componente in $K^{n-1,1}$ di ω_1 è δ-chiusa; l'esattezza delle righe implica che è anche δ-esatta, e quindi come prima possiamo sottrarre a ω_1 un D-cobordo in modo da ottenere un rappresentante di $[\omega]$ senza componenti né in $K^{n,0}$ né in $K^{n-1,1}$.

Procedendo in questo modo otteniamo un rappresentante $\omega \in K^{0,n}$ di $[\omega]$; e usando ancora (4.11) da $D\tilde{\omega} = O$ deduciamo $d\omega = O$ e $\delta\omega = O$, ed è fatta. □

L'idea è che un complesso doppio con righe esatte può essere usato per calcolare la coomologia di un complesso che possa essere inserito come colonna iniziale del complesso doppio, formando un complesso doppio aumentato:

Definizione 4.7.5. Un *complesso doppio aumentato* è dato da un complesso doppio (K, d, δ), un complesso differenziale (A, d) e un morfismo $r: A \to K$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(i) $r(A^q) \subseteq K^{0,q}$ per ogni $q \in \mathbb{N}$;
(ii) r è iniettivo;
(iii) $r \circ \mathrm{d} = d \circ r$;
(iv) $\delta \circ r = O$.

La *riga* q-esima di un complesso doppio aumentato è la successione di morfismi

$$O \longrightarrow A^q \xrightarrow{r} K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} K^{2,q} \longrightarrow \cdots$$

Teorema 4.7.6. *Sia $r: (A, \mathrm{d}) \to (K, d, \delta)$ un complesso doppio aumentato. a righe esatte. Allora r induce un isomorfismo fra $H^\bullet(A)$ e $H^\bullet_D(K)$.*

Dimostrazione. Siccome

$$D \circ r = (\delta + d) \circ r = d \circ r = r \circ \mathrm{d} ,$$

il morfismo r è un morfismo di cocatene, e quindi induce un morfismo $r^*: H^\bullet(A) \to H^\bullet_D(K)$ in coomologia; vogliamo dimostrare che r^* è un isomorfismo.

Sia $[\omega] \in H^n_D(K)$. Per il Lemma 4.7.4, possiamo trovare un δ-cociclo e d-cociclo $\omega \in K^{0,n}$ rappresentante $[\omega]$. L'esattezza delle righe ci fornisce allora un $\phi \in A^n$ tale che $r(\phi) = \omega$. Inoltre $r(\mathrm{d}\phi) = dr(\phi) = d\omega = O$; essendo r iniettivo troviamo $\mathrm{d}\phi = O$. Quindi ϕ è un d-cociclo tale che $r^*[\phi] = [\omega]$, per cui r^* è surgettiva.

Per dimostrare che r^* è iniettivo, sia $[\phi] \in H^n(A)$ tale che $r^*[\phi] = O$. Questo vuol dire che $d\phi = O$ e $r(\phi) = D\eta$ per un opportuno $\eta \in K^{n-1}$. Siccome $r(\phi) \in K^{0,n}$, la (4.12) ci dice che $\delta\eta^{n-1,0} = O$. L'esattezza delle righe ci fornisce $\psi \in K^{n-2,0}$ tale che $\delta\psi = \eta^{n-1,0}$, e quindi sottraendo $D\psi$ a η possiamo supporre che $\eta^{n-1,0} = O$.

Procedendo in questo modo, possiamo trovare $\tilde{\eta} \in K^{0,n-1}$ tale che $D\tilde{\eta} = r(\phi)$. In particolare, $\delta\tilde{\eta} = O$, per cui l'esattezza delle righe ci fornisce $\psi \in A^{n-1}$ tale che $r(\psi) = \tilde{\eta}$. Quindi $r(d\psi) = Dr(\psi) = D\tilde{\eta} = r(\phi)$, per cui l'iniettività di r implica $\phi = d\psi$, per cui $[\phi] = O$ e r^* è iniettivo, come voluto. □

Vogliamo applicare questo risultato per calcolare la coomologia di de Rham di una varietà generalizzando la successione di Mayer-Vietoris al caso di un ricoprimento aperto numerabile. Per far ciò abbiamo bisogno di costruire un doppio complesso aumentato.

Definizione 4.7.7. Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un ricoprimento aperto numerabile (o finito) di una varietà M, dove J è un insieme ordinato. Per $r \in \mathbb{N}$ e $\alpha_0, \ldots, \alpha_r \in J$ poniamo

$$U_{\alpha_0\ldots\alpha_r} = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r} .$$

Per p, $q \in \mathbb{N}$ poniamo

$$C^p(\mathfrak{U}, A^q) = \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} A^q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) .$$

Osservazione 4.7.8. Un elemento $\phi \in C^p(\mathfrak{U}, A^q)$ è quindi ottenuto assegnando una q-forma $\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ su ciascuna intersezione di p aperti $U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_p} \in \mathfrak{U}$ con $\alpha_0 < \cdots < \alpha_p$. Per convenzione, dato $\phi \in C^p(\mathfrak{U}, A^q)$ definiremo $\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ anche quando gli indici non sono ordinati ponendo

$$\phi_{\alpha_{\tau(0)}\ldots\alpha_{\tau(p)}} = \mathrm{sgn}(\tau)\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_p} \tag{4.13}$$

per ogni permutazione $\tau \in \mathfrak{S}_p$; in particolare $\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_p} = O$ non appena $\alpha_i = \alpha_j$ per qualche $i \neq j$.

