

# Sistemi dinamici e sistemi caotici

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa, e-mail: abate@dm.unipi.it

## Introduzione

La teoria dei sistemi dinamici è uno dei campi della matematica che più si è sviluppato in questi ultimi cinquant'anni, e che promette di rimanere trainante anche nel nuovo secolo. Ha influenzato e sta influenzando non solo la matematica ma anche tutte le discipline scientifiche, economiche e sociali, fornendo nuovi paradigmi per lo studio e la descrizione del mondo naturale e dell'evoluzione dei sistemi sociali, finanziari ed economici. Le idee e tematiche introdotte hanno dato spunto a riflessioni filosofiche sostanziali sui concetti di caso, caos e determinismo; e le tecniche sviluppate hanno trovato un fertilissimo connubio con l'informatica, permettendo la simulazione numerica e grafica di fenomeni che altrimenti sarebbero rimasti al di fuori delle possibilità umane di studio.

In parole molto povere, un *sistema dinamico* è un sistema che si evolve nel tempo seguendo una legge ben precisa. Un sistema dinamico consiste quindi di due parti: l'insieme  $S$  (tradizionalmente chiamato *spazio delle fasi*) in cui avviene l'evoluzione del sistema; e la legge che descrive questa evoluzione. A sua volta, questa legge può essere di due tipi: *continua*, o *discreta* (e si parla conseguentemente di *sistema dinamico continuo* e di *sistema dinamico discreto*).

Nel caso di sistema dinamico continuo, la legge è descritta da un campo di velocità sull'insieme  $S$ : a ogni punto  $p$  dell'insieme viene associato un vettore  $X(p)$  che indica la direzione e la velocità verso cui si muove il sistema nel momento in cui passa dal punto  $p$ . Se indichiamo con  $x(t)$  la traiettoria (il termine tecnico è *orbita*) seguita da un oggetto posto al tempo 0 nel punto iniziale  $p_0=x(0)$ , allora il vettore tangente (la velocità)  $x'(t)$  della traiettoria al tempo  $t$  sarà dato esattamente da  $X(x(t))$ , il valore del campo di velocità nel punto  $x(t)$  attraversato dalla traiettoria all'istante  $t$ . La natura della traiettoria seguita non dipende dall'oggetto ma solo dal campo  $X$  e dal punto iniziale  $p_0$ : in questo senso, il campo  $X$  determina un'evoluzione dello spazio delle fasi secondo la legge  $x'(t) = X(x(t))$ , che è un'equazione differenziale ordinaria, oggetto matematico ben noto (e fondamentale per moltissime applicazioni) fin dal diciassettesimo secolo. Infatti, come vedremo fra un attimo, la novità del campo dei sistemi dinamici non consiste negli oggetti che studia, ma nel tipo di domande che si pone su di essi.

L'esempio paradigmatico di sistema dinamico continuo, quello che ha fatto nascere l'intero soggetto, è un sistema di  $n$  corpi in movimento soggetti solo alla reciproca attrazione gravitazionale; per esempio, il nostro Sistema Solare. Il *problema degli  $n$  corpi* consiste nella descrizione dell'evoluzione nel tempo di questo sistema. Ciascun corpo ha una posizione e una velocità; e sia la posizione che la velocità sono descritte da tre coordinate, una per ciascuna dimensione spaziale. Quindi una singola configurazione iniziale è descritta da  $6n$  coordinate, per cui lo spazio delle fasi (che può essere pensato come l'insieme delle possibili configurazioni del sistema che si vuole studiare) è uno spazio a  $6n$  dimensioni. La legge della gravitazione universale fornisce il campo  $X$  che descrive l'evoluzione di un punto dello spazio delle fasi – cioè la variazione nel tempo di posizione e velocità degli  $n$  corpi a partire da una data configurazione iniziale. Risultati generali della teoria delle equazioni differenziali ordinarie assicurano che, data la configurazione iniziale, il sistema può evolversi in modo unico: in altre parole, *lo stato iniziale determina completamente l'evoluzione futura del sistema*. Risolvere il problema degli  $n$  corpi consiste quindi nel descrivere questa evoluzione conoscendo la configurazione iniziale.

Lo studio del problema dei 2 corpi fu una delle principali motivazioni per lo sviluppo del calcolo infinitesimale da parte di Newton e Leibniz, e la sua soluzione un'evidente testimonianza della potenza dei loro risultati. Confermando le intuizioni di Keplero, Newton mostrò che i due corpi si muovono lungo orbite ellittiche, paraboliche o iperboliche con fuoco nel centro di massa. Il tipo di orbita dipende dai rapporti fra le masse e dalle velocità e posizioni iniziali; in particolare, se uno dei due corpi ha massa molto minore dell'altro e velocità iniziale non eccessiva, il corpo più piccolo segue un'orbita ellittica intorno al più grande (come verificato da Keplero per il sole e i pianeti).

Il problema dei 3 corpi si rivelò fin dall'inizio molto più complesso. Nonostante la determinazione di alcune soluzioni particolari da parte di Lagrange e altri nel diciottesimo secolo, i casi più generali e interessanti (come si modificerebbe il sistema Terra-Luna al passare di un meteorite di dimensioni significative?) rimasero fuori dalla portata dei matematici e fisici del diciottesimo e diciannovesimo secolo, fino al fondamentale lavoro di Poincaré del 1890. L'idea cruciale di Poincaré, che cambiò completamente il modo di affrontare questi problemi e fece nascere la teoria moderna dei sistemi dinamici, fu di chiedersi: cosa vogliamo veramente sapere del problema dei 3 corpi? Fino a quel momento, "risolvere" il problema dei 3 corpi aveva voluto dire trovare soluzioni esplicite e quantitative: formule che permettessero di predire con precisione il comportamento del sistema in qualsiasi momento futuro. Poincaré invece si rese conto di quanto fosse importante lo studio *qualitativo e a lungo termine* delle soluzioni; piuttosto che puntare a descrivere all'ultimo decimale il comportamento preciso di qualsiasi soluzione, cerchiamo di capire se le soluzioni *generiche*, una volta superato un eventuale periodo *transitorio* iniziale, si assestano su orbite periodiche o meno; se il sistema continua a evolversi per sempre oppure è sconvolto da *catastrofi* (collisioni fra pianeti, fughe all'infinito in tempo finito, eccetera); e se il sistema è *stabile*, nel senso che piccole perturbazioni alla configurazione iniziale o alla descrizione del sistema non ne modificano il comportamento qualitativo (domanda cruciale per le applicazioni, in quanto i sistemi reali non sono mai noti con precisione assoluta e sono sempre soggetti a piccole perturbazioni casuali). Quindi l'obiettivo diventa descrivere il *comportamento qualitativo asintotico* della maggior parte delle orbite, identificando in particolare le orbite stabili.

Porsi le domande giuste è solo la prima parte della soluzione; bisogna poi sviluppare le tecniche e i concetti necessari per poter ottenere le risposte. Questo richiese buona parte della prima metà del Novecento, per cui (a parte alcune rare eccezioni, quali i risultati di Birkhoff, Hopf e la dinamica olomorfa sviluppata da Julia e Fatou intorno al 1920) la teoria moderna dei sistemi dinamici iniziò a svilupparsi davvero alla fine degli anni '50. In particolare, come vedremo più oltre, negli ultimi anni sono stati ottenuti risultati che hanno confermato la fondatezza delle intuizioni di Poincaré sia per i sistemi dinamici in generale sia per lo studio del problema degli  $n$  corpi, e del nostro Sistema Solare in particolare.

Torneremo su questa e altre applicazioni dei sistemi dinamici nell'ultima sezione di questo saggio; riprendiamo il discorso generale notando che non tutti i sistemi che si evolvono nel tempo si prestano a essere descritti da un sistema dinamico continuo. Un tipico esempio è dato dalla dinamica delle popolazioni. Prendiamo una colonia di cellule. In condizioni ideali, le cellule si riproducono per scissione dopo un tempo determinato  $t_0$ : se all'inizio ci sono  $N_0$  cellule, al tempo  $t_0$  ce ne sono  $2N_0$ , al tempo  $2t_0$  ce ne sono  $4N_0$ , e in generale al tempo  $nt_0$  ce ne sono  $2^n N_0$ . Il numero di cellule cambia a intervalli di tempo discreti, tramite una legge ben precisa, raddoppiando da un intervallo al successivo.

Un sistema dinamico *discreto* si chiama così proprio perché si evolve a intervalli di tempo discreti, e non senza soluzione di continuità. Formalmente questo vuol dire che sullo spazio delle fasi  $S$  (i cui punti rappresentano tutti i possibili stati del sistema che stiamo studiando) è definita una funzione  $f$  che associa a qualsiasi punto di  $S$  un altro punto  $f(p)$  sempre di  $S$ , la sua evoluzione dopo un intervallo

discreto di tempo. L'*orbita* (o traiettoria) di  $p$  in questo caso consiste nell'insieme di punti  $p, f(p), f(f(p)), \dots, f^n(p), \dots$ , dove  $f^n$  è la  $n$ -esima *iterata* di  $f$ , cioè la funzione che si ottiene applicando  $f$  per  $n$  volte di seguito. Anche stavolta, l'oggetto del sistema dinamico è ben noto e ampiamente studiato in altri contesti (una funzione); il punto che distingue la teoria dei sistemi dinamici da altre branche della matematica è il tipo di domande che ci si pone. Infatti, come nel caso continuo, non siamo interessati a una formula esplicita che ci permetta di calcolare tutte le iterate di  $f$ ; siamo invece interessati al comportamento *qualitativo* e *a lungo termine* delle orbite *generiche*, e alla *stabilità* di questo comportamento rispetto a perturbazioni del punto iniziale dell'*orbita* o della funzione stessa.

