

Errata e addenda

Curve e superfici, di M. Abate e F. Tovena

Ulteriori correzioni e suggerimenti sono benvenuti e possono essere inviati per e-mail a uno qualsiasi degli autori (abate@dm.unipi.it o tovena@mat.uniroma2.it).

Pag. X, riga 10: “[12]” al posto di “[11]”.

Pag. X, riga -13: “[12]” al posto di “[11]”.

Pag. 4, riga 1: “Dati $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $n \geq 2$, una” al posto di “Dato $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $n \geq 2$, Una”.

Pag. 4, riga 11: “di classe C^k ” al posto di “regolare”.

Pag. 4, riga -11: “con $r > 0$ e $a \in \mathbb{R}^*$,” al posto di “con $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}^*$,”.

Pag. 6, riga 3: “di p_0 ” al posto di “di p ”.

Pag. 6, riga 15: aggiungere la seguente osservazione: “Più in generale, si può dimostrare che ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^2 che sia localmente un grafico è *globalmente* il sostegno di una curva parametrizzata; vedi il Teorema 1.6.8.”

Pag. 7, riga 16: “me” al posto di “ve”.

Pag. 7, riga 20: aggiungere la seguente frase: “Una *curva piana* è una curva in \mathbb{R}^2 .”

Pag. 9, riga 12: “2.8” al posto di “2.5”.

Pag. 10, riga -10: “ $< t_k = b$ ” al posto di “ $< t_n = b$ ”.

Pag. 13, riga 17: “ $\tilde{\sigma}$ ” al posto di “ $\tilde{\sigma}_1$ ”.

Pag. 13, riga 19: “ $\tilde{\sigma}$ ” al posto di “ $\tilde{\sigma}_1$ ”.

Pag. 18, riga 9: “1.3.8” al posto di “1.3.12”.

Pag. 18, riga 10: aggiungere “e $\sigma''(t) = (a \cos t, -b \sin t)$ ” prima di “per cui”.

Pag. 19, riga -7: aggiungere “di una curva piana” dopo “orientata”.

Pag. 22, riga -14: “ H ” al posto di “ π ”.

Pag. 27, riga 6: “ $\langle \sigma' \wedge \sigma'', \sigma''' \rangle$ ” al posto di “ $\langle \sigma' \wedge \sigma'', \sigma''' \rangle$ ”.

Pag. 31, riga 11: “ e^{bt} ” al posto di “ E^{bt} ”.

Pag. 31, riga 14: “ $a = 1/2$ ” al posto di “ $a = (1/2)$ ”, e “ $(1 - e^{-t})/\sqrt{2}$ ” al posto di “ $1 - e^{-t}$ ”.

Pag. 34, riga 5: “ $\tau^2 + (\tilde{\kappa}/\kappa)^2 \equiv R^2 \kappa^2 \tau^2$ ” al posto di “ $\tau^2 + \tilde{\kappa}^2 \equiv R^2 \kappa^2 \tau^2$ ”.

Pag. 35, riga 10: aggiungere la frase “dove abbiamo orientato C in modo che il vettore tangente in p sia un multiplo positivo di $(f_y(p), -f_x(p))$.”

Pag. 35, riga 11: “ $1 + xy - x^4 - y^4$ ” al posto di “ $x^4 + y^4 - xy - 1$ ”.

Pag. 35, riga -8: “ $|f_y(p)|^3$ ” al posto di “ $f_y^3(p)$ ”.

Pag. 35, riga -5: “La parametrizzazione σ è orientata come richiesto se e solo se $f_y(p) > 0$. Quindi” al posto di “Poiché $f_y(p) \neq 0$,” e “otteniamo” al posto di “ricaviamo”.

Pag. 35, riga -2: “ $f_x(p) = -4, f_y(p) = 1, f_{xx}(p) = -12, f_{xy}(p) = 1$ ” al posto di “ $f_x(p) = 4, f_y(p) = -1, f_{xx}(p) = 12, f_{xy}(p) = -1$ ”.