Il differenziale esterno induce un differenziale $d\colon C^p(\mathfrak{U}, A^q) \to C^p(\mathfrak{U}, A^{q+1})$ agendo componente per componente. Per avere un complesso doppio, ci serve un differenziale orizzontale.

Lemma 4.7.9. *Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto numerabile di una varietà M. Per ogni $\phi \in C^p(\mathfrak{U}, A^q)$ poniamo*

$$(\delta\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_{p+1}})|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}}} , \tag{4.14}$$

dove l'accento circonflesso indica l'omissione di un indice. Allora $\phi \mapsto \delta\phi$ definisce un differenziale $\delta\colon C^p(\mathfrak{U}, A^q) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, A^q)$ che commuta con d.

Dimostrazione. Prima di tutto dobbiamo verificare che (4.14) effettivamente definisca un elemento di $C^{p+1}(\mathfrak{U}, A^q)$, cioè che soddisfi (4.13). Chiaramente, è sufficiente verificare (4.13) per le trasposizioni. Omettendo per semplicità di scrittura l'operatore di restrizione abbiamo

$$
\begin{aligned}
&(\delta\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_h\ldots\alpha_k\ldots\alpha_{p+1}}\\
&\quad=\sum_{j=0}^{h-1}(-1)^j\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_h\ldots\alpha_k\ldots\alpha_{p+1}}\\
&\qquad+(-1)^h\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_h}\ldots\alpha_k\ldots\alpha_{p+1}}+\sum_{j=h+1}^{k-1}(-1)^j\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_h\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_k\ldots\alpha_{p+1}}\\
&\qquad+(-1)^k\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_h\ldots\widehat{\alpha_k}\ldots\alpha_{p+1}}+\sum_{j=k+1}^{p+1}(-1)^j\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_h\ldots\alpha_k\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_{p+1}}\\
&\quad=-\sum_{j=0}^{h-1}(-1)^j\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_h}\ldots\alpha_j\ldots\alpha_k\ldots\alpha_{p+1}}\\
&\qquad+(-1)^h(-1)^{k-h+1}\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_k\ldots\widehat{\alpha_h}\ldots\alpha_{p+1}}-\sum_{j=h+1}^{k-1}(-1)^j\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_k\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_h\ldots\alpha_{p+1}}\\
&\qquad+(-1)^k(-1)^{h-k+1}\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_k}\ldots\alpha_h\ldots\alpha_{p+1}}-\sum_{j=k+1}^{p+1}(-1)^j\phi_{\alpha_0\ldots\alpha_k\ldots\alpha_h\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_{p+1}}\\
&\quad=-(\delta\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_k\ldots\alpha_h\ldots\alpha_{p+1}}\ ,
\end{aligned}
$$

come voluto.

Per vedere che $\delta\circ\delta = O$ basta osservare che

$$
\begin{aligned}
(\delta^2\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+2}} &= \sum_{j=0}^{p+2}(-1)^j(\delta\phi)_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_{p+2}}\\
&=\sum_{j=0}^{p+2}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^j(-1)^i\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_i}\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_{p+2}}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{p+2}\sum_{i=j+1}^{p+2}(-1)^j(-1)^{i-1}\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\widehat{\alpha_i}\ldots\alpha_{p+2}}\\
&=\sum_{0\le i<j\le p+2}(-1)^{i+j}\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_i}\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_{p+2}}\\
&\quad-\sum_{0\le j<i\le p+2}(-1)^{i+j}\phi_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\widehat{\alpha_i}\ldots\alpha_{p+2}}\\
&=O\ .
\end{aligned}
$$

Infine, $\mathrm{d}\circ\delta = \delta\circ\mathrm{d}$ è ovvio. □

Definizione 4.7.10. Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto numerabile di una varietà M. Il complesso doppio $\big(C^\bullet(\mathfrak{U}, A^\bullet), \mathrm{d}, \delta\big)$ è detto *complesso doppio di Mayer-Vietoris* associato al ricoprimento $\mathfrak{U}$.

Per applicare il Teorema 4.7.6 dobbiamo aumentare il complesso doppio di Mayer-Vietoris. Sia $r\colon A^\bullet(M) \to C^0(\mathfrak{U}, A^\bullet)$ il morfismo dato da $r(\omega)_\alpha = \omega|_{U_\alpha}$ per ogni $\alpha \in J$. L'iniettività di r segue subito dal fatto che $\mathfrak{U}$ è un ricoprimento. Inoltre

$$\big(\delta r(\omega)\big)_{\alpha_0\alpha_1} = (\omega|_{U_{\alpha_1}} - \omega_{U_{\alpha_0}})|_{U_{\alpha_0\alpha_1}} = O \; ;$$

quindi $r\colon \big(A^\bullet(M), \mathrm{d}\big) \to \big(C^\bullet(\mathfrak{U}, A^\bullet), \mathrm{d}, \delta\big)$ è un complesso doppio aumentato.