Nell'esempio precedente, lo spazio delle fasi era l'insieme  $\mathbf{N}$  dei numeri naturali, e la funzione  $f$  era la moltiplicazione per due:  $f(N)=2N$ . In particolare,  $f^n(N)=2^n N$ , per cui tutte le orbite (tranne quella che comincia in  $N=0$ ) divergono all'infinito: la popolazione di cellule cresce senza limiti. Chiaramente, questo non è un comportamento realistico. Un modello migliore prevede l'esistenza di un numero ideale di cellule che l'ambiente è in grado di sostenere; al di sotto di quel numero, la popolazione di cellule tenderà a crescere, mentre al di sopra di quel numero tenderà a diminuire (per scarsità di cibo, sovrappopolazione, eccetera). Indichiamo con  $q$  il rapporto fra il numero di cellule effettivamente presenti nella popolazione e il numero ideale; in particolare,  $q>1$  vuol dire che la popolazione ha superato il numero ideale, mentre  $q<1$  vuol dire che non l'ha raggiunto. Sempre supponendo che nascite e morti avvengano a intervalli discreti di tempo, un modello discreto di crescita della popolazione di cellule è dato da una funzione  $f$  che associa al rapporto  $q$  il valore  $f(q)$  del rapporto dopo un intervallo discreto di tempo. Una scelta tipica per la funzione  $f$  è  $f(q)=kq(2-q)$ , dove  $k$  è una costante che misura l'attitudine alla sopravvivenza della popolazione di cellule. In questo modo, il fattore  $kq$  rappresenta una crescita della popolazione proporzionale al numero di cellule presenti, mentre il fattore  $2-q$  rappresenta l'influenza del numero ideale sullo sviluppo della popolazione. Infatti, se  $q<1$ , cioè se la popolazione è al di sotto del valore ideale, allora  $2-q>1$ , per cui il fattore  $2-q$  tende a far aumentare la popolazione; invece, se  $q>1$ , cioè se la popolazione è al di sopra del valore ideale, allora  $2-q<1$ , per cui il fattore  $2-q$  tende a far diminuire la popolazione. Contrariamente al caso precedente, non è possibile (né utile) trovare una formula esplicita per il calcolo di  $f^n$ ; inoltre, a seconda del valore di  $k$  il comportamento qualitativo delle orbite cambia, e semplici simulazioni al calcolatore rivelano fenomeni sensibilmente più complessi (e realistici) di quelli presenti nel modello banale descritto dal mero raddoppio della popolazione a ogni passo. Inoltre, la teoria dei sistemi dinamici discreti permette di prevedere il destino a lungo termine della popolazione di cellule a seconda di  $k$  e del valore iniziale di  $q$ .

I sistemi dinamici continui e discreti non sono legati solo dal tipo di domande che ci si pone su di essi, ma sono spesso due facce di una stessa medaglia. A ogni sistema dinamico continuo è naturalmente associato un sistema dinamico discreto: basta seguire l'evoluzione del sistema a intervalli di tempo discreti. L'osservazione a intervalli regolari di tempo di un fenomeno naturale è una procedura intrinseca al metodo scientifico occidentale; lo studio delle *serie temporali* associate a un fenomeno è spesso un passo cruciale per la comprensione dei meccanismi che ne regolano l'evoluzione. Ma, oltre a essere di interesse teorico, è anche fondamentale per lo studio e la simulazione su calcolatore dei sistemi dinamici continui. Infatti, i calcolatori ragionano intrinsecamente a tempo discreto: possono eseguire solo un numero finito di operazioni per unità di tempo. Quindi per rappresentare in un calcolatore un sistema dinamico continuo (un'equazione differenziale ordinaria) è necessario approssimarla con un sistema dinamico discreto (uno schema iterativo). È importante sottolineare come questa possibilità sia stata essenziale per lo sviluppo recente dei sistemi dinamici, e soprattutto delle loro applicazioni, in quanto ha permesso di simulare su calcolatore l'evoluzione di sistemi dinamici anche molto complessi, offrendo la possibilità sia di confrontare l'andamento del modello con l'evoluzione dei fenomeni reali, sia di testare ipotesi teoriche su ampie classi di sistemi

dinamici. Le tecniche informatiche e di analisi numerica sviluppate per approssimare efficacemente un sistema dinamico continuo con uno discreto sono molto sofisticate; e devono esserlo, perché qualsiasi approssimazione introduce un errore, e, come vedremo, i sistemi dinamici possono essere estremamente sensibili agli errori.

Non tutti i sistemi dinamici sono interessanti; tipicamente, quelli lineari (in cui la funzione o l'equazione differenziale è lineare, cioè la variazione del fenomeno è proporzionale alla variazione dello stimolo, come accadeva nel modello banale di evoluzione della popolazione di cellule) non lo sono. Più precisamente, il comportamento delle orbite di sistemi lineari è molto semplice, e nella maggior parte dei casi non è un comportamento che possa realisticamente descrivere un fenomeno naturale o sociale sul lungo periodo (le approssimazioni lineari spesso usate soprattutto in campo ingegneristico sono semplificazioni utili ma troppo rozze della realtà, che è sovente non lineare). Invece, *sistemi dinamici non lineari anche semplici presentano quasi sempre comportamenti complessi*. Rovesciando questa frase troviamo uno dei principali motivi della diffusione e dell'interesse dei sistemi dinamici: *comportamenti complessi possono essere rappresentati da sistemi dinamici (non lineari) anche molto semplici*. La complessità è introdotta dalla ripetizione della funzione che genera il sistema, e non dalla complessità intrinseca della funzione stessa. Questo risponde anche a un principio di *economicità* spesso presente in natura (e sempre cercato dalla scienza): un fenomeno complesso viene generato ripetendo azioni elementari, per cui è sufficiente che il sistema biologico, fisiologico, fisico, economico, eccetera sia in grado di generare azioni elementari a livello microscopico per ottenere comportamenti complessi a livello macroscopico.

Ma quali sono i possibili comportamenti delle orbite di un sistema dinamico? Il comportamento più semplice è non muoversi: un *punto fisso* (o *stazionario*, o di *equilibrio*), che coincide con la propria orbita. Nel caso continuo, un punto fisso è un punto  $p$  in cui il campo  $X$  si annulla:  $X(p)=0$ . Infatti, questo vuol dire che l'orbita uscente da  $p$  ha velocità zero, per cui di fatto non esce e il sistema non si evolve. Nel caso discreto, un punto fisso è un punto  $p$  tale che  $f(p)=p$ ; di conseguenza  $f^n(p)=p$  per ogni  $n$ , per cui l'orbita rimane ferma in  $p$ . Non tutti i punti fissi sono uguali, però. Esistono punti fissi *attrattivi*, che attraggono tutte le orbite che partono sufficientemente vicino; punti fissi *repulsivi*, che invece respingono tutte le orbite che partono sufficientemente vicino; punti fissi *iperbolici*, che attraggono le orbite lungo alcune direzioni e le respingono lungo altre direzioni; punti fissi *ellittici*, che intrappolano le orbite vicine impedendo loro di allontanarsi ma senza farle avvicinare troppo, come delle circonferenze attorno a un centro; e altri tipi ancora di punti fissi, che generano comportamenti locali particolarmente complessi.

Il comportamento più semplice dopo quello dei punti fissi è quello dei punti *periodici*, la cui orbita torna esattamente al punto di partenza dopo un intervallo finito di tempo (un numero finito di iterazioni). Anche i punti periodici si possono classificare in attrattivi, repulsivi, iperbolici, ellittici, e altri. Questa classificazione è basata sul comportamento *locale* delle orbite vicino ai punti periodici; ma, come vedremo, questo comportamento ha spesso delle conseguenze sull'evoluzione *globale* del sistema dinamico, anche lontano dal punto periodico considerato. Questa dialettica *locale/globale* è una delle più fruttuose nello studio dei sistemi dinamici.

Al lato opposto dello spettro dei comportamenti possibili delle orbite si situano i punti con orbita *densa*, cioè con un'orbita che, a patto di aspettare abbastanza a lungo, giunge arbitrariamente vicino a qualsiasi altro punto dello spazio delle fasi; un sistema dinamico con un'orbita densa è detto *topologicamente transitivo*. Contrariamente a quanto potrebbe sembrare, orbite dense sono piuttosto comuni nei sistemi dinamici; e talvolta è possibile suddividere un sistema dinamico in sottosistemi indipendenti ognuno dei quali topologicamente transitivo. Più precisamente, diremo che un sottoinsieme  $T$  dello spazio delle fasi è *invariante* se contiene l'orbita di qualsiasi suo punto; e che è

*chiuso* se contiene qualsiasi punto che può essere arbitrariamente approssimato da punti di  $T$ . Un sottoinsieme invariante chiuso che contiene un'orbita densa coincide necessariamente con l'intero spazio delle fasi, per cui un sistema dinamico topologicamente transitivo è, dal punto di vista della dinamica topologica, composto da un solo pezzo. Vedremo che sistemi dinamici importanti possono essere decomposti in un numero finito di sottoinsiemi invarianti chiusi topologicamente transitivi – e quindi dinamicamente indecomponibili e indipendenti l'uno dall'altro.

Le orbite dense sono un esempio estremo di *ricorrenza*, altro concetto importante nello studio dei sistemi dinamici. Un punto  $p$  è *ricorrente* se la sua orbita torna arbitrariamente vicino a  $p$ . I punti periodici e i punti con orbita densa sono ricorrenti; ma esistono molte altre forme di ricorrenza. Una condizione lievemente più tecnica di ricorrenza ma spesso più utile è quella di punto non vagante. Diremo che un punto  $p$  è *vagante* se l'orbita di tutti i punti abbastanza vicini a lui si allontana senza mai tornare indietro; e che è *non vagante* altrimenti. I punti ricorrenti sono non vaganti; inoltre, non è difficile dimostrare che la dinamica a lungo termine dei sistemi è concentrata vicino al sottoinsieme dei punti non vaganti dello spazio delle fasi. Per questo motivo, spesso lo studio della dinamica può essere ricondotto a capire cosa accade vicino all'insieme dei punti non vaganti.