Pag. 35, riga -1: “ $\tilde{\kappa} = 4/17^{3/2}$ ” al posto di “ $\tilde{\kappa} = -4/17^{3/2}$ ”.

Pag. 37, riga 8: “ $(1 + \cos(4\pi t + \pi), \sin(4\pi t + \pi))$ ” al posto di “ $(1 + \cos(2\pi t + \pi), \sin(2\pi t + \pi))$ ”.

Pag. 41, riga 9: “supporto” invece di “suporto”.

Pag. 42, riga 16: “ C^k ” al posto di “ C^∞ ”.

Pag. 42, riga 18: aggiungere “di classe C^{k+2} ” all’inizio della riga.

- Pag. 44, riga 10: “ $\mathbf{n}^\varepsilon \equiv \mathbf{n}$ ” al posto di “ $\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{n}$ ”.
- Pag. 44, riga 11: aggiungere all’inizio la seguente definizione: “La *retta normale affine* di una curva regolare $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nel punto $\sigma(t)$ è la retta passante per $\sigma(t)$ e parallela al versore normale $\mathbf{n}(t)$.”
- Pag. 44, riga 13: cancellare “se $\mathbf{n} \equiv \pm \mathbf{n}_1$, cioè”, e aggiungere “affine” dopo “normale”.
- Pag. 44, riga 14: “In particolare” al posto di “In tal caso”.
- Pag. 45, riga 18: “ $\sigma(t)$ ” al posto di “ $\sigma(s)$ ”.
- Pag. 51, riga –17: “ t_1, t_2 ” al posto di “ t'_1, t''_2 ”.
- Pag. 51, riga –15: “ t_{r-1} ” al posto di “ t_{r-1}^{r-1} ”.
- Pag. 54, riga –18: “omeomorfismi” al posto di “omeomorfismo”.
- Pag. 56, riga 3: “1.2” al posto di “1.2.(d)”.
- Pag. 64, riga 10: “3-regolare” al posto di “4-regolare”.
- Pag. 71, riga –11: “ $\phi(a)$ ” al posto di “ $\phi(0)$ ”.
- Pag. 75, riga –15: aggiungere la frase “di sostegno C ” dopo “di classe C^2 ”.
- Pag. 76, riga 6: “ $\sigma(U_{t_0})$ è un aperto di C anche perché il suo complementare $\sigma([a, b] \setminus U_{t_0})$ è un compatto contenuto in C .”
- Pag. 76, riga 19: “ U_{t_r} ” al posto di “ I_{t_r} ”.
- Pag. 79, riga –4: “ p ” al posto di “ p_0 ”.
- Pag. 83, riga 14: “5.11” al posto di “5.5”.
- Pag. 86, riga 8: “continua a destra ma non a sinistra” al posto di “continua a sinistra ma non a destra”.
- Pag. 94, riga 1: “un arco di Jordan” al posto di “una curva regolare semplice piana”.
- Pag. 94, riga 3: aggiungere alla fine la frase “Trova una curva regolare semplice piana di classe C^2 a tratti con sostegno C chiuso in \mathbb{R}^2 tale che $\mathbb{R}^2 \setminus C$ abbia più di due componenti connesse.”
- Pag. 117, riga –1: “nello” al posto di “dello”.
- Pag. 119, riga –9: “ $\varphi(x) = G(x, 0)$ per ogni $x \in U_1$, per cui φ ” al posto di “ $\varphi|_{U_1} = G|_{U_1 \times \{0\}}$, in quanto restrizione di un omeomorfismo.”.
- Pag. 121, riga 6: “esista” al posto di “esiste”.
- Pag. 127, riga –6: “un aperto” al posto di “una apert”.
- Pag. 129, riga –8: “il Problema 3.4” al posto di “l’Esercizio 3.4”.
- Pag. 131, riga 12: “ $(\pi|_{S \cap W_0})^{-1}$ ” al posto di “ $(\pi|_S)^{-1}$ ”.
- Pag. 142, riga –10: “Esempio 3.4.11” al posto di “Definizione 3.4.12”.
- Pag. 149, riga 8: “globale” al posto di “regolare”.
- Pag. 150, riga –2: cancellare “e”.
- Pag. 158, riga 6: aggiungere “i sostegni di” prima di “due curve”.
- Pag. 158, riga 9: aggiungere “sostegni di” prima di “curve regolari”.
- Pag. 171, riga 4: “ $T_q S$ ” al posto di “ $T_q S_1$ ”.
- Pag. 172, riga –12: “vedi gli Esercizi 4.59 e 4.60.” al posto di “vedi l’Esercizio 4.59.”
- Pag. 179, riga 16: “parametrizzazioni locali” al posto di “carte”.
- Pag. 183, riga 18: “Teorema 4.8.6” al posto di “Proposizione 4.8.6”.
- Pag. 183, riga –10: “generatrici” al posto di “generatrice”.