Definizione 4.7.11. Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto numerabile di una varietà M. Il complesso doppio aumentato $r\colon \big(A^\bullet(M), \mathrm{d}\big) \to \big(C^\bullet(\mathfrak{U}, A^\bullet), \mathrm{d}, \delta\big)$ è detto *complesso doppio aumentato di Mayer-Vietoris* associato al ricoprimento $\mathfrak{U}$.

Il *principio di Mayer-Vietoris* dichiara allora che il complesso doppio aumentato di Mayer-Vietoris ha righe esatte:

Teorema 4.7.12. *Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto numerabile di una varietà M. Allora il complesso doppio aumentato di Mayer-Vietoris associato a $\mathfrak{U}$ ha righe esatte. In particolare, il morfismo $r\colon A^\bullet(M) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, A^\bullet)$ induce un isomorfismo fra la coomologia di de Rham $H^\bullet(M)$ di M e la coomologia del complesso doppio di Mayer-Vietoris.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $q \geq 0$, la successione

$$O \longrightarrow A^q(M) \xrightarrow{\;r\;} C^0(\mathfrak{U}, A^q) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, A^q) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, A^q) \longrightarrow \cdots$$

è esatta. L'esattezza in $A^q(M)$ è l'iniettività di r; l'esattezza in $C^0(\mathfrak{U}, A^q)$ segue da $\delta \circ r = O$ e dal fatto che se $\phi \in C^0(\mathfrak{U}, A^q)$ è tale che $\delta\phi = O$ allora ponendo $\tilde{\phi}|_{U_\alpha} = \phi_\alpha$ si ottiene una q-forma globale $\tilde{\phi} \in A^q(M)$ tale che $r(\tilde{\phi}) = \phi$.

Grazie al Corollario 4.1.16, per dimostrare l'esattezza del resto della successione basta trovare un morfismo graduato $K\colon C^\bullet(\mathfrak{U}, A^q) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, A^q)$ di grado -1 tale che $\delta \circ K + K \circ \delta = \mathrm{id}$.

Scegliamo una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinata al ricoprimento $\mathfrak{U}$, e per $\phi \in C^p(\mathfrak{U}, A^q)$ poniamo

$$(K\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \phi_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} \, .$$

Allora

$$(\delta K\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_p} = \sum_{j=0}^p (-1)^j (K\phi)_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_p}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{p} \sum_{\alpha} (-1)^j \rho_\alpha \phi_{\alpha\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_p} \; ; \\
(K\delta\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_p} &= \sum_{\alpha} \rho_\alpha (\delta\phi)_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_p} \\
&= \left(\sum_{\alpha} \rho_\alpha\right) \phi_{\alpha_0\ldots\alpha_p} + \sum_{\alpha}\sum_{j=0}^{p} (-1)^{j+1} \rho_\alpha \phi_{\alpha\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_p} \\
&= \phi_{\alpha_0\ldots\alpha_p} - (\delta K\phi)_{\alpha_0\ldots\alpha_p} \; ,
\end{aligned}$$

e ci siamo. L'ultima affermazione segue dal Teorema 4.7.6. □

Perché questo risultato sia utile, dobbiamo essere in grado di calcolare la coomologia del complesso doppio di Mayer-Vietoris. La prima osservazione è che se (K, d, δ) è un complesso doppio, allora il complesso doppio $(\tilde{K}, \tilde{d}, \tilde{\delta})$ definito da $\tilde{K}^{p,q} = K^{q,p}$, $\tilde{d}|_{\tilde{K}^{p,q}} = (-1)^p \delta$ e $\tilde{\delta}|_{\tilde{K}^{p,q}} = (-1)^q d$, cioè scambiando righe e colonne, ha la stessa coomologia del complesso originale. Aumentare il complesso doppio $(\tilde{K}, \tilde{d}, \tilde{\delta})$ equivale ad aggiungere una riga iniziale al complesso doppio originale, cioè ad avere un complesso differenziale (C, δ) e un morfismo graduato $i\colon C \to K$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(a) $i(C^p) \subseteq K^{p,0}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$;
(b) i è iniettivo;
(c) $\delta \circ i = i \circ \delta$;
(d) $d \circ i = O$.

Il Teorema 4.7.6 quindi ci dice che se le colonne di questo complesso aumentato sono esatte allora la coomologia del complesso doppio K è isomorfa alla coomologia del complesso C. Nota inoltre che una scelta naturale per il complesso C è prendere $C^p = \mathrm{Ker}(d|_{K^{p,0}})$, e prendere come differenziale la restrizione del differenziale δ del complesso doppio, e come morfismo $i\colon C \to K$ l'inclusione.

Nel caso del complesso doppio di Mayer-Vietoris, il nucleo del differenziale d in $C^p\big(\mathfrak{U}, A^0\big)$ è composto dalle funzioni costanti sulle componenti connesse delle intersezioni $U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$.