I sistemi dinamici più interessanti sono quelli in cui coesistono punti periodici e orbite dense. Da un lato abbiamo una singola orbita che approssima arbitrariamente bene qualsiasi punto dello spazio delle fasi, e dall'altro arbitrariamente vicino a qualsiasi punto troviamo un punto periodico. In altre parole, vicino a qualsiasi punto dello spazio troviamo orbite con comportamenti diametralmente opposti (dense oppure periodiche). Di conseguenza, questo sistema è *sensibile alle condizioni iniziali*: cambiando arbitrariamente poco il punto di partenza dell'orbita, il comportamento dell'orbita sul lungo periodo può mutare drasticamente. La sensibilità alle condizioni iniziali è il principale tratto distintivo dei *sistemi dinamici caotici*, così chiamati proprio perché hanno orbite dal comportamento apparentemente caotico.

Vale la pena sottolineare che questa forma di caos è un *caos deterministico*, e non un'evoluzione *casuale* del sistema. Se possedessimo un'informazione completa sul punto di partenza dell'orbita e sulla legge che descrive il sistema dinamico, saremmo in grado di seguire con esattezza l'evoluzione di tutta l'orbita. Ma usualmente non possediamo questa informazione completa; conosciamo il punto di partenza solo con una certa, per quanto alta, approssimazione. E in tal caso la sensibilità alle condizioni iniziali vanifica qualsiasi tentativo di predire il comportamento dell'orbita sul lungo periodo: l'approssimazione iniziale viene amplificata fino a rendere apparentemente casuale il comportamento dell'orbita.

Invece di essere una debolezza, questa caratteristica dei sistemi dinamici caotici ne amplia l'applicabilità. Prima di tutto, come già notato, ci permette di riprodurre comportamenti apparentemente casuali con un modello semplice (si ottengono sistemi dinamici caotici usando anche semplici modelli quadratici); ma anche per un motivo più profondo. Sistemi fisici, biologici ed economici sono molto spesso soggetti a perturbazioni piccole ma casuali, che influenzano sia pure di poco ma in maniera (apparentemente) non predicibile a priori l'evoluzione del sistema. Questo sembrerebbe rendere difficile l'uso in questi contesti di modelli deterministici quali i sistemi dinamici di cui stiamo parlando. Invece, un risultato cruciale valido per diversi sistemi dinamici caotici (per esempio quelli *iperbolici*, che definiremo nella prossima sezione), il *lemma di pedinamento* (o *shadowing lemma*), mostra come i sistemi dinamici caotici sono esattamente il modello giusto da usare in questi casi. Infatti, il lemma di pedinamento asserisce che arbitrariamente vicino a qualsiasi successione di stati del sistema ottenuta applicando a ogni iterazione una piccola perturbazione casuale possiamo trovare una *vera* orbita del sistema dinamico deterministico non perturbato. In altre parole, in mancanza di precisione assoluta, il comportamento di un sistema perturbato casualmente è

*indistinguibile* dal comportamento di un sistema deterministico; in assenza di precisione assoluta non siamo in grado di distinguere un sistema soggetto a piccole perturbazioni casuali da un sistema dinamico caotico completamente deterministico. Quindi l'uso di modelli stocastici o di modelli deterministici per lo studio di questi fenomeni diventa in buona parte questione di gusto dello scienziato.

Un'ulteriore conseguenza positiva di questo fenomeno è stata la possibilità di usare tecniche probabilistiche e statistiche nello studio dei sistemi dinamici, che ha portato alla nascita di una teoria dinamica probabilistica, la *teoria ergodica*. L'impollinazione incrociata dei sistemi dinamici con altre branche della matematica (e della scienza) è stata una costante nello sviluppo della teoria da Poincaré a oggi, ed è uno dei motivi che rendono questo campo di ricerca così interessante, vero campo di frontiera interdisciplinare.

La sensibilità alle condizioni iniziali pone però un problema. Abbiamo più volte detto che una caratteristica importante dei sistemi dinamici è la possibilità di simularli su un calcolatore. L'uso dei calcolatori introduce necessariamente dei piccoli errori; la sensibilità alle condizioni iniziali amplifica questi errori; come possiamo quindi fidarci dei risultati della simulazione?

Ci sono varie risposte a questa domanda. La prima è fornita dal lemma di pedinamento, che ci assicura che orbite ottenute con piccoli errori sono seguite arbitrariamente vicino da orbite vere; ma non è l'unica. I sistemi dinamici possono contenere *attrattori*: sottoinsiemi dello spazio delle fasi che attirano tutte le orbite che partono da punti vicini. Un esempio sono i punti fissi o periodici attrattivi, ma esistono attrattori (detti *attrattori strani*) con struttura geometrica molto più complessa, spesso frattale. Storicamente, gli attrattori strani sono stati uno dei motivi della nascita della teoria dei sistemi dinamici caotici. Esperimenti numerici effettuati da Lorenz alla fine degli anni '50 con un semplice (ma non lineare) modello dinamico dell'atmosfera rivelarono il fenomeno della sensibilità alle condizioni iniziali: punti di partenza lievemente diversi davano origine a orbite macroscopicamente diverse. Eppure, tutte queste orbite sembravano accumularsi su uno stesso sottoinsieme dello spazio delle fasi, la cui struttura geometrica rivelava nuovi dettagli a ogni ingrandimento (tipico fenomeno frattale). In altre parole, gli esperimenti numerici di Lorenz suggerirono l'esistenza di un attrattore strano; e tutte le orbite uscenti da punti vicini avevano comportamento qualitativo a lungo termine paragonabile, pur evolvendo in maniera quantitativamente diversa. Un altro importante modello, questa volta discreto, che presentava caratteristiche analoghe a quello di Lorenz fu introdotto qualche anno dopo da Hénon.

La presenza di un attrattore (strano o meno) permette quindi di controllare il comportamento a lungo termine delle orbite anche in presenza di sensibilità alle condizioni iniziali. Occorre però sottolineare che le simulazioni numeriche possono solo suggerire l'esistenza di un attrattore strano, e non dimostrarne la presenza; potrebbe essere un artefatto creato dalle approssimazioni numeriche e non esistere nel sistema dinamico originale. Le simulazioni numeriche danno risultati significativi quando il sistema studiato (o almeno l'attrattore) è *strutturalmente stabile*: variando di poco il sistema la dinamica qualitativa non cambia (in particolare, l'attrattore persiste). La classe principale di sistemi dinamici strutturalmente stabili è quella dei sistemi *iperbolici* introdotti da Smale e Anosov nei primi anni '60 (e di cui parleremo più in dettaglio nella prossima sezione); l'identificazione di classi più ampie di sistemi con caratteristiche stabili, e la comprensione dei fenomeni che rompono la stabilità, è uno dei problemi principali della teoria dei sistemi dinamici, problema su cui ci sono stati significativi progressi negli ultimi anni (vedi la prossima sezione). Fra questi, la dimostrazione di Tucker (2002) dell'esistenza effettiva dell'attrattore strano di Lorenz, ottenuta seguendo la linea tracciata dai fondamentali risultati di Benedicks e Carleson (1991) sull'attrattore strano di Hénon.

La complessità della geometria degli attrattori, e più in generale dell'evoluzione delle orbite, ha portato alla necessità di misurarne in qualche modo la significatività e l'influenza, e alla nascita di diversi modi di quantificare questa complessità. Nel caso degli attrattori, una misura molto importante è la *dimensione di Hausdorff*. Nella geometria usuale, un punto ha dimensione zero, una curva dimensione uno, una superficie dimensione due, e un volume dimensione tre. La dimensione si riflette sulla crescita della misura degli insiemi: un disco bidimensionale ha area che cresce come il quadrato del raggio, mentre una palla tridimensionale ha volume che cresce come il cubo (la terza potenza) del raggio. Insiemi complessi quali gli attrattori strani hanno misure che crescono come potenze intermedie del raggio; questa potenza è chiamata *dimensione di Hausdorff* dell'insieme, ed è spesso un numero non intero (la dimensione di Hausdorff dell'attrattore di Lorenz è stimata essere circa 2.06, per cui l'attrattore di Lorenz è in un certo senso "più grosso" di una superficie, ma meno di un volume). Maggiore la dimensione di Hausdorff, più complesso è l'attrattore e maggiore è la sua influenza sul sistema dinamico; alcuni fenomeni possono avvenire solo in presenza di attrattori di specifica dimensione di Hausdorff.

La complessità delle orbite è invece misurata tramite l'*entropia* di Kolmogorov-Sinai. Ispirata dalla teoria dell'informazione di Shannon, l'entropia misura la quantità di informazione necessaria per descrivere il comportamento a lungo termine delle orbite generiche; maggiore è l'entropia più complesse sono le orbite. Nei sistemi dinamici caotici, l'entropia è sempre positiva; i sistemi a entropia zero sono tipicamente più semplici da studiare. Tra parentesi, l'entropia dei sistemi dinamici è strettamente correlata all'entropia della meccanica statistica, tanto che è possibile definire anche una *pressione* di un sistema dinamico, e questi concetti di entropia e pressione hanno relazioni analoghe a quelli delle loro controparti in meccanica statistica.