Pag. 187, riga 10: “ $dN_p(T_p\Gamma_h)$ ” al posto di “ $dN_p(T_p\Gamma_f)$ ”, e “ $p \in \Gamma_h$ ” al posto di “ $p \in \Gamma_f$ ”.

Pag. 196, riga -14: “ $EG - F^2$ ” al posto di “ $EF - F^2$ ”.

Pag. 197, riga 1: “parametrizzazione locale con $F \equiv f \equiv 0$ ” al posto di “parametrizzazione locale ortogonale, cioè con $F \equiv 0$ ”.

Pag. 199, riga 3: “esempi” al posto di “esempio”.

Pag. 203, riga -1: “(Proposizione 5.5.1 e Corollario 5.5.6)” al posto di “(Proposizione 5.5.1)”.

Pag. 208, riga -2: “ $(4u^2 + 4v^2 + 1)^2$ ” al posto di “ $(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}$ ”.

Pag. 209, riga 10: aggiungere prima del Problema 4.3 la seguente definizione: “Un punto p di una superficie S si dice *ombelicale* se dN_p è un multiplo dell’identità di T_pS o, in altre parole, se le due curvatures principali di S in p coincidono.”

Pag. 230, riga -1: aggiungere il seguente esercizio: “Sia S una superficie orientata con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$, e $\varphi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di S . Dimostra che

$$\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_2} = (K \circ \varphi) \partial_1 \wedge \partial_2,$$

dove K è la curvatura Gaussiana di S .”

Pag. 249, riga -8: “sembra non” al posto di “non sembra”.

Pag. 253, riga -2: cancellare “è”.

Pag. 255, riga 13: “ S ” al posto di “ S_1 ”.

Pag. 255, riga 18: cancellare il primo “la base”.

Pag. 259, riga -3: “ $|\langle \sigma'', N \circ \sigma \rangle|$ ” al posto di “ $|\langle \sigma'', N \circ \sigma \rangle|$ ”.

Pag. 260, riga -4: “ $\partial_j / \|\partial_j\|$ ” al posto di “ $\partial_j / \|\partial_j\|$ ”.

Pag. 271, riga 7: “il Problema 5.5” al posto di “l’Esercizio 5.5”.

Pag. 276, riga 11: “ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ ” al posto di “ $\begin{vmatrix} a^1 \\ a^2 \end{vmatrix}$ ”.

Pag. 278, riga -9: “nell’Osservazione 4.6.3” al posto di “nelle Osservazioni 4.5.15 e 4.6.3”.

Pag. 279, riga 14: “indipendenti” al posto di “indipendente”.

Pag. 281, riga 16: aggiungere “volte” dopo “infinite”.

Pag. 311, riga 13: “composta da vertici (comuni)” al posto di “un singolo vertice (comune)”.

Pag. 314, riga 14: “facce” al posto di “faccie”.

Pag. 315, riga -6: “(iii)” al posto di “(ii)”.

Pag. 315, riga -3: “(iv)” al posto di “(iii)”.