Definizione 4.7.13. Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto numerabile di una varietà M. Per $p \geq 0$ indichiamo con $C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}|_{C^p(\mathfrak{U}, A^0)}\big) \subset C^p(\mathfrak{U}, A^0)$ lo spazio vettoriale delle funzioni costanti sulle componenti connesse delle intersezioni di $p+1$ elementi del ricoprimento. Il complesso differenziale $\big(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathbb{R}), \delta\big)$ è detto *complesso di Čech* del ricoprimento $\mathfrak{U}$, e la sua coomologia $\check{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ è la *coomologia di Čech* del ricoprimento $\mathfrak{U}$.

È importante notare che la coomologia di Čech di un ricoprimento dipende soltanto dalla combinatoria del ricoprimento, cioè dalla struttura delle intersezioni dei vari aperti del ricoprimento.

Inoltre, la dimostrazione del Teorema 4.7.12 non si applica al complesso di Čech, in quanto anche se $\phi \in C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ non è affatto detto che

$K\phi \in C^{p-1}(\mathfrak{U}, A^0)$ appartenga a $C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$; e infatti, come vedremo, in generale la coomologia di Čech del ricoprimento $\mathfrak{U}$ non è banale.

Esempio 4.7.14. Supponiamo che $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ sia un ricoprimento aperto numerabile di una varietà M, composto da aperti connessi. Un elemento $\phi \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ è dato dall'assegnazione di un numero reale $\phi_\alpha \in \mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in J$. Quindi $\delta\phi = O$ se e solo se $\phi_\alpha = \phi_\beta$ ogni volta che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. Segue subito che $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^c$, dove $c \geq 1$ è il numero di componenti connesse di M; confronta con l'Osservazione 4.2.4.

La colonna p-esima del complesso doppio di Mayer-Vietoris così aumentato è quindi

$$O \to C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{i} C^p(\mathfrak{U}, A^0) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^p(\mathfrak{U}, A^1) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^p(\mathfrak{U}, A^2) \longrightarrow \cdots$$

Questa successione è esatta in $C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ e $C^p(\mathfrak{U}, A^0)$ per costruzione. L'ostruzione all'esattezza della successione in $C^p(\mathfrak{U}, A^q)$ per $q \geq 1$ è invece data dai gruppi di coomologia q-esima delle intersezioni di $p+1$ elementi di $\mathfrak{U}$.

Di conseguenza, se $\mathfrak{U}$ è un ricoprimento qualsiasi non è detto che le colonne del complesso doppio di Mayer-Vietoris siano esatte, per cui la coomologia di Čech di $\mathfrak{U}$ non è necessariamente isomorfa alla coomologia del complesso doppio di Mayer-Vietoris. Ma se $\mathfrak{U}$ è un buon ricoprimento, allora il lemma di Poincaré ci assicura che la coomologia di tutte le intersezioni è banale; quindi le colonne del complesso doppio di Mayer-Vietoris sono esatte, e il Teorema 4.7.6 implica che la coomologia di Čech di un buon ricoprimento è isomorfa alla coomologia del complesso doppio. Ma il Teorema 4.7.12 ci dice che quest'ultima è sempre isomorfa alla coomologia di de Rham della varietà; quindi abbiamo dimostrato il

Corollario 4.7.15. *La coomologia di Čech di un buon ricoprimento di una varietà M è sempre isomorfa alla coomologia di de Rham di M.*

Osservazione 4.7.16. In particolare, due buoni ricoprimenti di una varietà hanno sempre coomologie di Čech isomorfe.

Il Corollario 4.7.15 non ci permette ancora di dedurre che la coomologia di de Rham è un invariante topologico di una varietà, in quanto il concetto di buon ricoprimento è ancora un concetto differenziale e non topologico (in quanto si richiede che le intersezioni siano diffeomorfe a $\mathbb{R}^n$, e non soltanto omeomorfe). Nella prossima sezione vedremo che, in realtà, la coomologia di Čech di un buon ricoprimento è un invariante topologico della varietà; e questo implicherà che anche la coomologia di de Rham lo è.

4.8 Coomologia dei fasci e teorema di de Rham

La costruzione della coomologia di Čech di un ricoprimento è un caso particolare di una costruzione molto più generale, che descriveremo in questa sezione.

Iniziamo introducendo una nozione fondamentale nella geometria contemporanea.

Definizione 4.8.1. Un *prefascio* $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X è un'applicazione che associa a ogni aperto $U \subseteq X$ un gruppo abeliano (spazio vettoriale, modulo, anello, eccetera) $\mathcal{F}(U)$, il gruppo delle *sezioni di* $\mathcal{F}$ *su* U, e a ogni inclusione di aperti $\iota_V^U : U \hookrightarrow V$ un morfismo $\mathcal{F}(\iota_V^U) = \rho_V^U : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$, detto *restrizione,* in modo che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

(a) $\rho_U^U = \mathrm{id}_U$ per ogni aperto $U \subseteq X$;

(b) $\rho_V^U \circ \rho_W^V = \rho_W^U$ ogni volta che $U \subseteq V \subseteq W \subseteq X$.