Nel paragrafo precedente abbiamo usato il termine "orbite generiche". Questa è un'altra idea cruciale per lo studio dei sistemi dinamici. La complessità e varietà dei comportamenti possibili rende impraticabile ogni tentativo di descrivere il comportamento a lungo termine di *tutte* le orbite del sistema. Del resto, non è neanche strettamente necessario; per avere un'idea sensata del comportamento del sistema può essere sufficiente conoscere il comportamento della *maggior parte* delle orbite, escludendo solo eventuali eccezioni poco significative. Il termine tecnico che si usa per indicare la "maggior parte" delle orbite è *generico*: siamo quindi interessati al comportamento delle orbite generiche. Un'interessante caratteristica della teoria moderna dei sistemi dinamici è che la parola "generico" ha assunto due significati diversi: un significato *topologico*, e un significato *probabilistico*.

Si dice che una classe di orbite è "topologicamente generica" se le orbite della classe passano arbitrariamente vicino a qualsiasi punto dello spazio delle fasi (più precisamente, se i punti iniziali delle orbite della classe formano un insieme *residuale*, cioè ottenuto come intersezione numerabile di aperti densi, che è una condizione più forte della semplice densità). Si dice invece che una classe di orbite è "probabilisticamente generica" se un punto preso a caso dello spazio delle fasi appartiene a un'orbita della classe. È importante notare che queste due nozioni di genericità sono *diverse*: ci sono classi di orbite topologicamente generiche che non sono probabilisticamente generiche, e viceversa. Ben più importante, ci sono *comportamenti* che sono topologicamente generici senza esserlo probabilisticamente, e viceversa; i risultati forniti dai due approcci sono distinti, e complementari.

Questo concetto di genericità va applicato anche ai sistemi dinamici nel loro complesso. Di nuovo, il programma di descrivere il comportamento a lungo termine di *tutti* i sistemi dinamici è impraticabile; sono troppi, e troppo diversi. Un obiettivo più realistico è quello di descrivere il comportamento a lungo termine dei sistemi dinamici *generici*, quelli con i comportamenti più tipici, escludendo le eccezioni. Negli anni '60 si sperava che i sistemi strutturalmente stabili (e in particolare quelli iperbolici) fossero generici; la scoperta negli anni '70 del fenomeno di Newhouse della genericità

locale di sistemi non strutturalmente stabili con infinite orbite periodiche attrattive ha infranto questa speranza, aprendo però la strada allo studio di sistemi più generali, studio che ha avuto frutti particolarmente significativi negli ultimi anni.

Anche in questo contesto, il concetto di generico ha il doppio significato di topologicamente o probabilisticamente generico; inoltre dipende fortemente dal tipo di sistemi che si considerano. Per esempio, sistemi dinamici *conservativi* (che preservano l'area, o, in termini fisici, l'energia) sono altamente non generici, in nessun senso del termine. D'altra parte, lo studio di questi sistemi è estremamente interessante, e importante per le applicazioni: tutti i sistemi Hamiltoniani, e più in generale simplettici, sono conservativi. Quindi ha senso tentare di classificare i sistemi dinamici conservativi generici, anche se hanno comportamenti completamente diversi da quelli di un sistema dinamico generico qualsiasi.

La frase “punto preso a caso” usata prima traduce in linguaggio comune concetti probabilistici e statistici molto importanti per lo studio dei sistemi dinamici. Fin dai pionieristici lavori di Birkhoff, ispirati da Poincaré, si è visto come sia spesso possibile associare a un sistema dinamico delle *misure invarianti di probabilità* che descrivono le proprietà statistiche delle orbite. Particolarmente importanti sono le *misure ergodiche*, per le quali vale il *teorema di Birkhoff*: il tempo medio che quasi ogni orbita trascorre in una determinata regione dello spazio delle fasi è pari alla misura della regione (e, più in generale, la media temporale di una funzione osservabile è pari alla sua media spaziale rispetto alla misura ergodica). Non tutti i sistemi dinamici possiedono misure ergodiche. Infatti, l'esistenza di una misura ergodica implica che il sistema è, dal punto di vista probabilistico, costituito da un unico pezzo: un sottoinsieme invariante o ha misura zero oppure ha complementare di misura zero. In un certo senso, l'ergodicità è l'equivalente probabilistico della transitività topologica. Curiosamente, la dimostrazione completa dell'ergodicità del modello statistico paradigmatico di sistema ergodico, il gas ideale rappresentato da sfere rigide con collisioni proposto da Boltzmann nel 1880 e formalizzato matematicamente da Sinai nel 1963, è stata annunciata solo di recente (Simányi, 2008; lo stesso Simányi nel 2004 aveva dimostrato l'ergodicità di gas generici), nonostante questo modello abbia ispirato e guidato la meccanica statistica per più di un secolo.

Un sostituto delle misure ergodiche sono le *misure fisiche* (o di Sinai-Ruelle-Bowen), che sono quelle per cui il teorema di Birkhoff vale per un insieme di orbite di volume positivo, il *bacino* della misura, anche se non per tutte le orbite. In altre parole, una misura fisica descrive le proprietà statistiche di un insieme consistente, anche se non generico, di orbite; e l'equivalente probabilistico della decomposizione topologica in insiemi invarianti chiusi topologicamente transitivi potrebbe essere l'esistenza di un numero finito di misure fisiche i cui bacini comprendano quasi ogni punto dello spazio delle fasi. Come vedremo, sono state identificate vaste classi di sistemi in cui questa decomposizione è possibile, per cui la dinamica statistica è descritta da un numero finito di misure fisiche.

Quelle illustrate finora sono solo alcune delle caratteristiche più importanti della teoria dei sistemi dinamici; nel resto di questo saggio descriveremo, senza alcuna pretesa di completezza, alcuni degli sviluppi più recenti e significativi avvenuti negli ultimi anni, trattando principalmente l'aspetto matematico della teoria ma non escludendo applicazioni particolarmente suggestive a fisica, economia e biologia. Molti altri risultati avrebbero meritato di essere citati: per esempio, i lavori di Gelfreich (2002), di Ginzburg e Gürel (2003) di Hofer, Wysocki e Zehnder (2003) e di Fathi e Siconolfi (2004) sulla dinamica Hamiltoniana, quelli di Kontsevich e Zorich (2003) e di Eskin, Masur e Zorich (2003) sulla dinamica di superfici di traslazione, quelli di Gambaudo e Ghys (2006) sulle relazioni fra dinamica e nodi, quelli di Akin, Hurley e Kennedy (2003) sulla dinamica topologica, quelli di Gallay e Wayne (2002) sulla dinamica infinito-dimensionale, e molti altri ancora. Rimandiamo ai volumi in bibliografia per una presentazione più vasta, completa e approfondita.



## Oltre l'iperbolico

Come più volte accennato nell'introduzione, la categoria di sistemi dinamici più studiata è quella dei sistemi dinamici *uniformemente iperbolici* introdotti da Smale e Anosov negli anni '60. In questi sistemi la dinamica si concentra in un insieme limite invariante (detto *insieme iperbolico*) ove lo spazio tangente può essere decomposto in direzioni (uniformemente) contratte e direzioni (uniformemente) espanse. Un'orbita periodica iperbolica è un esempio di insieme iperbolico, ma in generale gli insiemi iperbolici possono essere geometricamente molto più complicati. L'esempio paradigmatico di sistema uniformemente iperbolico, il *ferro di cavallo di Smale*, ha un insieme iperbolico frattale costituito dal prodotto di due insiemi di Cantor (una sorta di pulviscolo così concentrato da non avere punti isolati e da possedere una dimensione di Hausdorff maggiore di 1, cioè maggiore di quella di un segmento). Se l'insieme iperbolico coincide con l'intero spazio delle fasi, il sistema dinamico si chiama *sistema di Anosov*. Se l'insieme iperbolico coincide con l'insieme dei punti non vaganti (è il caso più interessante), si dice che il sistema soddisfa l'*Assioma A* di Smale.

A ogni punto  $p$  di un insieme iperbolico possiamo associare l'insieme  $W^s(p)$ , detto *varietà stabile* di  $p$ , dei punti dello spazio delle fasi la cui orbita converge asintoticamente nel futuro all'orbita di  $p$ ; e l'insieme  $W^u(p)$ , detto *varietà instabile* di  $p$ , dei punti la cui orbita converge asintoticamente nel passato (cioè per tempi negativi) all'orbita di  $p$ . Le varietà stabili sono uniformemente contratte dal sistema dinamico, mentre le varietà instabili sono uniformemente espanse. Inoltre, l'insieme iperbolico si decompone (*decomposizione spettrale* di Smale) nell'unione di un numero finito di componenti invarianti, detti *insiemi basici*, su cui il sistema è topologicamente transitivo, i punti periodici sono densi (in particolare, un sistema dinamico uniformemente iperbolico è caotico), e per cui esiste una misura ergodica (in particolare, le proprietà statistiche del sistema dinamico sono completamente descritte da un numero finito di misure fisiche: la decomposizione topologica coincide con la decomposizione probabilistica). Infine, la dinamica sullo spazio delle fasi è essenzialmente determinata dal comportamento delle varietà stabili e instabili dei punti dell'insieme iperbolico.

I sistemi dinamici uniformemente iperbolici sono strutturalmente stabili. Più precisamente, la congettura di Smale e Palis, dimostrata nel caso discreto da Robinson e Mañé (1987) e nel caso continuo da Hayashi (1997), asserisce che la stabilità strutturale è equivalente all'iperbolicità dell'insieme dei punti non vaganti assieme alla trasversalità delle intersezioni fra varietà stabili e instabili. Invece, i sistemi uniformemente iperbolici, contrariamente a quanto sperato inizialmente da Smale, non sono generici. Infatti, Newhouse negli anni '70 ha costruito esempi di sistemi dinamici con infinite orbite periodiche attrattive che impediscono la genericità dei sistemi uniformemente iperbolici (che possono avere solo un numero finito di orbite periodiche attrattive); e Kaloshin (2000) ha mostrato come il numero di orbite periodiche in sistemi generici possa crescere anche più che esponenzialmente (mentre nei sistemi uniformemente iperbolici cresce al massimo esponenzialmente).