Pag. 318, riga 17: “ $\hat{\mathbf{n}}$ ” al posto di “ $\hat{\mathbf{n}}$ ” entrambe le volte.

Pag. 318, riga -2: “ $\hat{\mathbf{n}}$ ” al posto di “ $\hat{\mathbf{n}}$ ”.

Pag. 319, riga 6: “ $\delta > 0$ ” al posto di “ $\varepsilon > 0$ ”.

Pag. 321, riga 4: aggiungere “connesse” dopo “componenti”.

Pag. 321, riga -5: aggiungere “è lato” dopo “sul bordo”.

Pag. 323, riga 8: “Corollario 7.4.9” al posto di “Teorema 7.4.9”.

Pag. 338, riga -3: cancellare l’Esercizio 6.18.

Pag. 338, riga -1: aggiungere alla fine gli esercizi seguenti: “**6.20.** Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $p \in S$ un punto singolare di X .”

- (i) Dimostra che dX_p definisce un endomorfismo di T_pS .
- (ii) Se $\det dX_p \neq 0$ (e in tal caso diremo che p è un punto singolare *non degenera* di X), dimostra che p è un punto singolare isolato, e che l'indice di X in p è uguale al segno del determinante di dX_p .
- (iii) Dato $a \in S^2$, sia $X_a: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da $X_a(p) = a - \langle a, p \rangle p$. Dimostra che $X_a \in \mathcal{T}(S^2)$, trovane i punti singolari e calcola gli indici.
- (iv) Trova un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(S^2)$ con un solo punto singolare.

6.21. Sia $f \in C^\infty(S)$, dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie.

- (i) Dimostra che esiste un unico campo vettoriale $\nabla f \in \mathcal{T}(S)$, detto *gradiente* di f , tale che

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = df_p(v)$$

per ogni $p \in S$ e ogni $v \in T_pS$.

- (ii) Dimostra che $p \in S$ è un punto singolare per ∇f se e solo se è un punto critico di f .
- (iii) Sia $p \in S$ un punto critico di f . Dimostra che ponendo per ogni $v \in T_pS$

$$\text{Hess}_p f(v) = \left. \frac{d^2}{dt^2} (f \circ \sigma) \right|_{t=0},$$

dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una qualsiasi curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, otteniamo una forma quadratica ben definita su T_pS , detta *Hessiano* di f in p .

- (iv) Sia $p \in S$ un punto singolare di ∇f . Dimostra che p è non degenera se e solo se $\text{Hess}_p f$ è una forma quadratica non degenera.
- (v) Sia $p \in S$ un punto singolare non degenera di ∇f . Dimostra che $\text{ind}_p(\nabla f) = +1$ se e solo se $\text{Hess}_p f$ è definita positiva o negativa se e solo se p è un punto di massimo o minimo locale per f ; e che $\text{ind}_p(\nabla f) = -1$ se e solo se $\text{Hess}_p f$ è indefinita se e solo se p è un punto di sella per f .
- (vi) Supponiamo che ∇f abbia solo punti singolari non degeneri, e che S sia compatta orientabile. Indichiamo con $m(f)$ il numero di massimi o minimi locali di f , e con $s(f)$ il numero di punti di sella di f . Dimostra che $m(f) - s(f) = \chi(S)$.
- (vii) Sia S compatta orientata da una mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$, e sia $a \in S^2$ un valore regolare sia per N che per $-N$. Dimostra che $I_a = N^{-1}(\{a, -a\})$ è un insieme finito, e che il numero di punti ellittici in I_a meno il numero di punti iperbolici in I_a è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di S . (*Suggerimento:* considera la funzione $h_a \in C^\infty(S)$ data da $h_a(p) = \langle p, a \rangle$.)

Pag. 357, riga 16: “negativa” al posto di “nulla”.

Pag. 379, riga -2: “ultima sezione di questo libro, dedicata” al posto di “ultimo capitolo di questo libro, dedicato”.