Se $s \in \mathcal{F}(V)$ e $U \subseteq V$, spesso scriveremo $s|_U$ per $\rho_V^U(s)$.

Un prefascio $\mathcal{F}$ è detto *fascio* se sono inoltre soddisfatte le tre ulteriori condizioni:

(c) $\mathcal{F}(\varnothing) = O$;

(d) se $\{U_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto dell'aperto $U \subseteq X$, e s, $t \in \mathcal{F}(U)$ sono tali che $s|_{U_j} = t|_{U_j}$ per tutti i $j \in J$, allora $s = t$ (in altre parole, le sezioni sono univocamente definite dalle loro restrizioni locali);

(e) se $\{U_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto dell'aperto $U \subseteq X$, e $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ sono sezioni tali che $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ per ogni i, $j \in J$, allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_j} = s_j$ per ogni $j \in J$ (in altre parole, sezioni locali compatibili si incollano).

A volte si usa la notazione $\Gamma(U, \mathcal{F})$ per indicare $\mathcal{F}(U)$. Gli elementi di $\mathcal{F}(X)$ sono detti *sezioni globali* di $\mathcal{F}$.

Esempio 4.8.2. Sia M una varietà. Allora possiamo definire un fascio $\mathcal{E}_M$ associando a ogni aperto $U \subseteq M$ l'anello $\mathcal{E}_M(U) = C^\infty(U)$ delle funzioni differenziabili definite su U, e a ogni inclusione di aperti l'operatore di restrizione. Il fascio $\mathcal{E}_M$ (a volte indicato con $\mathcal{C}^\infty$) è detto *fascio dei germi di funzioni differenziabili* su M; nell'Esempio 4.8.8 giustificheremo questa terminologia.

In modo analogo si può definire il fascio dei germi di funzioni C^k per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, o il fascio $\mathcal{A}_M^p$ dei germi di k-forme su M, o il fascio dei germi di funzioni analitiche reali su una varietà analitica reale, o il fascio $\mathcal{O}$ delle funzioni olomorfe su una varietà complessa.

Esempio 4.8.3. Sia G un gruppo abeliano qualsiasi. Il *fascio banale* di gruppo G su uno spazio topologico X è ottenuto assegnando a ciascun aperto di X il gruppo G e ponendo $\rho_V^U = \mathrm{id}_G$ per ogni coppia di aperti $U \subseteq V \subseteq X$.

Esempio 4.8.4. Sia $\mathcal{F}$ il prefascio su $\mathbb{R}$ che associa a ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}$ l'anello delle funzioni continue limitate su U, e a ogni inclusione di aperti l'operatore di restrizione. Si vede subito che $\mathcal{F}$ è un prefascio ma non un fascio, in quanto la proprietà (e) non è soddisfatta: se $U_j = (-j, j)$ per $j \in \mathbb{N}$, allora le sezioni $s_j = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}|_{U_j} \in \mathcal{F}(U_j)$ sono compatibili ma non sono la restrizione di alcuna sezione globale $s \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Definizione 4.8.5. Un *morfismo* $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ fra due (pre)fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ su uno spazio topologico X è una collezione di morfismi $f_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ che commutano con le restrizioni: $\mathcal{G}(\iota_V^U) \circ f_V = f_U \circ \mathcal{F}(\iota_V^U)$ per ogni coppia di aperti $U \subseteq V \subseteq X$. Un *isomorfismo* di fasci è un morfismo invertibile (cioè tale che f_U è invertibile per ogni aperto $U \subseteq X$). Un *fascio costante* è un fascio isomorfo a un fascio banale.

Dato un fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X, è possibile associare in modo unico un gruppo abeliano (spazio vettoriale, eccetera) $\mathcal{F}_x$ a ogni punto $x \in X$, tramite il concetto di limite diretto di gruppi.

Definizione 4.8.6. Un *sistema diretto di gruppi* è dato da una famiglia $\{G_i\}_{i\in I}$ di gruppi abeliani indicizzata da un insieme diretto I e da morfismi $f_j^i: G_j \to G_i$ per ogni coppia di indici $i \leq j$ tali che

(i) $f_i^i = \mathrm{id}_{G_i}$ per ogni $i \in I$;

(ii) $f_j^i \circ f_k^j = f_k^i$ per ogni tripla di elementi $i \leq j \leq k$ in I.

Il *limite diretto* $\varinjlim_{i\in I} G_i$ del sistema diretto $\{G_i\}$ è il quoziente dell'unione disgiunta $\coprod_{i\in I} G_i$ rispetto alla relazione d'equivalenza $\sim$ definita dicendo che $s \in G_i$ è equivalente a $t \in G_j$ se esiste $k \leq i,\, j$ tale che $f_i^k(s) = f_j^k(t)$ in G_k. Si verifica facilmente (Esercizio 4.2) che $\sim$ è una relazione d'equivalenza e che $\varinjlim_{i\in I} G_i$ ha una naturale struttura di gruppo. Indicheremo con $f_j: G_j \to \varinjlim_{i\to I} G_i$ la composizione fra l'inclusione di G_j in $\coprod_{i\in I} G_i$ e la proiezione naturale sul quoziente.