Per cercare di identificare comportamenti generici occorre quindi rilassare l'ipotesi di uniforme iperbolicità. Negli anni '70 Pesin ha introdotto la nozione di *iperbolicità non uniforme*: invece di richiedere una decomposizione uniforme in direzioni contratte e direzioni espanse, si richiede che la contrazione/espansione avvenga solo per tempi molto grandi e solo per quasi ogni punto dell'insieme iperbolico, non necessariamente per tutti. Il grado di contrazione/espansione è misurato da un numero finito di invarianti, gli *esponenti di Lyapunov*; l'iperbolicità non uniforme corrisponde ad avere esponenti di Lyapunov tutti non nulli. I sistemi iperbolici non uniformi godono di molte delle proprietà dei sistemi uniformemente iperbolici (per esempio, esistenza di varietà stabili e instabili, lemma di pedinamento, decomposizione spettrale in una quantità eventualmente numerabile di insiemi basici); e diversi sistemi dinamici importanti si sono rivelati iperbolici non uniformi: per esempio gli attrattori di Hénon (Benedicks-Carleson, 1991) e di Lorenz (Tucker, 2002) già menzionati, e di loro analoghi

multidimensionali (Viana, 1997). In generale, i sistemi dinamici iperbolici non uniformi non ammettono una misura fisica; ci sono però notevoli eccezioni, quali i sistemi con una sola direzione espansa (Wang-Young, 2001). Non è noto se i sistemi dinamici iperbolici non uniformi sono generici, anche se ci sono importanti risultati recenti a questo riguardo (Bochi e Viana, 2005).

Per sistemi conservativi, la situazione è più chiara: in molti casi, un sistema dinamico conservativo generico o è iperbolico non uniforme, oppure ha tutti gli esponenti di Lyapunov nulli, e quest'ultima situazione è più comune (Bochi, 2002, Bochi e Viana, 2005). Vale la pena di ricordare che la famosa *teoria KAM* (o di Kolmogorov-Arnold-Moser) predice l'esistenza di orbite quasi-periodiche (cioè che sembrano periodiche se osservate con una precisione finita) stabili in sistemi conservativi; e queste orbite necessariamente hanno esponenti di Lyapunov nulli.

Nel 2000 Palis ha formulato un'importante congettura su come dovrebbero essere i sistemi dinamici generici, congettura che ha guidato lo sviluppo della teoria in questi ultimi anni: può un sistema dinamico qualsiasi essere approssimato arbitrariamente bene da un sistema dinamico con un numero finito di attrattori che attraggono quasi ogni orbita, possiedono una misura fisica, e sono stabili per perturbazioni? Questa congettura è stata dimostrata da Lyubich (2002) per i polinomi reali quadratici; altri risultati sono stati ottenuti da Avila, Lyubich e de Melo (2003) nel caso unidimensionale, e da Araújo (2000) in più dimensioni.

Un risultato molto importante di Pujals e Sambarino (2000) ha chiarito la situazione in dimensione 2: un sistema dinamico generico o è uniformemente iperbolico oppure ha una *tangenza omoclina* (un punto in cui le varietà stabile e instabile di un punto periodico iperbolico sono tangenti – e quindi non trasversali). Per comprendere completamente la dinamica in dimensione 2 occorre quindi capire in profondità cosa accade in presenza di tangenze omocline; e lo studio degli attrattori di Hénon ha aperto la strada per la comprensione dettagliata della dinamica di una vasta classe di sistemi non iperbolici (Viana-Benedicks, 2001, 2006; Palis-Yoccoz, 2001, 2006). È interessante notare che, come mostrato da Gorodetski e Kaloshin (2007), in dimensione 2 i sistemi con tangenza omoclina, benché generici da un punto di vista topologico, capitano con probabilità zero: sulle superfici, un sistema dinamico generico preso a caso è uniformemente iperbolico.

In dimensione più alta un'altra generalizzazione dell'iperbolicità uniforme si è rivelata importante: diremo che un insieme invariante ammette una *decomposizione dominata* se possiamo decomporre lo spazio tangente in due sottospazi invarianti  $E_1$  ed  $E_2$  in modo che il sistema espanda di più (o contraiga di meno) le direzioni in  $E_1$  rispetto a quelle in  $E_2$ . Questo non vuol dire che le direzioni in  $E_1$  siano espanse, o quelle in  $E_2$  siano contratte; se però ciò accade, diremo che il sistema è *parzialmente iperbolico*. L'importanza della condizione di decomposizione dominata è che implica l'esistenza di opportune versioni delle varietà stabili e instabili, che quindi possono essere usate per controllare la dinamica nel resto dello spazio delle fasi.

Bonatti, Díaz e Pujals (2003) hanno dimostrato che insiemi basici stabili per perturbazioni (quali quelli della decomposizione spettrale nel caso uniformemente iperbolico, o gli attrattori della congettura di Palis), e più in generale sistemi dinamici stabilmente topologicamente transitivi, ammettono sempre una decomposizione dominata. Viceversa, Pujals e Sambarino (2006) hanno dimostrato che sulle superfici la decomposizione dominata implica una decomposizione dell'insieme dei punti non vaganti in un numero finito di componenti basiche. Infine, Abdenur, Bonatti e Crovisier (2006) hanno dimostrato che in un sistema dinamico generico o l'insieme dei punti non vaganti si può decomporre in un numero finito di componenti basiche con una decomposizione dominata oppure il sistema ha un numero infinito di orbite periodiche attrattive; quindi il fenomeno di Newhouse si è rivelato essere l'ostruzione alla genericità della decomposizione dominata.

La decomposizione dominata entra anche in un altro aspetto della congettura di Palis. Infatti, Alves, Bonatti e Viana (2000) hanno dimostrato che in diversi casi la decomposizione dominata implica l'esistenza di un numero finito di misure fisiche i cui bacini comprendono quasi ogni punto.

Un altro problema collegato riguarda la *stabile ergodicità*: sotto quali condizioni un sistema dinamico ergodico rimane tale quando perturbato. Partendo da idee di Pugh e Shub (2000), molto recentemente Burns, Dolgopyat, Pesin e Pollicott (2008) hanno dimostrato che, in certi casi, la parziale iperbolicità implica la stabile ergodicità. Viceversa, Dolgopyat e Winkilson (2003), e Bonatti, Matheus, Viana e Winkilson (2004) hanno mostrato che la stabile ergodicità è generica nei sistemi dinamici conservativi parzialmente iperbolici soddisfacenti qualche ipotesi tecnica.

Riassumendo, l'identificazione di classi generiche di sistemi dinamici è ancora lontana dall'essere compiuta, ma i risultati piuttosto esaurienti in dimensione 2 e per sistemi conservativi fanno ben sperare per il futuro.

### ***Oltre il reale***

Finora ci siamo occupati di sistemi dinamici definiti sul campo dei numeri reali; ma esiste un'ampia e fiorente letteratura riguardante i sistemi dinamici *olomorfi*, cioè definiti sul campo dei numeri complessi. Il primo lavoro su questo argomento, dovuto a Kœnigs, risale al 1884, praticamente coevo ai risultati di Poincaré sul problema dei 3 corpi. Julia e Fatou, negli anni '20, posero le basi della teoria in dimensione uno nel caso discreto, dimostrando una serie di teoremi estremamente significativi e identificando i problemi principali del campo. Per procedere oltre mancavano però strumenti tecnici essenziali, che vennero sviluppati solo negli anni '60 e '70. Di conseguenza, negli anni '80 si assistette a una rinascita della dinamica olomorfa, grazie a Douady, Hubbard, Sullivan, Yoccoz, Écalle, Shishikura, McMullen e altri. Negli anni '90 è iniziato anche lo studio della dinamica olomorfa discreta in dimensione maggiore di uno, grazie a Fornæss, Sibony, Bedford, Smillie, Écalle e altri; inoltre negli stessi anni è fiorito anche lo studio dei sistemi dinamici olomorfi continui (*foliazioni complesse*), a cui hanno contribuito in modo essenziale Camacho, Sad, Gomez-Mont, Mattei, Moussu, Cerveau, Loray, Ghys, Brunella, e altri.

La grande intuizione di Julia e Fatou fu di suddividere i punti dello spazio delle fasi (che nel loro caso è un piano o una sfera) in due insiemi invarianti: l'*insieme di Fatou* dei punti le cui orbite hanno un comportamento stabile (nel senso che punti vicini hanno orbite con comportamento simile), e il suo complementare, l'*insieme di Julia*. La dinamica sull'insieme di Fatou è regolare: le orbite o sono attratte da punti periodici oppure hanno un comportamento ellittico, ruotando lungo curve ben definite. Invece la dinamica sull'insieme di Julia è caotica: abbiamo la compresenza di punti periodici densi e di singole orbite dense. Inoltre, gli insiemi di Julia sono esempi paradigmatici di *insiemi frattali*: insiemi che rivelano la stessa struttura a qualsiasi ingrandimento (*auto-similarità*). La facilità con cui possono essere generati (basta iterare un polinomio) e il fascino estetico delle rappresentazioni grafiche degli insiemi di Julia hanno grandemente contribuito alla diffusione e alla popolarità dei frattali anche al di fuori della matematica a partire dagli anni '80.