Se $\mathcal{F}$ è un (pre)fascio su uno spazio topologico X e $x \in X$, otteniamo un sistema diretto di gruppi considerando la famiglia $\{\mathcal{F}(U)\}$ indicizzata dagli aperti contenenti x (vedi l'Esempio 4.6.4) e i morfismi di restrizione; quindi possiamo considerarne il limite diretto.

Definizione 4.8.7. Sia $\mathcal{F}$ è un (pre)fascio su uno spazio topologico X e $x \in X$. Il limite diretto $\mathcal{F}_x$ del sistema diretto di gruppi $\{\mathcal{F}(U)\}$ indicizzato dagli aperti contenenti x è detto *spiga* di $\mathcal{F}$ in x, e gli elementi di $\mathcal{F}_x$ sono detti *germi* di sezioni di $\mathcal{F}$ in x.

Esempio 4.8.8. La spiga in un punto $p \in M$ del fascio $\mathcal{E}_M$ su una varietà differenziabile M coincide (perché?) con l'anello $C_M^\infty(p)$ dei germi di funzioni differenziabili in p.

L'Esercizio 4.5 descrive come mettere una topologia sull'unione disgiunta delle spighe di un fascio in modo che le sezioni locali possano essere interpretate come funzioni continue a valori in questa unione disgiunta.

Il nostro prossimo obiettivo è definire la coomologia di Čech a valori in un prefascio, partendo in modo non dissimile da quanto fatto nella sezione precedente ma poi applicando il concetto di limite diretto per togliere la dipendenza dai singoli ricoprimenti.

Definizione 4.8.9. Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X, dove J è un insieme totalmente ordinato. Per $r \in \mathbb{N}$ e $\alpha_0, \ldots, \alpha_r \in J$ poniamo

$$U_{\alpha_0 \ldots \alpha_r} = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r} .$$

Se $\mathcal{F}$ è un prefascio su X e $p \in \mathbb{N}$, il gruppo delle *p-cocatene su* $\mathfrak{U}$ *a valori in* $\mathcal{F}$ è

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}) .$$

Una p-cocatena $s \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ è una collezione $\{s_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\}$ di sezioni locali del prefascio $\mathcal{F}$; quando gli indici non sono ordinati, useremo la convenzione

$$s_{\alpha_{\tau(0)} \ldots \alpha_{\tau(p)}} = \mathrm{sgn}(\tau) s_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}$$

per ogni permutazione $\tau \in \mathfrak{S}_p$; in particolare $s_{\alpha_0 \ldots \alpha_p} = O$ non appena $\alpha_i = \alpha_j$ per qualche $i \neq j$.

Definizione 4.8.10. Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X, dove J è un insieme totalmente ordinato, e $\mathcal{F}$ un prefascio su X. Per ogni $p \in \mathbb{N}$ sia $\delta\colon C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ definita da

$$(\delta s)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (s_{\alpha_0 \ldots \widehat{\alpha_j} \ldots \alpha_{p+1}})|_{U_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}}} ,$$

dove l'accento circonflesso indica l'omissione di un indice. Si verifica facilmente (vedi l'Esercizio 4.6) che δ è ben definita e che $\delta \circ \delta = O$; quindi $\bigl(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \delta\bigr)$ è un complesso differenziale. La coomologia $\check{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ di questo complesso è detta *coomologia di Čech del ricoprimento* $\mathfrak{U}$ *a valori in* $\mathcal{F}$.

Osservazione 4.8.11. Se $\mathcal{F}$ è il fascio banale di gruppo $\mathbb{R}$, allora $\check{H}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ coincide con la coomologia di Čech $\check{H}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ del ricoprimento che avevamo introdotto nella Definizione 4.7.13.

Come osservato nell'Esempio 4.6.3, l'insieme dei ricoprimenti aperti di uno spazio topologico è un insieme diretto; questo suggerisce di tentare di trasformare la coomologia $\{\check{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\}$ in un sistema diretto di gruppi indicizzato dai ricoprimenti aperti. Per farlo, abbiamo bisogno di definire un morfismo da $\check{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ a $\check{H}^\bullet(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ ogni volta che $\mathfrak{V}$ è un raffinamento di $\mathfrak{U}$.

Definizione 4.8.12. Sia $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ un raffinamento di un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di uno spazio topologico X. Una *funzione di raffinamento* è una $\varphi\colon B \to A$ tale che $V_\beta \subseteq U_{\varphi(\beta)}$ per ogni $\beta \in B$.