Nonostante l'intenso studio condotto negli ultimi trent'anni della dinamica olomorfa in una variabile, rimangono ancora aperti problemi importanti. Il principale riguarda i polinomi quadratici uniformemente iperbolici (nel senso discusso nella sezione precedente) sull'insieme di Julia: si congettura che siano generici nella famiglia di tutti i polinomi quadratici a coefficienti complessi. È interessante notare come questa congettura sia equivalente a una proprietà puramente geometrica del famoso *insieme di Mandelbrot*. Per studiare la dinamica dei polinomi quadratici, è sufficiente limitarsi a considerare i polinomi della forma  $p_c(z)=z^2+c$ , dove  $c$  è un numero complesso. L'insieme di Mandelbrot  $M$  è l'insieme dei  $c$  per cui l'insieme di Julia di  $p_c$  è *connesso* (cioè composto da un solo

pezzo). Nel 1984 Douady e Hubbard dimostrarono che, nonostante le rappresentazioni grafiche sembrassero suggerire il contrario, l'insieme di Mandelbrot è connesso. La congettura della genericità dei polinomi quadratici iperbolici è invece equivalente alla *locale connessione* dell'insieme di Mandelbrot, cioè al fatto che  $M$  è costituito da un unico pezzo anche localmente vicino a ogni punto (a priori, potrebbe esistere un punto  $p$  in cui  $M$  è fatto così male da essere composto, vicino a  $p$ , da infiniti pezzi che si ricongiungono solo lontano da  $p$ ). È noto che  $M$  è localmente connesso quasi dappertutto; ma rimangono dei punti, detti *infinitamente rinormalizzabili*, che ancora sfuggono, nonostante recenti lavori di McMullen (1994) e Jiang (2000).

Un risultato sorprendente recente di Buff e Chéritat (2005) evidenzia ulteriormente la complessità della situazione. Gli insiemi di Julia o sono l'intero spazio delle fasi oppure non hanno interno: come le linee unidimensionali nel piano, non possono contenere dischetti, non importa quanto piccoli. Nonostante ciò, Buff e Chéritat hanno costruito insiemi di Julia talmente intricati da avere *area positiva* (insiemi di Julia di dimensione di Hausdorff pari a 2 erano stati costruiti da Shishikura nel 1998). A tutt'oggi non esistono rappresentazioni grafiche significative di questi insiemi, nonostante risultati di Binder, Braverman e Yampolski (2007) suggeriscano che dovrebbe essere possibile ottenerle.

Una tecnica tipica per lo studio della dinamica ricorrente, suggerita originariamente da Poincaré, consiste nello studio dell'*applicazione di primo ritorno*: fissato un determinato sottoinsieme dello spazio delle fasi, si associa a ciascun punto del sottoinsieme il primo punto della sua orbita che ritorna nel sottoinsieme. Spesso si riscala l'applicazione ottenuta in modo da definirla su un dominio paragonabile allo spazio delle fasi iniziale: il sistema dinamico così ottenuto si dice *rinormalizzazione* di quello iniziale. In parole povere, la rinormalizzazione consiste nell'ingrandimento della dinamica in una zona dello spazio delle fasi particolarmente interessante, ingrandimento che permette di vedere meglio fenomeni delicati.

Il processo di rinormalizzazione spesso può essere ripetuto, fornendo ingrandimenti sempre maggiori del sistema di partenza. Agli inizi degli anni '80, Feigenbaum, Couillet e Tresser notarono che, in certi sistemi dinamici reali definiti su un intervallo, l'iterazione del processo di rinormalizzazione converge a un sistema dinamico *universale*, indipendente da quello di partenza, che contiene informazioni essenziali sulla geometria del sistema di partenza. Per capire questo fenomeno, Sullivan (1986) suggerì di considerare la stessa procedura nel piano complesso, e in particolare per polinomi quadratici (i punti infinitamente rinormalizzabili dell'insieme di Mandelbrot citati sopra corrispondono esattamente a polinomi  $p_c$  per i quali il processo di rinormalizzazione può essere ripetuto infinite volte). Seguendo questa idea, McMullen (1994) e Lyubich (1999) riuscirono a dimostrare che il sistema dinamico universale è un attrattore del genere del ferro di cavallo di Smale, uniformemente iperbolico in un opportuno spazio complesso multidimensionale. Chiudendo questo interessante circolo d'idee, de Faria e de Melo (2000) e Yampolski (2002) hanno poi ottenuto un simile risultato d'universalità per un'importante classe di sistemi dinamici reali definiti sulla circonferenza, mostrando la potenza dei metodi olomorfi anche per problemi apparentemente solo reali.

La dinamica olomorfa unidimensionale ha applicazioni di importanza anche pratica; un esempio di problema dalla storia secolare recentemente risolto grazie a tecniche di dinamica olomorfa riguarda il metodo di Newton per determinare radici di polinomi. Un problema classico in matematica (e con numerose applicazioni anche al di fuori della matematica) è la ricerca delle radici (o zeri) di un polinomio: dato un polinomio  $p(x)$ , vogliamo trovare i valori  $x_0$  di  $x$  per cui si abbia  $p(x_0) = 0$ . Formule per trovare le radici di polinomi di primo e secondo grado erano note fin dall'antichità; e nel Cinquecento Del Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari trovarono formule analoghe per le radici di polinomi di terzo e quarto grado. Sorprendentemente, nell'Ottocento Abel e Galois dimostrarono invece che per polinomi dal quinto grado in su formule simili *non esistono*: non è possibile ricavare le

radici di un polinomio di quinto grado (o di grado più alto) effettuando semplicemente operazioni algebriche sui coefficienti del polinomio. Bisogna procedere in altro modo.

Un procedimento alternativo classico, noto come *metodo di Newton* (o di *Newton-Raphson-Wallis*), consiste nel costruire a partire dal polinomio  $p$  una funzione (razionale) ausiliaria  $f(x) = x - p(x)/p'(x)$  che fornisce delle approssimazioni delle radici di  $p$ . Più precisamente, le radici di  $p$  sono punti fissi attrattivi di  $f$ ; quindi se  $x_1$  è un numero sufficientemente vicino alla radice (incognita)  $x_0$  di  $p$ , allora l'orbita di  $x_1$  converge a  $x_0$ . In altri termini, applicando la funzione  $f$  un numero finito di volte al valore iniziale  $x_1$  (detto *seme*) possiamo approssimare la radice  $x_0$  con la precisione desiderata; e nella maggior parte delle applicazioni un valore approssimato della radice è altrettanto utile del valore esatto.

Tutto ciò era già noto nel Seicento, e può essere dimostrato con tecniche elementari di analisi matematica, senza disturbare i sistemi dinamici. Come notò esplicitamente Cayley nell'Ottocento, questo approccio ha però un problema di base. Newton ha dimostrato che, partendo da un valore *sufficientemente vicino* a una radice, questo metodo permette di approssimare la radice con la precisione che vogliamo. Ma se non sappiamo *dove* si trovano le radici del polinomio, come possiamo essere sicuri di partire sufficientemente vicino? E se partiamo lontani, che succede? Approssimiamo comunque una radice, oppure iterando la procedura (ovvero seguendo l'evolversi del sistema dinamico) facciamo qualcos'altro? In altre parole, qual è il comportamento delle orbite di questo sistema dinamico?

Per rispondere a queste domande conviene considerare l'azione del sistema dinamico sul piano complesso, anche se il polinomio ha coefficienti reali; infatti, le eventuali radici complesse del polinomio influiscono in maniera sensibile sul comportamento del sistema. Cayley riuscì a risolvere il problema per polinomi di grado due, dimostrando che in questo caso il metodo di Newton applicato a un seme  $x_1$  converge alla radice più vicina. L'unica eccezione è quando  $x_1$  è equidistante dalle due radici; in quel caso il metodo di Newton non funziona, l'orbita di  $x_1$  non converge a una radice. Ma l'insieme dei punti equidistanti dalle due radici è una retta, che ha area nulla; quindi prendendo un seme a caso il metodo di Newton converge a una delle due radici, e l'insieme dei punti in cui il metodo di Newton non funziona è trascurabile.

Cayley non riuscì a dire nulla su polinomi di grado 3 o più alto. Julia e Fatou, negli anni '20 del Novecento, tradussero il problema in termini di sistemi dinamici olomorfi, e notarono che l'insieme dei semi per cui il metodo di Newton funziona coincide con le componenti dell'insieme di Fatou attratte dalle radici del polinomio. Quindi l'insieme dei semi per cui il metodo di Newton *non* funziona è costituito dall'insieme di Julia e da eventuali altri componenti dell'insieme di Fatou. Se quest'ultimo insieme ha area nulla, allora il metodo di Newton funziona partendo da un punto preso a caso; se invece ha area positiva, c'è il rischio serio che prendendo un seme a caso il metodo di Newton possa non convergere a una radice.

Abbiamo già visto che esistono insiemi di Julia di area positiva; ma quelli finora noti non sono insiemi di Julia di un sistema dinamico associato al metodo di Newton, per cui non creano problemi. Invece, negli anni '80 si sono trovati numerosi esempi di polinomi (anche semplicemente di terzo grado) in cui l'insieme di Fatou ha componenti di area positiva che non sono attratte dalle radici del polinomio; per esempio, sono attratte da un'orbita periodica che non ha nulla a che fare con le radici. Di conseguenza, in generale il metodo di Newton su un seme a caso potrebbe non funzionare.

Per ovviare a questo problema, Hubbard, Schleicher e Sutherland (2001) hanno proposto di *non* scegliere un seme a caso. Sfruttando a fondo risultati recenti di dinamica olomorfa, per ogni numero naturale  $d$  Hubbard, Schleicher e Sutherland sono riusciti a costruire un insieme *finito* di semi (composto da circa  $1.11 d \log^2 d$  punti) partendo dai quali si riescono a trovare, con il metodo di

Newton, tutte le radici di qualsiasi polinomio di grado  $d$ . Quindi la dinamica olomorfa ha fornito un metodo sicuro per approssimare le radici di qualsiasi polinomio.