Dato un prefascio $\mathcal{F}$ su X e una funzione di raffinamento $\varphi\colon B \to A$ definiamo $\varphi^\#\colon C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ ponendo

$$(\varphi^\# s)_{\beta_0 \ldots \beta_p} = s_{\varphi(\beta_0) \ldots \varphi(\beta_p)}|_{V_{\beta_0 \ldots \beta_p}}$$

per ogni $s \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ e $p \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.8.13. *Sia* $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ *un raffinamento di un ricoprimento aperto* $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *di uno spazio topologico* X*, e* $\mathcal{F}$ *un prefascio su* X*.*

(i) *Sia* $\varphi\colon B \to A$ *una funzione di raffinamento. Allora l'applicazione indotta* $\varphi^\#\colon C^\bullet(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ *è un morfismo di cocatene, cioè commuta con* δ*.*

(ii) *Se* φ*,* $\psi\colon B \to A$ *sono due funzioni di raffinamento, allora* $\varphi^\#$ *e* $\psi^\#$ *sono omotopi.*

Dimostrazione. (i) Sia $s \in C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$. Allora

$$\begin{aligned}(\delta\varphi^\# s)_{\beta_0\ldots\beta_{p+1}} &= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j(\varphi^\# s)_{\beta_0\ldots\widehat{\beta_j}\ldots\beta_{p+1}}|_{V_{\beta_0\ldots\beta_{p+1}}}\\ &= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j(s_{\varphi(\beta_0)\ldots\widehat{\varphi(\beta_j)}\ldots\varphi(\beta_{p+1})}|_{V_{\beta_0\ldots\widehat{\beta_j}\ldots\beta_{p+1}}})|_{V_{\beta_0\ldots\beta_{p+1}}}\\ &= (\delta s)_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_{p+1})}|_{V_{\beta_0\ldots\beta_{p+1}}} = (\varphi^\#\delta s)_{\beta_0\ldots\beta_{p+1}}\;,\end{aligned}$$

come voluto.

(ii) Definiamo $K\colon C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^{p-1}(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ ponendo

$$(Ks)_{\beta_0\ldots\beta_{p-1}} = \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j s_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\psi(\beta_{p-1})}|_{V_{\beta_0\ldots\beta_{p-1}}}\;.$$

Allora

$$\begin{aligned}(\delta K s)_{\beta_0\ldots\beta_p} &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(Ks)_{\beta_0\ldots\widehat{\beta_i}\ldots\beta_p}\\ &= \sum_{0\le j<i\le p}(-1)^{i+j}s_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\widehat{\psi(\beta_i)}\ldots\psi(\beta_p)}\\ &\quad+\sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j-1}s_{\varphi(\beta_0)\ldots\widehat{\varphi(\beta_i)}\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\psi(\beta_p)}\;,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(K\delta s)\beta_0\ldots\beta_p &= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\delta s)_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\psi(\beta_p)}\\ &= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\sum_{i=0}^{j}(-1)^i s_{\varphi(\beta_0)\ldots\widehat{\varphi(\beta_i)}\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\psi(\beta_p)}\\ &\quad+\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\sum_{i=j}^{p}(-1)^{i+1}s_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\widehat{\psi(\beta_i)}\ldots\psi(\beta_p)}\\ &= \sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j}s_{\varphi(\beta_0)\ldots\widehat{\varphi(\beta_i)}\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\psi(\beta_p)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=0}^{p} s_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_{j-1})\psi(\beta_j)\ldots\psi(\beta_p)}\\
&+\sum_{0\le j<i\le p}(-1)^{i+j+1} s_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_j)\psi(\beta_j)\ldots\widehat{\psi(\beta_i)}\ldots\psi(\beta_p)}\\
&-\sum_{i=0}^{p} s_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_i)\psi(\beta_{i+1})\ldots\psi(\beta_p)}\\
=\ &-(\delta K s)_{\beta_0\ldots\beta_p} + s_{\psi(\beta_0)\ldots\psi(\beta_p)} - s_{\varphi(\beta_0)\ldots\varphi(\beta_p)}\ ,
\end{aligned}
$$

dove per semplicità non abbiamo indicato le restrizioni a $V_{\beta_0\ldots\beta_p}$, per cui $\psi^\# - \varphi^\# = K\circ\delta + \delta\circ K$, e K è un'operatore di omotopia fra $\psi^\#$ e $\varphi^\#$. □

Come conseguenza di questo lemma e della Proposizione 4.1.15, per ogni raffinamento $\mathfrak{V}$ di un ricoprimento aperto $\mathfrak{U}$ abbiamo un ben definito morfismo in coomologia $\check{H}^\bullet(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^\bullet(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ indipendente dalla funzione di raffinamento. Siccome la composizione di funzioni di raffinamento è chiaramente una funzione di raffinamento, abbiamo quindi ottenuto un sistema diretto di gruppi.

Definizione 4.8.14. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su uno spazio topologico X. La *coomologia di Čech di X a valori in $\mathcal{F}$* $\check{H}^\bullet(X,\mathcal{F})$ è il limite diretto del sistema diretto di gruppi $\{\check{H}^\bullet(\mathfrak{U},\mathcal{F})\}$ indicizzato dai ricoprimenti aperti di X. In particolare, se G è un gruppo abeliano, la *coomologia di Čech* $\check{H}^\bullet(X,G)$ *di X a coefficienti in G* è la coomologia di Čech a valori nel fascio banale di gruppo G.