Come accennato sopra, negli ultimi vent'anni abbiamo assistito a un prepotente sviluppo della dinamica olomorfa discreta in più variabili complesse. Le tematiche principali trattate sono state la dinamica degli *automorfismi polinomiali* dello spazio euclideo complesso  $n$ -dimensionale, e la dinamica delle *applicazioni razionali* di varietà algebriche  $n$ -dimensionali.

Gli automorfismi polinomiali sono in un certo senso sia una generalizzazione dei polinomi di una variabile che una versione complessa dei sistemi dinamici di Hénon a cui abbiamo già accennato. Bedford e Smillie (1991–2006) hanno condotto un profondo e dettagliato studio del caso bidimensionale, applicando tecniche derivate dalla dinamica complessa unidimensionale, tecniche di analisi complessa di più variabili, e tecniche derivate dalla dinamica iperbolica reale. In particolare, nel 2004 sono riusciti ad applicare i risultati da loro ottenuti nel caso complesso anche allo studio degli attrattori di Hénon reali, chiarendo fenomeni che rimanevano misteriosi se visti solo nell'ambiente reale. Inoltre, negli ultimi anni, Sibony e Dinh (2005) hanno esteso alcuni dei principali risultati di Bedford e Smillie al caso  $n$ -dimensionale.

Le applicazioni razionali di varietà algebriche  $n$ -dimensionali sono invece la generalizzazione delle funzioni razionali di una variabile complessa, e sono state studiate da un punto di vista dinamico ricorrendo soprattutto a tecniche probabilistiche e di teoria del potenziale. In particolare, partendo dalle idee innovative introdotte da Fornaess e Sibony negli anni '90 nel caso dello spazio proiettivo complesso  $n$ -dimensionale, e in maniera parallela a quanto fatto per gli automorfismi polinomiali, Sibony e Dinh (2005), Dujardin (2006), Bedford e Diller (2005) e altri hanno costruito delle misure invarianti che descrivono la statistica delle orbite dei punti; in particolare, la dinamica caotica è concentrata nel supporto di queste misure. Inoltre, sono misure con struttura *laminare* (in parole povere, lo spazio delle fasi è ripartito in sottoinsiemi di dimensione inferiore invarianti, e la famiglia di questi sottoinsiemi ha una struttura molto debole ma sufficiente per lo studio dei fenomeni dinamici), e questa struttura permette di identificare anche fenomeni dinamici non di dimensione massima. Anche in questo caso rimangono molti problemi aperti, ma proprio per questo motivo è uno dei settori più attivi dell'analisi e della geometria complessa in una e più variabili.

## ***Oltre la matematica***

In quest'ultima sezione descriveremo tre applicazioni recenti della teoria dei sistemi dinamici al di fuori della matematica, senza alcuna pretesa di completezza; rimandiamo ai volumi in bibliografia (soprattutto Fiedler, 2002, e Craig, 2008) per una rassegna più vasta.

Il primo esempio di applicazione extra-matematica dei sistemi dinamici riguarda l'economia e le scienze sociali. Una delle teorie più diffuse sull'economia di mercato è che il sistema si autoregoli (l'ipotesi della "mano invisibile" di Adam Smith): lasciata a se stessa, la dinamica dei prezzi tende in maniera naturale a un punto di equilibrio, in cui il prezzo di ciascun bene offerto in vendita coincide con quanto gli acquirenti sono disposti a pagare per averlo. Aspettando abbastanza, si raggiunge l'equilibrio ideale fra la domanda e l'offerta. È naturale chiedersi se c'è un sostegno matematico a questa credenza; e la risposta, secondo Saari (1992, 2000, 2001), è no. Anche modelli economici molto semplici possono esibire un comportamento estremamente complesso e ben lontano dalla semplice evoluzione verso un punto d'equilibrio (anche quando un tale punto di equilibrio esiste); è molto più probabile invece che ci sia uno sviluppo caotico.

Per dare un'idea del tipo di problemi che si possono presentare, descriviamo un modello economico molto semplificato, composto da  $a$  persone e in cui siano in circolazione  $n$  beni diversi. Se il bene  $j$ -

esimo ha un prezzo unitario di  $p_j$  euro (nel modello i prezzi varieranno col tempo), comprare  $x_j$  unità del bene  $j$ -esimo costa  $x_j p_j$  euro. Supponiamo inoltre di essere in un'economia di puro baratto, per cui la ricchezza della  $k$ -esima persona è completamente descritta da quante unità di ciascun bene possiede. Se possiede  $w_1$  unità del primo bene,  $w_2$  unità del secondo bene, e così via, la sua ricchezza sarà data da  $W^k = p_1 w_1 + \dots + p_n w_n$ . Per semplicità, indichiamo con  $\mathbf{w}^k = (w_1, \dots, w_n)$  la lista delle quantità di beni posseduti dalla persona  $k$ -esima, e con  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  la lista dei prezzi degli  $n$  beni.

La scelta di quali e quanti beni acquistare ai prezzi  $\mathbf{p}$  è dettata da preferenze personali. Un modo classico per rappresentare queste preferenze è tramite una *funzione d'utilità*, che assegna un valore a ogni lista  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  di unità di beni: più grande è il valore, maggiore è il desiderio della persona di possedere quella lista di beni. Fissati i prezzi  $\mathbf{p}$ , e la ricchezza e la funzione d'utilità della persona  $k$ -esima, una tecnica matematica standard (nota come tecnica dei *moltiplicatori di Lagrange*) permette di determinare la lista  $\mathbf{x}^k(\mathbf{p})$  delle unità di beni che la persona  $k$ -esima preferirebbe acquistare, compatibilmente con la propria ricchezza e con i prezzi in vigore in quel momento. La differenza fra i beni desiderati  $\mathbf{x}^k(\mathbf{p})$  e i beni posseduti  $\mathbf{w}^k$  è la *domanda*  $\mathbf{X}^k(\mathbf{p})$  della persona  $k$ -esima ai prezzi  $\mathbf{p}$ .

Sommando, bene per bene, le domande di tutte le persone presenti nel modello otteniamo la *domanda aggregata*  $\mathbf{X}(\mathbf{p})$ , che ci dice come si svilupperanno i prezzi. Infatti, se la componente di  $\mathbf{X}(\mathbf{p})$  corrispondente al bene  $j$ -esimo è positiva, vuol dire che la richiesta sul mercato del bene  $j$ -esimo è maggiore della disponibilità, per cui il prezzo del bene  $j$ -esimo salirà. Viceversa, se la componente di  $\mathbf{X}(\mathbf{p})$  corrispondente al bene  $j$ -esimo è negativa, vuol dire che sul mercato il bene  $j$ -esimo è presente in misura maggiore di quanto è richiesto, per cui il suo prezzo scenderà. Il punto d'equilibrio di cui parlavamo prima è quello in cui i prezzi sono tali che tutte le componenti di  $\mathbf{X}(\mathbf{p})$  sono nulle: la domanda è uguale all'offerta per tutti i beni, e quindi i prezzi non variano più.

In termini matematici, il paragrafo precedente si esprime dicendo che la domanda aggregata descrive la variazione dei prezzi, ovvero che il comportamento dei prezzi è guidato dalla seguente equazione differenziale ordinaria:  $\mathbf{p}' = \mathbf{X}(\mathbf{p})$ . Il nostro modello economico è quindi un sistema dinamico continuo. La dottrina della mano invisibile asserisce quindi che questo sistema dinamico deve possedere dei punti fissi attrattivi che attraggono tutte le orbite del sistema: per qualsiasi condizione iniziale, i prezzi si evolvono naturalmente verso un punto di equilibrio in cui la domanda aggregata si annulla,  $\mathbf{X}(\mathbf{p}_0) = 0$ .

Ora, un'analisi delle domande aggregate che si possono ottenere con questa procedura conduce alle *leggi di Walras*. In termini matematici, le leggi di Walras dicono semplicemente che lo spazio delle fasi di questo sistema dinamico è una sfera  $(n - 1)$ -dimensionale. I sistemi dinamici sulla sfera sono stati ampiamente studiati, e possono avere comportamenti diversissimi, complicati e caotici quanto vogliamo. In particolare, ci sono miriadi di sistemi dinamici sulla sfera  $(n - 1)$ -dimensionale in cui non tutte le orbite si dirigono verso i punti d'equilibrio; anzi, punti fissi attrattivi potrebbero proprio non esistere. Ebbene, risultati di Sonnenschein, Mantel e Debreu (1974) mostrano che, non appena il numero  $a$  delle persone coinvolte supera il numero  $n$  dei beni disponibili, *qualsiasi* sistema dinamico sulla sfera  $(n - 1)$ -dimensionale può essere ottenuto come domanda aggregata a partire da un'opportuna scelta di funzioni d'utilità e ricchezze iniziali. Quindi i prezzi possono avere uno sviluppo caotico quanto si vuole, e non è affatto detto che tendano al punto d'equilibrio previsto da Adam Smith.

I lavori di Saari (1992) rivelano che questa situazione permane anche con modelli della dinamica dei prezzi, sia discreti che continui, molto più generali e raffinati di quello che abbiamo descritto qui. Non solo: anche comportamenti perfettamente regolari dei prezzi, convergenti al punto d'equilibrio, prodotti da domande aggregate accuratamente scelte, possono essere completamente distrutti semplicemente ritirando o aggiungendo un singolo bene alla contrattazione. Saari fornisce un esempio di sistema con

quattro beni e comportamento regolare che, ritirando dalla contrattazione un bene, si trasforma in un sistema caotico con un attrattore strano di dimensione di Hausdorff  $1+\sqrt{1/5}$ .

La portata dei risultati sviluppati da Saari è dimostrata da lavori recenti (Saari 2000, 2001, 2004) che applicano queste tecniche alla teoria delle elezioni e delle decisioni. Usando i concetti di attrattore e di caos deterministico Saari fornisce una spiegazione di alcuni apparenti paradossi presenti in molti sistemi elettorali e in diverse tecniche decisionali, e suggerisce come procedere per costruire sistemi elettorali che rispondano a caratteristiche scelte a priori.