La coomologia di Čech di uno spazio topologico X a coefficienti in un dato gruppo G è chiaramente un invariante topologico di X. Possiamo quindi finalmente dimostrare l'importante *teorema di de Rham,* che implica fra le altre cose che i gruppi di cooomologia di de Rham sono degli invarianti topologici di una varietà:

Teorema 4.8.15 (de Rham). *La coomologia di de Rham di una varietà è canonicamente isomorfa alla coomologia di Čech della varietà a coefficienti in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Il Teorema 4.6.5 dice che i buoni ricoprimenti sono cofinali nell'insieme di tutti i ricoprimenti aperti di una varietà; quindi (Esercizio 4.3) per calcolare la coomologia di Čech a coefficienti in $\mathbb{R}$ possiamo limitarci a fare il limite diretto sui buoni ricoprimenti.

Se $\mathfrak{U}$ è un buon ricoprimento della varietà M, il Corollario 4.7.15 ci fornisce un isomorfismo $\chi_{\mathfrak{U}}\colon \check{H}^\bullet(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \to H^\bullet(M)$, ottenuto componendo l'isomorfismo $\iota^*\colon \check{H}^\bullet(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \to H^\bullet\big(C^\bullet(\mathfrak{U},A^\bullet)\big)$ indotto dall'inclusione con l'inverso dell'isomorfismo $r^*\colon H^\bullet(M) \to H^\bullet\big(C^\bullet(\mathfrak{U},A^\bullet)\big)$ indotto dalle restrizioni. Siccome stiamo usando inclusioni e restrizioni, è chiaro (perché?) che se $\mathfrak{V}$ è un buon ricoprimento che raffina $\mathfrak{U}$ e $\varphi^*\colon \check{H}^\bullet(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \to \check{H}^\bullet(\mathfrak{V},\mathbb{R})$ è il morfismo indotto da una funzione di raffinamento, abbiamo $\chi_{\mathfrak{V}}\circ\varphi^* = \chi_{\mathfrak{U}}$. Da questo segue (Esercizio 4.4) che possiamo passare al limite diretto e ottenere l'isomorfismo $\chi\colon \check{H}(M,\mathbb{R}) \to H^\bullet(M)$ cercato. $\square$

Esercizi

Esercizio 4.1. Sia $K \subset M$ un compatto in una varietà. Dimostra che esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ di K tale che $\overline{U}$ sia una varietà con bordo compatta.

Esercizio 4.2. Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ un sistema diretto di gruppi. Dimostra che la relazione $\sim$ introdotta nella Definizione 4.8.6 è una relazione d'equivalenza, e che il limite diretto $\varinjlim_{i\in I} G_i$ ha un'unica struttura di gruppo rispetto a cui le $f_i\colon G_i \to \varinjlim_{i\in I} G_i$ siano dei morfismi.

Esercizio 4.3. Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ un sistema diretto di gruppi, e $J \subseteq I$ un sottoinsieme cofinale. Dimostra che $\varinjlim_{j\in J} G_j$ è canonicamente isomorfo a $\varinjlim_{i\in I} G_i$.

Esercizio 4.4. Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ un sistema diretto di gruppi. Sia G un gruppo, e supponiamo di avere una famiglia di morfismi $\chi_i\colon G_i \to G$ tali che $\chi_i \circ f^i_j = \chi_j$ per ogni coppia di indici $i \le j$. Dimostra che esiste un unico morfismo $\chi\colon \varinjlim_{i\in I} \to G$ tale che $\chi \circ f_i = \chi_i$ per ogni $i \in I$. Dimostra inoltre che χ è un isomorfismo se tutti i χ_i lo sono.

Esercizio 4.5. Sia $\mathcal{F}$ un fascio su uno spazio topologico X, e indichiamo con $F = \coprod_{x\in X} \mathcal{F}_x$ l'unione disgiunta delle spighe del fascio, e indichiamo con $\pi\colon F \to X$ l'ovvia proiezione. Se $U \subseteq X$ è aperto, una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ determina un germe $s_x \in \mathcal{F}_x$ per ogni $x \in U$, e quindi un'applicazione $s\colon U \to F$. Dimostra che esiste un'unica topologia minimale su F rispetto a cui tutte queste applicazioni $s\colon U \to F$ sono continue e aperte; che questa topologia induce la topologia discreta su ogni spiga; e che $\pi\colon F \to X$ è un omeomorfismo locale. L'insieme F con questa topologia è detto *spazio étalé* associato al fascio $\mathcal{F}$.

Esercizio 4.6. Sia $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X, dove J è un insieme totalmente ordinato, e $\mathcal{F}$ un prefascio su X. Procedendo come nel Lemma 4.7.9 dimostra che il morfismo δ introdotto nella Definizione 4.8.10 è ben definito e soddisfa $\delta \circ \delta = O$.

Esercizio 4.7. Dimostra che $H^1(M) = O$ per ogni varietà M semplicemente connessa.

Esercizio 4.8. Dimostra che $H^p(M, \mathcal{E}_M) = O$ per ogni $p \ge 1$ e ogni varietà M, dove $\mathcal{E}_M$ è il fascio dei germi di funzioni differenziabili. (*Suggerimento:* usa le partizioni dell'unità.)