La seconda applicazione riguarda invece la neurobiologia. Negli ultimi anni stanno prendendo piede tecniche di cura di malattie neurologiche quali l'epilessia e il morbo di Parkinson, basate su impianti di stimolatori di aree cerebrali; di conseguenza è diventato importante capire la risposta di grandi popolazioni di neuroni a stimoli periodici esterni. Tsodyks et al. (1997) hanno osservato che, in certe condizioni, una stimolazione periodica esterna degli interneuroni inibitori nell'ippocampo può causare un'oscillazione sincrona in fase dei gruppi di neuroni inibitori ed eccitatori dell'ippocampo, mentre il comportamento atteso era di oscillazione in opposizione di fase fra neuroni inibitori e neuroni eccitatori. Si tratta di un fenomeno paradossale, che ha stupito gli esperti. In un interessante lavoro recente, Noonburg, Bernadete e Pollina (2003) ne hanno fornito una spiegazione in termini di sistemi dinamici.

Il punto di partenza è un modello di Wilson e Cowan (1972) per popolazioni di neuroni contenenti sia gruppi inibitori che gruppi eccitatori, basato su un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Noonburg, Bernadete e Pollina hanno osservato che ponendo una singola condizione sui quattro parametri che descrivono i *feedback* intra- e inter-neurali il sistema di equazioni di Wilson e Cowan periodicamente forzato può essere ricondotto a una singola equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Si tratta di una semplificazione tutt'altro che banale, dato che stiamo parlando di sistemi che contengono milioni di neuroni.

Un'equazione differenziale ordinaria, come abbiamo visto, è un sistema dinamico continuo; ed è questo il punto di vista adottato da Noonburg, Bernadette e Pollina nell'analisi del loro modello. I parametri chiave del modello sono la soglia dei neuroni eccitatori, e l'ampiezza del *feedback* inibizione-eccitazione. Lo spazio dei parametri è suddiviso in tre regioni stabili, e in ognuna di queste sono presenti solo attrattori periodici iperboliche. In generale le attività dei gruppi di neuroni inibitori ed eccitatori oscilla in opposizione di fase come previsto, con un attrattore corrispondente a bassa attività e uno corrispondente ad alta attività. Ma se le ampiezze della stimolazione a bassa frequenza e del *feedback* inibizione-eccitazione sono grandi abbastanza, questi due attrattori diventano instabili, e il sistema converge a una soluzione periodica attrattiva in cui i due gruppi di neuroni oscillano in fase fra stati di bassa e alta attività, esattamente come rilevato sperimentalmente da Tsodyks et al. In conclusione, il modello dinamico costruito da Noonburg, Bernadette e Pollina non solo riesce a riprodurre, chiarendone l'origine, fenomeni apparentemente paradossali misurati sperimentalmente; ma può servire come guida per predire gli effetti di stimolazioni periodiche su grandi popolazioni di neuroni, suggerendo direzioni opportune per gli esperimenti e per la ricerca di cure per malattie neurologiche.

L'ultima applicazione riguarda la fisica, e più precisamente la meccanica celeste. Abbiamo visto che il campo dei sistemi dinamici è nato con il lavoro di Poincaré sul problema degli  $n$  corpi; il meno che possiamo fare è descrivere brevemente risultati recenti in quest'area. Cominciamo con un risultato che, in modo quasi paradossale, conferma quanto Poincaré avesse ragione: Wang (1991) ha costruito una soluzione esplicita del problema degli  $n$ -corpi, apparentemente nello spirito dei matematici e fisici dell'Ottocento. Questa soluzione è però espressa da una serie, cioè da una somma infinita di termini,



che converge con estrema lentezza. Per ottenere un'approssimazione anche solo grossolana delle orbite bisogna sommare miliardi di addendi; approssimazioni significative richiedono un numero di addendi talmente grande da essere quasi inimmaginabile. In altre parole, la soluzione esplicita sognata dai meccanici celesti classici si è rivelata di utilità pratica quasi nulla.

La maggiore novità degli ultimi anni nello studio del problema degli  $n$  corpi è originata dal lavoro di Chenciner e Montgomery (2000). Fra le possibili soluzioni del problema degli  $n$  corpi, le più importanti sono le orbite periodiche stabili, in quanto assicurano la sopravvivenza del sistema nel tempo (grazie alla periodicità) e rispetto a perturbazioni esterne (grazie alla stabilità). Come già osservato, il problema dei 2 corpi ammette soluzioni periodiche e stabili: le orbite ellittiche Kepleriane. Nel diciottesimo secolo Eulero e Lagrange trovarono due soluzioni periodiche stabili per il problema dei 3 corpi; una di queste è anche realizzata nel Sistema Solare (è il sistema formato da Sole, Giove e dall'asteroide Ceres). I due secoli successivi non offrirono quasi nient'altro: pur essendo state individuate alcune tecniche che possono in teoria permettere l'identificazione di configurazioni iniziali con orbite periodiche stabili, fino al 2000 non si era dimostrato l'assenza in queste orbite di collisioni fra i vari corpi.

Chenciner e Montgomery, invece, partendo da evidenze numeriche dovute a Moore (1993), e da un'idea di Poincaré, hanno costruito una spettacolare soluzione periodica del problema dei 3-corpi, in cui 3 masse uguali si inseguono, senza collisioni, lungo una curva simile a un otto. Il metodo di Chenciner e Montgomery è stato poi utilizzato da Chen (2001) per costruire una soluzione periodica per il problema dei 4 corpi che oscilla periodicamente da una configurazione quadrata a una configurazione lineare. Marchal (2002) e Chenciner (2002) hanno sviluppato ulteriormente la tecnica in modo da poterla applicare al problema degli  $n$  corpi; e Ferrario e Terracini (2004) hanno introdotto nuove idee di origine algebrica e topologica per costruire famiglie di soluzioni periodiche con vari gradi di simmetria. Come spesso accade in Matematica, l'identificazione dell'idea giusta ha portato in pochi anni da una situazione di assoluta scarsità alla costruzione di famiglie infinite di esempi.

Fra i sistemi fisici a  $n$  corpi quello chiaramente più interessante, e di cui vorremmo conoscere la stabilità, è il Sistema Solare. Il lavoro di Laskar (1990, 1997, 2003), Robutel e Laskar (2001), Correia e Laskar (2003), e altri, basato, tanto per cambiare, su idee di Poincaré, ha permesso di calcolare numericamente con grande precisione le orbite dei pianeti del Sistema Solare per miliardi di anni, e di giungere alla conclusione che il Sistema Solare è caotico, altamente non periodico, e (soprattutto per i pianeti interni) tendenzialmente instabile. Gli effetti caotici si evidenziano soprattutto sull'*obliquità* dell'orbita, che è l'angolo fra l'equatore di un pianeta e il piano della sua orbita. L'obliquità della Terra è attualmente stabile grazie alla presenza della Luna; ma l'obliquità di Marte ha subito in tempi geologici variazioni caotiche da circa  $0^\circ$  a circa  $60^\circ$ , che hanno causato drastici cambiamenti climatici. L'orbita di Mercurio è particolarmente instabile; le simulazioni numeriche effettuate suggeriscono che possa sfuggire dal sistema solare o collidere con Venere in meno di 3.5 miliardi di anni. L'immagine odierna dell'evoluzione del Sistema Solare è ben diversa da quella dei matematici del Settecento, sostanzialmente convinti della stabilità dell'orbita dei pianeti; le intuizioni di Poincaré, assieme alla potenza di calcolo dei calcolatori odierni, ci hanno portato a una visione più realistica e affascinante, anche se forse meno rassicurante, dell'universo in cui viviamo.

## **Bibliografia**

[1] J. Palis: *A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors*. *Astérisque* **261** (2000), 335–347.

- [2] S. Marmi: *Chaotic behaviour in the Solar System (following J. Laskar)*. Astérisque **266** (2000), 3–88.
- [3] M. Viana: *Dynamical systems: moving into the next century*. In **Mathematics unlimited–2001 and beyond**. Springer-Verlag, Berlin, 2001, pp. 1167–78.
- [4] D.G. Saari: **Chaotic elections!** American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [5] V.I. Arnol'd, S.P. Novikov (a cura di): **Dynamical Systems IV: Symplectic geometry and its applications**. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [6] B. Hasselblatt, A. Katok (a cura di): **Handbook of dynamical systems, Vol. 1A**. North Holland, Amsterdam, 2002.
- [7] B. Fiedler (a cura di): **Handbook of dynamical systems, Vol. 2: toward applications**. North Holland, Amsterdam, 2002.
- [8] D. Cerveau, É. Ghys, N. Sibony, J.-C. Yoccoz: **Complex dynamics and geometry**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [9] F. Gesztesy, H. Golden: **Soliton equations and their algebro-geometric solutions. Vol. I**. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [10] J. Laskar: *Chaos in the solar system*. Ann. Henri Poincaré **4** (2003), suppl. 2, S693--S705.
- [11] B. Hasselblatt, A. Katok (a cura di): **Handbook of dynamical systems, Vol. 1B**. North Holland, Amsterdam, 2005.
- [12] C. Bonatti, L.J. Díaz, M. Viana: **Dynamics beyond uniform hyperbolicity**. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [13] M. Shub: *All, most, some differentiable dynamical systems*. In **International Congress of Mathematicians. Vol. III**, European Mathematical Society, Zürich, 2006, pp. 99–120.
- [14] W. Craig (a cura di): **Hamiltonian Dynamical Systems and Applications**. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [15] M. Abate, E. Bedford, M. Brunella, D. Schleicker, N. Sibony: **Holomorphic dynamical systems**. Apparirà in Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2009.